СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 5021

П.Н. Боголюбов

О ЗНАКЕ МНИМОЙ ЧАСТИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2 - 5021

П.Н. Боголюбов

О ЗНАКЕ МНИМОЙ ЧАСТИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

В предыдущей работе [1] рассмотрено квазипотенциальное уравнение Логунова и Тавхелидзе. Показано, что если антиэрмитова часть

$$A = \frac{1}{i}(V - V^{+})$$

квазипотенциала V является положительным оператором, то S -матрица, определяемая уравнением Л-Т, будет "недоунитарной".

Здесь мы рассмотрим вопрос о том, как в выражении V появляется положительная антиэрмитова часть. А.Н. Тавхелидзе показал [2], что положительная антиэрмитова часть возникает у тех квазипотенциальных уравнений, которые получаются с помощью теории двухчастичных функций Грина. Мы воспользуемся более элементарными соображениями. Для этого будем исходить из обычного представления, что кроме упругого канала имеются и другие каналы, а уравнение составляется лишь для описания упругого процесса с помощью введения некоторого квазипотенциала.

Рассмотрим соответствующую динамическую схему. Возьмем систему с гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_1,$$

где H_1 - гамильтониан взаимодействия, и запишем для нее волновое уравнение в виде:

$$(H_0 + H_1 - E)\psi = 0. \qquad (1)$$

Для исследования процессов рассеяния применим известный формализм Липпмана-Швингера. Пусть ψ_{in} представляет падающую волну свободных невзаимодействующих частиц:

$$(H_0 - E_0)\psi_{in} = 0,$$

где E_0 – их суммарная энергия. Представим волновую функцию ψ суперпозицией падающей и рассеянной волн

$$\psi = \psi_{in} + \psi_{sc}.$$

Тогда из (1) получим:

$$(H_0 - E_0)\psi_{sc} = -(H_1 \psi_{in} + H_1 \psi_{sc}).$$

Отсюда в соответствии с известным "правилом деления" для задач рассеяния имеем

$$-\psi_{sc} = \frac{1}{H_0 - E_0 - i\epsilon}(H_1 \psi_{in} + H_1 \psi_{sc}),$$

где $\epsilon \geq 0$. Положив

$$\psi_{sc} = \frac{1}{H_0 - E_0 - i\epsilon} T \psi_{in}, \tag{2}$$

где T – некоторый оператор, найдем:

$$T\psi_{in} = -H_1 \psi_{in} - H_1 \frac{1}{H_0 - E_0 - i\epsilon} T\psi_{in}.$$

Таким образом, этому уравнению удовлетворим, определив оператор T из уравнения

$$T = -H_1 - H_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} T, \tag{3}$$

содержащего E в качестве параметра. Поскольку H_0, H_1 являются эрмитовыми, матрица рассеяния, определяемая через амплитуду T, очевидно, будет унитарной. Предположим, что среди возможных состояний рассматриваемой динамической системы имеются двухчастичные состояния, соответствующие частицам определенных сортов. Обозначим через Λ

пространство таких двухчастичных состояний. Будем рассматривать упругие процессы, когда до и после соударения мы имеем только две частицы в состояниях из Λ. Пусть $\mathfrak{L}$ обозначает полное пространство всех волновых функций рассматриваемой динамической системы, включающее Λ как свое подпространство. Введем оператор проекции P, проецирующий $\mathfrak{L}$ на Λ : $P\mathfrak{L} = \Lambda$. Таким образом, произвольная ψ из $\mathfrak{L}$ переводится оператором P в элемент $P\psi$ подпространства Λ. Элементы Λ при этом не изменяются: из $\psi \in \Lambda$ следует, что $P\psi = \psi$. По определению, P обладают следующими свойствами:

$$P^+ = P \; ; \; P^2 = P.$$

Далее мы будем рассматривать случай, когда P коммутирует с H_0 x/.

Для рассмотрения упругого процесса возьмем $\psi_{in} \in \Lambda$. Из (2) получим

$$\psi_{sc} = \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} T\psi_{in} = \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} TP\psi_{in}.$$

Отсюда видно, что компонента ψ_{sc}, принадлежащая Λ и определяющая рассматриваемый упругий процесс, будет:

$$P\psi_{sc} = \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} PTP\psi_{in}. \tag{4}$$

Таким образом, как амплитуда T определяет полную матрицу рассеяния, так ее упругая часть выражается через спроецированную амплитуду

$$\tilde{\tilde{T}} = PTP. \tag{5}$$

---

x/ Такой случай реализуется, например, когда H_0 не содержит членов, вызывающих изменение числа частиц какого-либо сорта. В этом случае H_0 переводит состояние из Λ в состояние, также принадлежащее Λ. Пусть ψ – произвольная функция из $\mathfrak{L}$. Тогда $P\psi \in \Lambda$ и $H_0 P\psi \in \Lambda$ и потому $PH_0P\psi = H_0P\psi$. Так как это равенство имеет место для произвольной ψ, то $PH_0P = H_0P$. Переходя к сопряженному и учитывая эрмитовость P и H_0, получим $PH_0P = PH_0$, что и доказывает, что P и H_0 коммутируют: $PH_0 = H_0P$.

Теперь, исходя из уравнения (3), получим уравнение квазипотенциального типа для амплитуды (5):

$$\tilde{\tilde{T}} = - PH_1 P - PH_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} TP =$$

$$= - PH_1 P - P H_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} [PTP + (1-P)T P] = \tag{6}$$

$$= - PH_1 P - PH_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}} - PH_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} (1-P) TP.$$

Умножая (3) слева на $(1-P)$, а справа на P, получим

$$(1-P)TP = -(1-P)H_1 P - (1-P)H_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} PTP -$$

$$-(1-P)H_1 \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} (1-P)TP.$$

Отсюда следует, что

$$\{1 + (1-P)H_1 (1-P) \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon}\} (1-P)TP =$$

$$= -(1-P)H_1 P - (1-P)H_1 P \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}$$

или

$$\{H_0 - E - i\epsilon + (1-P)H_1 (1-P)\} \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} (1-P)TP =$$

$$= -(1-P)H_1 P - (1-P)H_1 P \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} (1-P)TP =$$

$$= -\{H_0 + (1-P)H_1 (1-P) - E - i\epsilon\}^{-1} \{(1-P)H_1 P + (1-P)H_1 P \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}\}.$$

Подставив это соотношение в правую часть равенства (6), получим:

$$\tilde{\tilde{T}} = -\{PH_1P + PH_1P \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}\} -$$

$$-PH_1(1-P)\{H_0 + (1-P)H_1(1-P) - E - i\epsilon\}^{-1}\{(1-P)H_1P + (1-P)H_1P \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}\}.$$

Введем квазипотенциальное выражение:

$$U(E) = -PH_1P + PH_1(1-P)\{H_0 + (1-P)H_1(1-P) - E - i\epsilon\}^{-1}(1-P)H_1P. \tag{7}$$

Тогда можно написать

$$\tilde{\tilde{T}} = U(E) + U(E) \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}. \tag{8}$$

Рассмотрим выражение вида:

$$X = \frac{1}{H_0 - E - i\epsilon} P.$$

Поскольку H_0 коммутирует с P , $X = PX$. Поэтому

$$(PH_0P - E - i\epsilon)X = P$$

или

$$X = \frac{1}{PH_0P - E - i\epsilon} P.$$

Введем обозначение $\mathcal{E} = PH_0P$. Мы можем интерпретировать $\mathcal{E}$ как оператор суммарной энергии двух рассматриваемых частиц на бесконечном удалении друг от друга, когда взаимодействие между ними, задаваемое членом H_1 , исчезает. В частности, уравнение для падающей волны можно записать

$$(\mathcal{E} - E)\psi_{in} = 0.$$

Уравнение (8) можно также представить в форме

$$\tilde{\tilde{T}} = U(E) + U(E) \frac{1}{\mathcal{E} - E - i\epsilon} \tilde{\tilde{T}}, \tag{9}$$

куда входят только двухчастичные операторы $\mathcal{E}$, $U(E)$ и $\tilde{\tilde{T}}$.

Рассмотрим теперь антиэрмитову часть квазипотенциального оператора

$$A(E)=-i(U(E)-U^{+}(E)).$$

Получим из (7)

$$U(E)-U^{+}(E)=$$
$$=PH_1(1-P)\{[H_0+(1-P)H_1(1-P)-E-i\epsilon]^{-1}-$$
$$-[H_0+(1-P)H_1(1-P)-E+i\epsilon]^{-1}\}(1-P)H_1P.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{1}{x+i\epsilon}-\frac{1}{x-i\epsilon}=2i\pi\delta(x),$$

найдем

$$A(E)=2\pi PH_1(1-P)\delta\{H_0+(1-P)H_1(1-P)-E\}(1-P)H_1P.$$

Так как δ - функция неотрицательна

$$\delta\{H_0+(1-P)H_1(1-P)-E\}\geq 0,$$

антиэрмитова часть квазипотенциала будет положительным оператором

$$A(E)=2\pi\{(1-P)H_1P\}^{+}\delta\{H_0+(1-P)H_1(1-P)-E\}\{(1-P)H_1P\}\geq 0.$$

Рассмотрим далее входящее в $A(E)$ выражение:

$$(1-P)\delta\{H_0+(1-P)H_1(1-P)-E\}(1-P). \qquad (10)$$

Здесь оператор $(1-P)$ преобразует произвольную $\psi\in\mathfrak{L}$ в функцию, ортогональную к Λ :

$$P(1-P)\psi=(P-P^2)\psi=0.$$

Обозначим через Λ_1 часть $\mathfrak{L}$, ортогональную к Λ . Видно, что если для рассматриваемого интервала значений энергии E в Λ_1 нет решений уравнения

$$H_0\psi+(1-P)H_1(1-P)\psi=E\psi \qquad (11)$$
$$\psi\in\Lambda_1,$$

то выражение (10) тождественно равно нулю, поскольку в этом случае равные нулю собственные значения аргумента δ -функции не реализуются на Λ_1. Поэтому можно сказать, что если при данных E возможен только рассматриваемый упругий процесс, т.е. решений (11) нет, то антиэрмитова часть квазипотенциала обращается в нуль, т.е. $U(E)=U^+(E)$. В этом случае определяемая уравнением (9) амплитуда $\tilde{\tilde{T}}$ приводит к унитарной матрице рассеяния. Так как оператор

$$H_0+(1-P)H_1(1-P)$$

является эрмитовым, то его спектр будет вещественным. Можно, следовательно, определить для комплексных E оператор

$$U_c(E)=-PH_1P+PH_1(1-P)\{H_0+(1-P)H_1(1-P)-E\}^{-1}(1-P)H_1P.$$

При этом для вещественных E

$$U(E)=U_c(E+i\epsilon),$$

а антиэрмитова часть $A(E)$

$$A(E)=U_c(E+i\epsilon)-U_c(E-i\epsilon),$$

как видно, соответствует разрезу при переходе из верхней в нижнюю комплексную полуплоскость. Запишем выражение (4) в форме:

$$P\psi_{so}=\frac{1}{\mathcal{E}-E-i\epsilon}\tilde{\tilde{T}}\psi_{in}.$$

Положив

$$\phi=P\psi=\psi_{in}+P\psi_{so},$$

из уравнения (9) получим волновое уравнение вида

$$(\mathcal{E}-E)\phi=U(E)\phi. \tag{12}$$

Отметим здесь, что при составлении квазипотенциального уравнения всегда имеется некоторый произвол, связанный с тем, что упругая матрица рассеяния определяется не всей формой $\tilde{\tilde{T}}$, а только ее значениями на энергетической поверхности

$$\mathcal{E}=E. \tag{13}$$

Поэтому можно делать различные преобразования, не изменяя T на энергетической поверхности (13). Воспользуемся этим для преобразования полученных здесь квазипотенциальных уравнений к уравнениям типа Логунова-Тавхелидзе.

Введем преобразованный $\tilde{\tilde{T}}$-оператор

$$T' = \sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,\tilde{\tilde{T}}\,\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}. \tag{14}$$

При этом предполагается, что $\mathcal{E}$ и E существенно положительны. Из (14) видно, что на энергетической поверхности $T' = \tilde{\tilde{T}}$. Для получения уравнения для T' умножим уравнение (9) слева и справа на $\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}$.

Получим:

$$T' = \sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,U(E)\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,U(E)\,\frac{1}{\mathcal{E}-E-i\epsilon}\,\tilde{\tilde{T}}\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,U(E)\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}} +$$

$$+\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,U(E)\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,\frac{2E^2}{\mathcal{E}(\mathcal{E}+E)(\mathcal{E}-E-i\epsilon)}\,T'.$$

Но, так как $\mathcal{E} > 0$, $E > 0$

$$(\mathcal{E}+E)(\mathcal{E}-E-i\epsilon) = (\mathcal{E}^2-E^2-i\epsilon(\mathcal{E}+E)) =$$

$$= \mathcal{E}^2-E^2-i\epsilon.$$

Положив

$$V(E)=\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,U(E)\,\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,; \tag{15}$$

получим уравнение желаемого вида:

$$T'=V(E)+V(E)\,\frac{E^2}{\mathcal{E}^2-E^2-i\epsilon}\,T'. \tag{16}$$

Соответствующее волновое уравнение (12) при замене $\phi=\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\,\phi'$

принимает форму Логунова-Тавхелидзе

$$\{\mathcal{E}(\mathcal{E}^2-E^2)-2E^2V(E)\}\phi'=0. \tag{17}$$

Антиэрмитова часть $V(E)$ также является положительным оператором:

$$\frac{V(E)-V^+(E)}{i}=\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\left(\frac{U(E)-U^+(E)}{i}\right)\sqrt{\frac{(\mathcal{E}+E)\mathcal{E}}{2E^2}}\geq 0\,.$$

Необходимо подчеркнуть здесь, что в общем случае квазипотенциальные операторы V и U не являются локальными.

Литература

1. *П.Н. Боголюбов. Сообщение ОИЯИ Е2-4417, Дубна 1969.*
2. *A.N. Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.*

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта 1970 года.