ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4952

Д.И. Блохинцев, Г.И. Колеров

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ С "CUT-OFF"

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1970

P2 - 4952

Д.И. Блохинцев, Г.И. Колеров

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ С "CUT-OFF"

Направлено на II -ое Международное совещание
по нелокальной квантовой теории поля (Азау, 1970)

" From this point of view, we can introduce a cut-off into our high energy interactions without making things any way worse than they are"

P.A.M. Dirac [1]

## §1. <u>Введение</u>

Приведенный эпиграф может служить введением к последующему.

В работе описывается алгоритм, который позволяет построить последовательные приближения по константе взаимодействия в случае как перенормируемой, так и неперенормируемой теории поля. Следует подчеркнуть, что здесь не имеется в виду построение какой-либо новой, "нелокальной" теории поля. Речь идет о приеме (алгоритме), который позволяет сделать все расходящиеся интегралы локальной теории конечными без того, чтобы нарушить

1) условие макроскопической причинности; согласно этому условию в асимптотической области, т.е. вне сферы действия сил $b$ , акаузальные сигналы должны убывать с ростом расстояния между частицами $r = |\vec{x}_i - \vec{x}_k|$ существенно быстрее каузальных (которые убывают как $1/r$ ) [2,3,4] ; и

2) <u>условие унитарности</u> $S$ -матрицы:

$$\hat{S}\hat{S}^{+} = 1. \tag{1}$$

## §2. Обобщение причинной функции Фейнмана

Предлагаемый алгоритм основан на обобщении причинной функции Фейнмана $D_c(x-y)$, описывающей в локальной теории распространение взаимодействия из точки $y$ в точку $x$ (или обратно). Именно, причинную функцию локальной теории

$$D_c(x) = \theta(x_0)D_-(x) - \theta(-x_0)D_+(x) \tag{2}$$

(здесь приняты обычные обозначения :

$$\theta(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_0 z}}{z - i\eta}dz\ , \tag{3}$$

$\eta \to 0$, $\theta(x_0)=1$ для $x_0>0$ и $\theta(x_0)=0$ при $x_0<0$. $D_\pm(x)$ суть положительно- и отрицательночастотные функции, определенные формулой

$$D_\pm(x) = \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{ikx}\,\theta(\pm k_0)\delta(k^2 - m^2)d^4k\ , \tag{4}$$

где $kx = k_0x_0 - \vec{k}\vec{x}$, $m$ -масса частицы поля) мы заменяем на нелокальную функцию $D_c(x,n,a)$, определенную формулой

$$D_c(x,n,a) = \theta(x_0)D_-(x,n^-,a) - \theta(-x_0)D_+(x,n^+,a), \tag{2'}$$

где

$$D_{\pm}(x, n^{\pm}, a) = \mp \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \theta(\pm k_0)\, \delta(k^2 - m^2)\, \tilde{\tilde{\rho}}(k, n^{\pm} a)\, d^4k\,. \qquad (4')$$

Здесь функция $\tilde{\tilde{\rho}}(k, n^{\pm}, a)$ есть фурье-образ от "формфактора" $\rho(\xi, n^{\pm}, a)$:

$$\tilde{\tilde{\rho}}(k, n^{\pm}, a) = \int \rho(\xi, n^{\pm}, a)\, e^{-ik\xi}\, d^4\xi. \qquad (5)$$

Этот формфактор зависит от "элементарной" длины $a$, ограничивающей область нелокальности, и от некоторого единичного, времениподобного вектора $n^{\pm}$: $(n^{\pm})^2 = 1$, $n^+ = n_0, \vec{n}$ и $n^- = -n_0, \vec{n}$. Этот вектор выбирается таким образом, чтобы не было предпочтения какой-либо системе отсчета сравнительно с другой, кроме того предпочтения, которое определяется самим фактом существования рассматриваемой динамической системы x/. Подробнее вектора будут определены позднее.

Мы будем считать формфактор $\rho(x, n, a)$ действительной функцией инварианта

$$R^2 = 2(x\,n)^2 - x^2 \geq 0, \qquad (6)$$

так, что

$$\rho(x, n, a) = f\left(\frac{R^2}{a^2}, a\right), \qquad (7)$$

и потребуем, чтобы

$$\rho(x, n, a) \to 0 \quad \text{при} \quad \frac{R}{a} \to \infty, \qquad (8)$$

---

x/ По терминологии, использованной в /2,3,4/, вектора $n^{\pm}$ должны быть внутренними, т.е. заимствованы из числа динамических переменных изучаемой системы.

$$\rho(x,n,a) \to \delta^4(x) \quad \text{при} \quad a \to 0. \tag{9}$$

Заметим, что фурье-образ (5) в этом случае будет также действительной функцией инварианта:

$$\tilde{\tilde{R}}^2 = 2(k\,n)^2 - k^2 \geq 0. \tag{10}$$

Из (4) и (5) нетрудно получить, что

$$D_{\pm}(x,n,a) = \int D_{\pm}(x-\xi)\rho(\xi,n,a)d^4\xi. \tag{11}$$

В силу условий (8) и (9) акаузальные эффекты сосредотачиваются в малой области $|x| \approx a$ и исчезают при $|x| \to 0$, как исчезает разность $D_{\pm}(x,n,a) - D_{\pm}(x)$ при $|x| \to \infty$, т.е. быстрее исчезновения самих функций $D_{\pm}(x,n,a)$, $D_{\pm}(x)$ x/.

Вычислим теперь фурье-образы от слагаемых в формуле (2'). Имеем:

$$\int \theta(x_0) D_-(x,n^-,a) e^{-ikx} d^4x =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx} d^4x \int \frac{e^{ix_0 z}}{z - i\eta} dz \int e^{iqx}\,\theta(-q_0)\delta(q^2 - m^2)\tilde{\tilde{\rho}}(q,n^-,a)d^4q =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z - i\eta} \int \theta(-q_0)\delta(q^2 - m^2)\rho(q,\bar{n},a)\,\delta(z - k_0 + q_0)\,\delta^3(\vec{k} - \vec{q})\,dq_0 d^3q = \tag{12}$$

$$= \frac{\rho(k,n^-,a)}{2\omega_k}\,\frac{1}{k_0 + \omega_k - i\eta},$$

---

x/ Функции $D_{\pm}(x)$ являются обобщенными функциями. Поэтому под разностью $D_{\pm}(x,n,a) - D_{\pm}(x)$ разумеется разность

$$\Delta(x) = \int [D_{\pm}(x-y,n,a) - D_{\pm}(x-y)]\, f(y)\, d\,y,$$

где $f(y)$ – достаточно гладкая интегрируемая функция в $\mathfrak{R}_4(y)$.

где $\omega_k = +\sqrt{\vec{k}^2 - m^2}$, $n^- = -n_0, \vec{n}$, так что $\tilde{\tilde{\rho}}(k, n^-, a)$ есть функция инварианта $\tilde{\tilde{\mathfrak{R}}}^2$ (10), взятого при $k = -\omega_k k$, $kn = +\omega_k n_0 - \vec{k}\vec{n}$ и $k^2 = \omega_k^2 - \vec{k}^2 = m^2$. В частности, в системе отсчета, где $\vec{n} = 0$,

$$\tilde{\tilde{R}}^2 = 2\vec{k}^2 + m^2 . \tag{10'}$$

Подобным же образом:

$$\int \theta(-x_0) D_+(x, n^+, a) e^{-ikx} d^4x =$$

$$= -\frac{\tilde{\tilde{\rho}}(\vec{k}, n^+, a)}{2\omega_k} \frac{1}{k_0 - \omega + i\eta} . \tag{12'}$$

Объединяя формулы (12) и (12'), из (2) найдём:

$$\tilde{\tilde{D}}_c(k, n, a) = \tilde{\tilde{\rho}}(\vec{k}, n, a) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} , \tag{13}$$

где $\epsilon = 2\omega_k \eta \to +0$ и формфактор $\tilde{\tilde{\rho}}(\vec{k}, n, a)$ вынесен общим множителем, так как $\rho(k, n^-, a)$ при $k_0 = -\omega_k$ совпадает с $\tilde{\tilde{\rho}}(k, n^+, a)$ при $k_0 = +\omega_k$. Из (13) следует, что аналитические свойства нелокальной функции $\tilde{\tilde{D}}_c(k, n, a)$ в комплексной плоскости $k_0$ совпадают со свойствами локальной функции $\tilde{\tilde{D}}_c(k)$, а "формфактор" $\tilde{\tilde{\rho}}(k, n, a)$ действует как режущий множитель ("cut-off - фактор" в трехмерном пространстве $\mathfrak{R}_3(\vec{k})$).

## §3. Матрица рассеяния с "cut off"

Если представить матрицу рассеяния $\hat{S}$ в виде

$$\hat{S} = 1 + i\hat{T} , \tag{14}$$

разложить амплитуду рассеяния $\hat{T}$ на дисперсионную $\hat{D}$ и абсорбционную $A$ части

$$\hat{T} = \hat{D} + i\hat{A}, \tag{15}$$

где $D$ и $A$ – эрмитовы операторы, то из (1) следует:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{T}\hat{T}^{+}. \tag{16}$$

Разлагая амплитуду $T$ по степеням константы взаимодействия $g$ :

$$\hat{T} = \sum_{n=1}^{N} g^{n}\hat{T}_{n}, \tag{17}$$

$N \to \infty$, получим из (16) формулу

$$\hat{A}_n = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-1}\hat{T}_{n-s}\hat{T}_{s}, \tag{18}$$

выражающую мнимую часть амплитуды рассеяния $\hat{A}_n$, взятую в приближении через амплитуды $T_s$, относящиеся к младшим приближениям $s = 1, 2, \dots, n-1$. Соотношение (18) есть следствие предполагаемой унитарности матрицы $\hat{S}$ и должно быть справедливо в нашем алгоритме. Заметим, что в импульсном представлении матричные элементы операторов $\hat{T}$, $\hat{D}$ и $\hat{A}$ имеют вид

$$(p'|\hat{T}|p) = \delta^4(\Sigma p' - \Sigma p)\frac{T(p',p)}{\sqrt{2p_0'}\dots\sqrt{2p_0}}, \tag{19}$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ суть импульсы частиц в начальном состоянии, а $p' = (p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n)$ суть импульсы в конечном состоянии; $p_0'$, $p_0$ – четвертые компоненты, $\Sigma p = P$ есть полный импульс в начальном, а $\Sigma p' = P'$ – то же в конечном состоянии. Амплитуда $T(p',p)$ есть инвариантная функция импульсов $p'$, $p$ и универсальных констант. В локальной теории в $n$-ом приближении она определяется формулой

$$T_n(p',p) = D_n(p',p) + i A_n(p',p) = \Sigma \prod_f \Phi_f(p',p), \tag{20}$$

где $\Phi_f(p',p)$ есть интеграл Фейнмана для связанной диаграммы $f$ – порядка $(\Sigma f = n)$ и сумма взята по всем произведениям диаграмм, дающих вклад в процесс $p \to p'$, в $n$-ом приближении. Интеграл Фейнмана равен :

$$\Phi_f(p',p) = \int \ldots \prod_{s=1}^{4} \prod_{j}^{m} \tilde{D}_o(Q_j)\, d^4 q_s . \tag{21}$$

Здесь $f$ – число вершин, $L$ – число интегрирований, $M$ – число внутренних линий: $L = M + 1 - f$ ; если $N$ – число внешних линий, то для простейшего взаимодействия типа $g\phi^3$ вектора $Q_j$ суть линейные функции внутренних импульсов $q_s$ и внешних импульсов $p'$, $p$. Из (20) следует, что

$$A_n(p',p) = \mathrm{Im}\, T_n(p',p), \quad D_n(p',p) = \mathrm{Re}\, T_n(p',p). \tag{22}$$

Соотношение (18) в импульсном представлении принимает вид

$$A_n(p',p) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-1}\int T_{n-s}(p',p'')\,\delta^4(p''-p)\,\frac{d^3p''}{2p_0''}\,T_s(p'',p) . \tag{23}$$

Как известно, среди интегралов в (21) встречаются расходящиеся. Все эти интегралы могут быть сделаны конечными, если в (21) локальные функции $\tilde{\tilde{D}}_c(Q_j)$ заменить, согласно (13), на нелокальные функции $\tilde{\tilde{D}}_c(Q_j, n_f, a)$. Тогда вместо (21) будем иметь:

$$\Phi_f(p', p, n_f, a) = \int \dots \prod_{s=1}^{L} \prod_{j}^{M} \tilde{\tilde{D}}_c(Q_j, n_f, a)\, d^4 q_s, \qquad (21')$$

где каждой связанной диаграмме приписывается свой вектор, симметричный в начальных и конечных импульсах $p$ и $p'$, входящих в такую диаграмму, например:

$$n_f = \frac{P_f}{\sqrt{P_f^2}} = \frac{P_f'}{\sqrt{P_f'^2}}.$$

(Здесь $P_f$ и $P_f'$ – полный импульс в $f$ -ой диаграмме соответственно в начальном и конечном состоянии. Ясно, что $P_f = \Sigma p_f = \Sigma p_f' = P_f'$ ).

Если фурье-образ формфактора $\tilde{\tilde{\rho}}(Q, n_f, a)$ убывает с ростом достаточно быстро, то сходимость интегралов в (21) будет обеспечена. В качестве примера можно взять:

$$\tilde{\tilde{\rho}}(\vec{Q}, n_f, a) = e^{-\tilde{\tilde{R}}^2/a^2}, \qquad (24)$$

$$\tilde{\tilde{R}} = 2(Q n_f)^2 - Q^2. \qquad (24')$$

Формфакторы вида $\tilde{\tilde{\rho}} = f(\tilde{\tilde{R}}/a)$ не обращаются в 1 на поверхности масс. Это означает, что замена $D_{\pm}(x)$ на $D_{\pm}(x, n, a)$ оказывает влияние не только на распространение виртуальных частиц, но и на распространение частиц реальных. Между тем нет никаких оснований вносить изменение в законы движения свободных реальных частиц. Чтобы удовлетворить этому дополнительному требованию, мы определим амплитуду рассеяния с „cut-off" в $n$ -ом приближении $T_n(p',p,a)$ формулой

$$T_n(p',p,a) = D_n(p',p,a) + iA_n(p',p,a), \tag{25}$$

где

$$D_n(p',p,a) = \mathrm{Re}\{\Sigma \prod_f \Phi_f(p',p,n_f,a)\}, \tag{26}$$

$$A_n(p',p,a) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-1} T_{n-s}(p',p,a)\,\delta(P''-P)\,\frac{d^3P''}{2P''_0}\,T_s(p'',p,a). \tag{27}$$

При таком определении мнимой части амплитуды (27) автоматически обеспечивается выполнение условия унитарности $S$ -матрицы (1) и восстанавливается обычный закон распространения свободных частиц [x/].

Покажем теперь, что определения (26) и (27) обеспечивают и макроскопическую причинность (условие 2)). Для этого заметим, что в координатном представлении амплитуда рассеяния запишется в виде

$$(x'|T|x) = \int \frac{e^{ip'x'}}{2p'_0}\, d^3p'\, \delta^4(\Sigma p' - \Sigma p)\, T(p',p)\, \frac{e^{-ipx}}{2p_0}\, d^3p. \tag{28}$$

Подставляя сюда $T_n(p',p,a)$ из (25) и используя (26), (27), найдем:

$$(x'|T_n(a)|x) = (x'|D_n(a)|x) + \frac{i}{2}\sum_{s=1}^{n-1}\iint (x'|T_{n-s}(a)|x'')\times$$
$$\times D_+(x''-x''')(x'''|T_s(a)|x)\,d^4x''\,d^4x''' ; \tag{26'}$$

---

[x/] При этом определении величины $D_n$ и $A_n$ не являются действительной и мнимой частью одной и той же функции $\Sigma \prod_f \Phi_f(p',p,n_f,a)$. Однако это не имеет значения, так как амплитуда $T_n(p',p,a)$ из-за внесенной формфактором $\tilde{\tilde{\rho}}$ нелокальности не обладает простыми аналитическими свойствами, характерными для локальной теории без "cut-off".

из-за принятого определения мнимой части амплитуды (27) часть акаузальных функций $D_{+}(x, n, a)$ заменяется на каузальные $D_{+}(x)$ (именно те из функций $D_{+}(x, n, a)$, которые связывают амплитуды $T_{n-s}$ и $T_{s}$ под знаком интеграла в (26)).

Если формфактор $\rho(x, n, a)$ выбран таким образом, что разность $D_{\pm}(x, n, a) - D_{\pm}(x)$ убывает достаточно быстро с ростом евклидова расстояния $(x)$, то соблюдение условия макроскопической причинности при замене части функций $D_{\pm}(x, n, a)$ на функции $D_{\pm}(x)$ будет лишь усилено.

## §4. О"полевой" массе частиц

Предложенный в этой работе алгоритм позволяет заменить все расходящиеся интегралы локальной теории поля - сходящимися.

При этом алгоритм обеспечивает соблюдение макроскопической причинности, в частности, отсутствие опережающих сигналов с положительной энергией. Алгоритм обеспечивает также унитарность $S$ -матрицы в каждом порядке теории возмущений[x/].

Все величины, вычисленные по такому алгоритму, оказываются функциями затравочного заряда $g_0$, затравочной массы ("голой") частицы $m_0$ и элементарной длины $a$.

---

[x/] Рассмотрение простейших примеров показало, что в этой схеме кросс-симметрия соблюдается лишь приближенно, при $a^2 s \ll 1$ и $a^2 t \ll 1$ ( $s$ -инвариантная энергия, $t$ -инвариантный передаваемый импульс). Подобным же образом приближенно соблюдается и калибровочная инвариантность (сохранение тока). Характер ограничений, связанных с последним обстоятельством, еще нуждается в дальнейшем изучении.

В частности, амплитуда, описывающая упругое рассеяние двух частиц, имеет вид

$$T = T(s, t, a, g_0, m_0), \tag{29}$$

где переменные $s$ и $t$ имеют обычное значение.

Масса реальной ("одетой") частицы $m$ определяется из полюсов одночастичной функции Грина. Соответствующее уравнение имеет вид

$$m = B(m^2, a, g_0, m_0). \tag{30}$$

В принципе это уравнение может приводить к спектру масс: $m = M_j(a, g_0, m_0)$, $j = 1, 2, \ldots$

Однако предположение, что уравнению (28), а вместе с тем и затравочной массе $m_0$ можно придать физический смысл, является далеко идущей гипотезой. Оправдание ей можно видеть лишь в том, что возникающая проблема является общей для любой теоретической схемы, приводящей к уравнению типа (28) и оперирующей с затравочной массой $m_0$.

На самом деле нельзя "выключить" взаимодействие частицы с вакуумом. Поэтому наилучшим в смысле самосогласованности теории было бы предположение, что $m_0 = m$. Уравнение (28), определяющее реальную массу частицы, приобретает тогда вид:

$$m = B(m^2, a, g_0, m). \tag{30'}$$

В этом предположении частица никакой "полевой" массы не имеет. Ясно, что это возможно лишь в том случае, если вклады в "полевую" массу от различных взаимодействий компенсируют друг друга.

## Литература


1. P.A.M. Dirac. Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy. Center for Theor. Studies University Miami, p.1 (1969).
2. D.I. Blokhintsev, G.I. Kolerov. Nuovo Cimento, 44, 974 (1966).
3. D.I. Blokhintsev. Instr. Teor.Phys.Trieste, IC/67/36 (1967).
4. Д.И. Блохинцев. Пространство и время в микромире. Изд. "Наука", М., 1970.



Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1970 года.