СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P2 - 4945

В.Н. Стрельцов

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1970

P2 - 4945

В.Н. Стрельцов

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ*

* В порядке обсуждения

Как известно, в (нерелятивистской) квантовой механике средние значения (пространственных) координат и импульсов на основании теорем Эренфеста (см., например, /1/) в свободном случае удовлетворяют классическим уравнениям движения x/:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{m}\,\bar{p}_x\,,$$

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = 0.$$

Иными словами можно сказать, что $\bar{x}$, например, играет роль классической координаты.

Коль скоро обычные классические уравнения движения инвариантны относительно преобразования Галилея, то мы вправе полагать, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой со скоростью v , в рамках квантовой механики должны выполняться следующие равенства:

$$\bar{x}' = \bar{x} - vt\,, \tag{1}$$

$$t' = t\,. \tag{1'}$$

Воспользовавшись далее выражением для $\bar{x}(\bar{x}')$, перепишем (1) в форме:

---

x/ Более того, существует основанный на данных теоремах предельный переход от квантовой механики к классике.

$$\int \psi'^{*} x' \psi' dx' = \int \psi^{*} x \psi \, dx - vt . \qquad (2)$$

Учитывая сказанное ранее, не совсем бессмысленно в данном случае задать следующий вопрос: как преобразуются сами квантовые координаты при таком переходе от одной системы отсчета к другой?

Обычный ответ на него (см., например, /2/) гласит, что квантовые координаты подчиняются тем же самым формулам преобразования Галилея:

$$x' = x - vt , \qquad (3)$$

$$t' = t \qquad (3')$$

или

$$dx' = dx - v\,dt \qquad (4)$$

$$dt' = dt \qquad (4')$$

для дифференциалов.

Данный выше ответ обусловлен теми требованиями инвариантности, которые предъявляются ко всем уравнениям физики и, в частности, к квантовым уравнениям.

Напомним для полноты, что, скажем, утверждение о том, что уравнение Шредингера

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{ih}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad (5)$$

инвариантно относительно преобразований Галилея, должно означать следующее. После перехода к другой (штрихованной) системе отсчета на основании формул (3) и (3') (и обратных им) и вытекающих из них равенств:

$$\psi(x,t) = \psi(x' + vt', t') = \psi'(x', t') , \qquad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} ,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} ,$$

преобразованное уравнение должно иметь тот же самый вид, что и исходное уравнение (5):

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t'} = \frac{ih}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} .$$

После такого небольшого отступления вернемся к поставленному вопросу.

С целью ответа на него мы проверим, выполняется ли равенство (1) при условии, что квантовые координаты подчиняются преобразованиям Галилея [x/]. После подстановки (3) и (4) (с учетом (6)) в левую часть выражения (2) будем иметь:

$$\int \psi^{*} (x - vt) \psi \, dt = 0 \qquad (7)$$

или

$$v = \frac{\int \psi^{*} x \psi \, dt}{\int \psi^{*} t \psi \, dt} . \qquad (7')$$

Полученные в результате равенства вряд ли имеют смысл. Дело в том, что, во-первых, вообще не очень ясен физический смысл входящих в них интегралов по времени. Во-вторых, рассматриваемое уравнение (7) для ψ зависит от некоторой фиктивной для данной системы отсчета (где определена ψ -функция) величины v - относительной скорости движения двух систем отсчета. Таким образом, оказывается возможным из вида ψ -функции определить величину v (с помощью уравнения (7')). Этот результат, конечно, следует считать абсурдным.

[x/] Что касается равенств (1') и (3'), то их просто следует считать аналогами потому, что смысл времени в квантовой механике не меняется по сравнению с классикой.

Заметим здесь, что даже более последовательный шаг – привлечение нерелятивистских преобразований координат /3/:

$$x' = (x - vt)\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right), \qquad t' = t\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - \frac{v}{c^2}\,x$$

не меняет сути выводов.

Как устранить обнаруженные противоречия? По-видимому, имеются только две возможности: или отказаться от формул преобразований (3) и (3') для квантовых координат, а,следовательно, и от требования инвариантности, которое, как известно, предъявляется ко всем квантовым уравнениям, или отказаться от формулы (2), которая в конечном счете является следствием справедливости теорем Эренфеста.

Литература

1. *Д.И. Блохинцев. Основы квантовой механики ГИВШ, М (1961), стр.109.*
2. *Ф.Кемпфер. Основные положения квантовой механики, изд. "Мир", М. (1967), стр. 384.*
3. *В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-4461, Дубна (1969).*

Рукопись поступила в издательский отдел

25 февраля 1970 года.