ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4936

И.А. Еганова

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1970

Р2 - 4936

И.А. Еганова*

К ВОПРОСУ О СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Направлено в "Известия АН Азерб. ССР"

* Физический институт АН Азерб. ССР.

Введение

В квантовой электродинамике пользуется вниманием следующая задача. Рассматриваются два атома 1 и 2, разделенные расстоянием R. В момент времени $t=0$ атом 1 возбужден, атом 2 находится в основном состоянии. Исследуется вероятность $w(t)$ возбуждения атома 2 к моменту времени $t>0$ (см. в книге В.Гайтлера[/1/] конец §20 и литературу, цитируемую М.И.Широковым в работе[/2/]). В согласии с релятивистской причинностью, при приближенных вычислениях в рамках первого неисчезающего приближения теории возмущений в этих работах было получено, что в интервале времени $0<t<R/c$ $w(t) = 0$.

В работе[/2/] показано, что точное вычисление в рамках того же приближения не дает строгого нуля для $w(t)$ в этом интервале (см. также статью Б. Ферретти [/3/]).

В работе[/2/], как и во всех остальных работах, использовалась теория возмущений с обычным формализмом "голых" состояний (собственные векторы свободного гамильтониана), поэтому в свете теоремы Хаага (см., например, гл. 19 в книге Г.Бартона[/4/]) можно подвергнуть критике обычное рассмотрение этой задачи с помощью оператора эволюции в картине взаимодействия $\hat{U}(t,0)$.

Настоящая работа является продолжением работы[/5/], где была предложена точно решаемая модель квантовой электродинамики. Модель рассматривает два нерелятивистских электрона в осцилляторных ямах на расстоянии R друг от друга, взаимодействующих с вторичноквантованным электромагнитным полем, и описывается гамильтонианом (1)[x/]:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p}_1 - e\vec{A}(+\vec{d}))^2 + \frac{m\kappa_1^2}{2}(\vec{R}_1 - \vec{d})^2 + \frac{1}{2m}(\vec{p}_2 - e\vec{A}(-\vec{d}))^2 + \frac{m\kappa_2^2}{2}(\vec{R}_2 + \vec{d})^2 +$$

$$+ \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|} + H_{ph}, \quad H_{ph} = \frac{1}{8\pi}\int d\vec{x}\,[\vec{E}^2(\vec{x}) + (\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{x}))^2]. \qquad (1)$$

В (1) приняты такие единицы, что $\hbar = 1$ и $c = 1$, и выбрана кулоновская калибровка; $(+\vec{d})$ и $(-\vec{d})$ – центры осцилляторных потенциалов. $|2\vec{d}| = R$.

В модели принято дипольное приближение: $\vec{A}$ берется не в точках нахождения электронов, а в точках $(+\vec{d})$ и $(-\vec{d})$. В этом приближении заключается наиболее серьезное отличие предложенной модели от квантовой электродинамики. Следует ожидать, что отличие будет небольшим для эффектов с фотонами малых энергий k, если в члены взаимодействия $e\vec{p}_1\vec{A}(+\vec{d})$ и $e\vec{p}_2\vec{A}(-\vec{d})$ введена функция $g(k)$, обрезающая большие k.

Если описывать начальное и конечное состояния задачи с помощью "голых" состояний, то оказывается, что вероятность $w(t)$ обнаружить второй электрон возбужденным в момент времени $t > 0$ отлична от нуля, даже если при $t = 0$ первый не был возбужден. Этот факт можно рассматривать только как еще одно указание на недопустимость использования "голых" состояний в теории со взаимодействием.

Основное содержание работы [5] составляет введение операторов рождения-уничтожения, вакуум которых совпадает с вакуумом модели Ω. Описывая с их помощью начальное и конечное состояния задачи, получа-

---

[x/] Стоит отметить, что гамильтониан (1) не является трансляционно инвариантным, так что предпосылки теоремы Хаага не выполнены.

ем обычную причинно-следственную связь: второй электрон может быть найден в возбужденном состоянии при $t>0$ только в том случае, если при $t=0$ первый электрон был возбужден и к тому же к моменту t потерял свое возбуждение.

Гамильтониан модели в физических операторах выписан в §1, где излагается численный расчёт точного решения рассматриваемой задачи при одном конкретном значении R. Полученный результат сравнивается с результатом первого неисчезающего приближения теории возмущений (§2). Оказывается, что, во-первых, затухание, содержащееся в точном решении, не имеет никакого значения для обсуждаемого эффекта (поведения $w(t)$ при $0<t<R/c$); во-вторых, более простая формула теории возмущений достаточно хорошо передает поведение $w(t)$ при $0<t<R/c$. Поэтому далее исследуется именно эта формула. При достаточно больших значениях R и в некоторой области значений t, близких к R, оказывается возможным получить простое приближенное выражение для $w(t)$, которое и служит основой для заключения о том, что обсуждаемое поведение $w(t)$ является макроакаузальным (см. обсуждение в конце §2).

В §4 показывается, как к тому же заключению можно придти на основании чисто численных расчётов точного решения, не обращаясь к помощи формул теории возмущений. В §3 сравниваются непосредственно результаты, полученные по теории возмущений с физическими и "голыми" состояниями; показано, что последние дают непричинный эффект в несколько раз больший, чем первые.

Таким образом, уточненное рассмотрение задачи в рамках точно решаемой модели /5/ дает по-прежнему непричинный результат. Следующий шаг на пути к окончательному заключению о причинности теории — описание процесса приготовления возбужденного состояния первого электрона и регистрации возбуждения второго.

§1. Точное решение. Численный расчёт амплитуды передачи возбуждения.

В работе [5] было показано, что в некотором приближении гамильтониан (1) может быть представлен в виде суммы трех взаимно коммутирующих операторов: $H = h_x + h_y + h_z$. Там же было получено, что после введения физических операторов h_x, например, имеет вид:

$$h_x = h_{0x} + h'_x \ , \tag{2}$$

$$h_{0x} = \frac{\nu_1}{2}\left(\tilde{a}^+_{1x}\tilde{a}_{1x} + \tilde{a}_{1x}\tilde{a}^+_{1x}\right) + \frac{\nu_2}{2}\left(\tilde{a}^+_{2x}\tilde{a}_{2x} + \tilde{a}_{2x}\tilde{a}^+_{2x}\right) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\,\nu \sum_{b=1}^{2}\left[\tilde{a}^+_{bx}(\nu)\tilde{a}_{bx}(\nu) + \tilde{a}_{bx}(\nu)\tilde{a}^+_{bx}(\nu)\right], \tag{2'}$$

$$h'_x = E\left(\tilde{a}^+_{1x}\tilde{a}_{2x} + \tilde{a}_{1x}\tilde{a}^+_{2x}\right) + \int_0^\infty d\nu \sum_{b=1}^{2}\left\{ \tilde{E}^b_1(\nu)\left[\tilde{a}_{1x}\tilde{a}^+_{bx}(\nu) + \tilde{a}^+_{1x}\tilde{a}_{bx}(\nu)\right] + \right. \\ \left. + \tilde{E}^b_2(\nu)\left[\tilde{a}_{2x}\tilde{a}^+_{bx}(\nu) + \tilde{a}^+_{2x}\tilde{a}_{bx}(\nu)\right]\right\}, \tag{2''}$$

где ν_1 и ν_2 – перенормированные осцилляторные частоты электронов. Рассматривается случай одинаковых ям: $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ и $\nu_1 = \nu_2 = \omega_0$. $E = \epsilon\omega_0$(ϵ определено в приложении А). Далее

$$\tilde{E}^b_1 = (E^b_1 - E^b_2)/\sqrt{2}, \qquad \tilde{E}^b_2 = (E^b_1 + E^b_2)/\sqrt{2}, \tag{3}$$

а для функций E^b_1 и E^b_2 в работе [5] было найдено приближенное выражение:

$$E^b_i(\nu) \cong \epsilon\sqrt{\frac{2\omega_i}{m}}\,\frac{\nu\sqrt{\nu}\,g(\nu)}{(\nu+\omega_i)}\,f_{i1}\left(\nu, \frac{R}{2}\right)\delta_{ib}\ ,\ i = 1,2\ , \tag{4}$$

где $\omega_1 = \omega_0(1+\epsilon)$ и $\omega_2 = \omega_0(1-\epsilon)$, а функции $f_{i1}(\nu, \frac{R}{2})$ выписаны в формуле (Б.21) в приложении Б.

Операторы $\tilde{a}^+_{bx}(\nu)$, $\tilde{a}_{bx}(\nu)$ – физические операторы рождения-уничтожения фотонов сорта x с энергией ν и квантовым числом $''b''$, имеющим смысл, аналогичный поляризации. Аналогично, оператор $\tilde{a}^+_{1x}$ рождает квант возбуждения (фонон) первого электронного осциллятора, так что $\tilde{a}^+_{1x}\Omega$ (наряду с $\tilde{a}^+_{1y}\Omega$ и $\tilde{a}^+_{1z}\Omega$) описывает однократно возбужденное состояние первого электрона. Такими же свойствами по отношению ко второму электрону обладают операторы $\tilde{a}^+_{2x}$, $\tilde{a}_{2x}$.

Из (2') и (2'') видно, что вакуумный вектор физических операторов рождения-уничтожения совпадает с физическим вакуумом модели Ω (собственное состояние полного гамильтониана с наинизшей энергией).

В модели, как можно непосредственно проверить, сохраняются операторы числа квантов каждого сорта

$$n_r = \tilde{a}^+_{1r}\tilde{a}_{1r} + \tilde{a}^+_{2r}\tilde{a}_{2r} + \int_0^\infty d\nu \sum_{b=1}^{2} \tilde{a}^+_{br}(\nu)\, \tilde{a}_{br}(\nu), \quad r = x, y \quad \text{или} \quad z.$$

Поэтому, если в начальный момент был один квант (фотон или фонон) сорта x, например, то и в последующие моменты возможны только состояния с одним квантом, причём только того же сорта x.

Пусть при $t=0$ первый электрон находится в однократно возбужденном состоянии, а второй – в основном. Такое состояние в рассматриваемой модели может описывать, например, вектор $\tilde{a}^+_{1x}\Omega$. Тогда к моменту $t>0$ единственное возможное состояние с возбужденным вторым электроном – это $\tilde{a}^+_{2x}\Omega$. Для амплитуды вероятности $A(t)$ найти систему в момент времени $t>0$ в состоянии $\tilde{a}^+_{2x}\Omega$, если при $t=0$ она находилась в состоянии $\tilde{a}^+_{1x}\Omega$, в п.4 работы /5/ была получена формула:

$$A(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega t}\frac{\Gamma_1(\omega)}{[\omega-\omega_1+\mu_1(\omega)]^2+\Gamma_1^2(\omega)}-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega t}\frac{\Gamma_2(\omega)}{[\omega-\omega_2+\mu_2(\omega)]^2+\Gamma_2^2(\omega)} \quad (5)$$

где

$$\Gamma_i(\omega)=\pi\vec{E}_i^{\,2}(\omega), \quad (6)$$

$$\mu_i(\omega)=\frac{1}{\pi}P\int_0^\infty\frac{\Gamma_i(\nu)}{\nu-\omega}d\nu, \quad i=1,2. \quad (7)$$

P в (7) означает главное значение.

Интеграл в (5) считался с помощью ЭВМ БЭСМ-6. Было принято, что $\omega_0=m/10$, $g^2(\omega)=\mu^2/(\mu^2+\omega^2)$, где параметр $\mu^2=m\omega_0=10\ \omega_0^2$. Далее рассматривался случай, когда $R=20/\omega_0=20\lambda$ (λ может быть названа длиной волны излучения, испущенного первым электроном).

Как оказалось, при таких ω_0 и R параметр $\epsilon=1{,}119\cdot10^{-8}$ (см. приложение А). Функции $\mu_i(\omega)$ были предварительно вычислены по формулам (7), (6) и (4). Для них получаются громоздкие выражения, содержащие наряду с элементарными функциями также интегральные синус и косинус и интегральную показательную функцию. Чтобы убедиться в правильности полученных выражений для $\mu_i(\omega)$, интеграл в (7) был взят численно для нескольких ω с помощью БЭСМ-6. В пределах точности расчёта результаты совпали с результатами, которые дает для этих ω полученное для $\mu_i(\omega)$ аналитическое выражение.

По ряду причин интегралы в (5) считались отдельно. В пределах от 0 до 400 эти интегралы вычислялись непосредственно, а интегралы $\int_{400}^{\infty}$ легко оцениваются; их вкладом, по сравнению с $\int_0^{400}$, оказалось возможным пренебречь. Интервал $[0,400]$ разбивался неравномерно, в зависимости от поведения подинтегральной функции, на большое число (около 4 тысяч) подинтервалов и в каждом применялась 16-точечная формула интегрирования по Гауссу. Для оценки ошибки интегрирования параллельно проводились вычисления по 8-точечной формуле и сравнивались оба результата. В аналитическом выражении для $\mu_i(\omega)$ фигурируют интегральные синус и косинус, интегральная показательная функция, которые тоже считаются численно с некоторой ошибкой. Было проведено исследование влияния этой ошибки на результат.

Еще один независимый способ оценки точности расчётов основан на том, что, как показано в работе /6/,

$$\int_0^\infty d\omega \frac{\vec{E}_i^{\,2}(\omega)}{[\omega-\omega_i+\mu_i(\omega)]^2+\pi^2\vec{E}_i^{\,4}(\omega)}=1$$

если только $\mu_i(\omega)/\pi$ является преобразованием Гильберта (7) функции $\vec{E}_i^{\,2}(\omega)$. Таким образом, при $t=0$ точные значения обоих интегралов в (5) должны равняться $\frac{1}{2}$. Этот способ дает наибольшее значение $(\pm 2\cdot 10^{-9})$ для ошибки.

Полученный результат для $|A(t)|$, приведенный во второй колонке таблицы 1, мы обсудим в §4. Сейчас он будет нужен для демонстрации пригодности первого неисчезающего приближения теории возмущений.

§2. Решение по теории возмущений. Физические операторы.

Амплитуда передачи возбуждения может быть представлена следующим образом:

$$A(t)=\langle\tilde{a}^+_{2x}(t)\Omega\,,\ T\exp(-i\int_0^t h'_x(t')dt')\,\tilde{a}^+_{1x}(0)\,\Omega\rangle\,, \qquad (8)$$

где T – хронологический оператор, $h'_x(t')$ – гамильтониан (2'') в представлении взаимодействия, $\tilde{a}^+_{2x}(t) = exp(i\omega_0 t)\, \tilde{a}^+_{2x}(0)$.

В первом порядке теории возмущений

$$A^{(1)}_{T.B.}(t) = -i < \tilde{a}^+_{2x}(t)\Omega\, ,\, \int_0^t dt' h'(t')\tilde{a}^+_{1x}\Omega > . \qquad (9)$$

Подставив (2'') в (9), учитывая затем перестановочные соотношения для операторов рождения–уничтожения фононов и фотонов, а также свойства вакуума, получаем окончательно:

$$A^{(1)}_{T.B.}(t) = -i\, t\, e^{-i\omega_0 t} E = -i\, t\, e^{-i\omega_0 t} \omega_0 \epsilon\, . \qquad (10)$$

При больших R (см.(А.5) в приложении А)

$$A^{(1)}_{T.B.}(t) \approx -i\, t \frac{8\, e^2}{\pi\, m\, \omega_0^2\, R^4} e^{-i\omega_0 t}\, . \qquad (11)$$

Закон сохранения, действующий в данной модели (см. § 1), допускает только один вид промежуточных состояний – $\tilde{a}^+_{bx}(k)\Omega$ (один фотон с энергией k и квантовым числом $''b''$), поэтому (см., например, § 29 в книге Л.Шиффа[7])

$$A^{(2)}_{T.B.}(t) = \int_0^\infty dk \sum_{b=1}^{2} < \tilde{a}^+_{2x}(t)\,\Omega\, ,\, h'_x\, \hat{a}^+_{bx}(k)\,\Omega > < \tilde{a}^+_{bx}(k)\,\Omega\, ,\, h'_x\, \tilde{a}^+_{1x}(0)\,\Omega > \times$$

$$\times \frac{1}{k-\omega_0}\left[\, i\, t + \frac{e^{i(\omega_0 - k)t} - 1}{k - \omega_0}\right] = \qquad (12)$$

$$= e^{-i\omega_0 t} \int_0^\infty d\nu\, (\vec{E}_1(\nu)\vec{E}_2(\nu)) \frac{e^{i(\omega_0-\nu)t} - 1 - i\, t(\omega_0 - \nu)}{(\omega_0 - \nu)^2}\, .$$

$(\vec{\tilde{E}}_1(\nu), \vec{\tilde{E}}_2(\nu))$ определяется с помощью (3), (4) и (Б.21). Учитывая, что во втором приближении теории возмущений в $E^b_i(\nu)$ ω_i можно заменить на ω_0, т.к. учёт их отличия от ω_0, характеризующегося величиной ϵ, выходит за рамки приближения, а ω_0, в свою очередь, можно заменить на κ по той же причине (см. (24) в /5/), получаем:

$$(\vec{\tilde{E}}_1(\nu)\,\vec{\tilde{E}}_2(\nu)) = \frac{2e^2\kappa}{\pi m}\cdot\frac{\nu^3 g^2(\nu)}{(\nu+\kappa)^2}\left\{\frac{\sin\nu R}{\nu R}+\frac{\cos\nu R}{(\nu R)^2}-\frac{\sin\nu R}{(\nu R)^3}\right\}. \qquad (13)$$

Интеграл в (12) можно вычислить аналитически, сведя его к табличным интегралам. Получается очень громоздкая формула, содержащая, кроме элементарных функций, интегральные синус, косинус и интегральную показательную функцию. Значения $|A_{T.B.}(t)| = |A^{(1)}_{T.B.}(t) + A^{(2)}_{T.B.}(t)|$ для ранее выбранных значений ω_0, μ^2 и R при различных t вычислялись по этой формуле с помощью ЭВМ. Для контроля результатов интеграл в (12) был взят численно для тех же значений таким же способом, как и (5). Результаты обоих способов интегрирования совпали. Полученные $|A_{T.B.}(t)|$ приведены в таблице 1, ошибка вычислений составляет $\approx \pm 10^{-10}$.

Сравнивая результаты вычислений, проведенных в рамках второго приближения теории возмущений, с точным решением (см. табл.1), видим, что до $t = 18\lambda$ в пределах точности вычислений результаты совпадают, а при $18\lambda \leqslant t \leqslant 30\lambda$ отличие составляет 1% и меньше. Далее отличие растёт со временем, достигая 10% при $t = 150\lambda$. По теории возмущений $|A(t)|$ растёт линейно, точное решение растет медленнее, обнаруживая "затухание".

Заключаем, что $A_{T.B.}(t)$ достаточно хорошо представляет точную амплитуду $A(t)$ в области значений t до R и около R, которые и представляют для нас особый интерес. Оказывается, что для

Таблица 1.

$t\omega_0$	$\lvert A(t)\rvert$	$\lvert A_{т.в.}(t)\rvert$	$\lvert \bar{A}_{т.в.}(t)\rvert$
0	$1{,}8\cdot 10^{-10}$	0	0
2	$1{,}9\cdot 10^{-8}$	$1{,}921\cdot 10^{-8}$	$1{,}210\cdot 10^{-7}$
4	$2{,}2\cdot 10^{-8}$	$2{,}208\cdot 10^{-8}$	$6{,}032\cdot 10^{-8}$
6	$0{,}6\cdot 10^{-8}$	$0{,}596\cdot 10^{-8}$	$3{,}130\cdot 10^{-7}$
8	$2{,}4\cdot 10^{-8}$	$2{,}479\cdot 10^{-8}$	$1{,}872\cdot 10^{-7}$
10	$4{,}0\cdot 10^{-8}$	$3{,}988\cdot 10^{-8}$	$3{,}677\cdot 10^{-7}$
12	$4{,}0\cdot 10^{-8}$	$3{,}969\cdot 10^{-8}$	$7{,}594\cdot 10^{-7}$
14	$9{,}0\cdot 10^{-8}$	$9{,}053\cdot 10^{-8}$	$2{,}457\cdot 10^{-7}$
16	$2{,}28\cdot 10^{-7}$	$2{,}277\cdot 10^{-7}$	$1{,}161\cdot 10^{-6}$
18	$7{,}78\cdot 10^{-7}$	$7{,}765\cdot 10^{-7}$	$2{,}471\cdot 10^{-6}$
20	$8{,}613\cdot 10^{-6}$	$8{,}612\cdot 10^{-6}$	$6{,}107\cdot 10^{-6}$
22	$3{,}719\cdot 10^{-5}$	$3{,}723\cdot 10^{-6}$	$3{,}297\cdot 10^{-5}$
24	$6{,}823\cdot 10^{-5}$	$6{,}836\cdot 10^{-5}$	$6{,}712\cdot 10^{-5}$
26	$1{,}009\cdot 10^{-4}$	$1{,}011\cdot 10^{-4}$	$1{,}007\cdot 10^{-4}$
28	$1{,}337\cdot 10^{-4}$	$1{,}341\cdot 10^{-4}$	$1{,}331\cdot 10^{-4}$
30	$1{,}665\cdot 10^{-4}$	$1{,}670\cdot 10^{-4}$	$1{,}665\cdot 10^{-4}$
200	$2{,}853\cdot 10^{-3}$	$2{,}983\cdot 10^{-3}$	
450	$6{,}472\cdot 10^{-3}$	$7{,}125\cdot 10^{-3}$	

$A_{т.в.}(t)$ мы можем получить приближенное выражение при $R \gg \lambda$ (т.е. когда "атомы" достаточно далеки друг от друга) и при таких t, когда $1 \ll |R-t|/\lambda \ll R/\lambda$, а также $(|R-t|/\lambda)^3 \ll (R/\lambda)^2$.

Используя асимптотические разложения интегральных синусов и косинусов и интегральной показательной функции, можно получить для $A_{т.в.}(t)$:

$$A_{т.в.}(t) \approx \begin{cases} -\dfrac{2e^2}{\pi m R}\cdot\dfrac{1}{\kappa^3(t-R)^3}, & t<R;\ 1\ll|R-t|/\lambda\ll R/\lambda,\ (|R-t|/\lambda)^3\ll(R/\lambda)^2 \\ i\,\dfrac{e^2}{2mR}\cdot\dfrac{\mu^2}{\mu^2+\kappa^2}\,e^{i(R-t)\kappa}\,\kappa(t-R), & t>R;\ (R/\lambda)\gg 1. \end{cases} \tag{14}$$

В (14) выписаны только самые главные члены в каждой области значений t ; μ – параметр обрезания.

Опишем способ приближенного интегрирования, который сразу приводит к формуле (14). Прежде всего заменяем в (13) $\sin \nu R$ и $\cos \nu R$ их представлениями через экспоненты:

$$A^{(2)}_{\text{Т.В.}}(t) = \frac{e^2 \kappa e^{-i\kappa t}}{\pi m} \int dz \, \frac{z^3 g^2(z)}{(z+\kappa)^2} \cdot \frac{e^{i(\kappa - z)t} - 1 - it(\kappa - z)}{(\kappa - z)^2} \times$$

$$\times \left\{ e^{iRz} \left[-i + \frac{1}{zR} + \frac{i}{(zR)^2} \right] + e^{-iRz} \left[i + \frac{1}{zR} - \frac{i}{(zR)^2} \right] \right\}. \tag{15}$$

Исходный контур интегрирования – действительная полуось $(0, \infty)$. Будем рассматривать подинтегральную функцию в (15) как сумму четырех членов, содержащих $\exp iRz$, $\exp(-iRz)$, $\exp(-i(R+t)z)$ и $\exp i(R-t)z$. Тогда интеграл по $(0,\infty)$ можно свести к интегралам по лучам C' (для членов, содержащих $\exp iRz$ и $\exp i(R-t)z$, когда $t<R$) и C'' (для членов с $\exp(-iRz)$, $\exp(-i(R+t)z)$ и $\exp i(R-t)z$ при $t>R$), см. рис. 1, т.к.

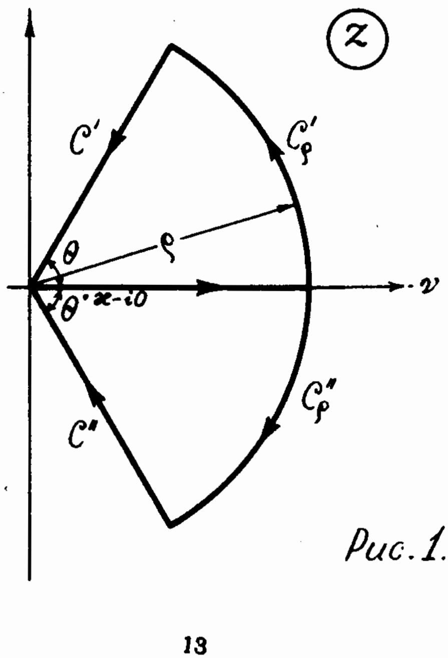

Рис. 1.

на дугах C'_ρ и C''_ρ большого радиуса ρ каждый рассматриваемый член стремится к нулю при $\rho \to \infty$. У подинтегральной функции в (15) нет полюса в точке $z = \kappa$, но у каждого ее слагаемого, рассматриваемого отдельно, в $z = \kappa$ – полюс второго порядка. Поэтому, чтобы иметь возможность интегрировать по $(0, \infty)$ в каждом слагаемом, мы смещаем этот полюс в нижнюю полуплоскость, заменяя в (15) в знаменателе $\kappa - z$ на $\kappa - i\eta - z$. Получаем таким образом $A^{(2)}_{T.B.}(\eta)$, причём, конечно, $\lim_{\eta \to 0} A^{(2)}_{T.B.}(\eta) = A^{(2)}_{T.B.}$ На C' и C'' соответствующие экспоненты будут быстро затухающими функциями, поэтому при условии, что $\kappa R \gg 1$ и $\kappa |R - t| \gg 1$, основной вклад в интегралы будут вносить только те z, модуль которых $|z| \ll \kappa$. Это позволяет значительно упростить подинтегральное выражение в (15), в частности, заменить множитель $g^2(z)/(\kappa - z)^2 (\kappa + z)^2$ на $1/\kappa^4$, после чего все интегралы оказываются уже табличными. После недолгих вычислений получаем (14).

Обсудим полученные результаты. Сам по себе результат численного счёта для одного конкретного значения R, проведенный в §1, еще ни о чём не говорит. Дело в том, что при введении физических операторов были сделаны два приближения: во-первых, в разложении кулоновского взаимодействия по степеням $1/R$ не учитывались члены, пропорциональные R^{-4} и еще меньшие и, во-вторых, в качестве выражений для $E^b_1(\nu)$ и $E^b_2(\nu)$ брались их нулевые приближения, наинизшие по e^2. Отброшенные члены тоже дают вклад в амплитуду передачи возбуждения, поэтому надо еще убедиться, что вычисленная амплитуда $A(t)$ много больше возможных поправок за счёт отброшенных членов.

1. Вклад в $A(t)$ от неучтенных членов в разложении кулоновского взаимодействия может быть оценен по теории возмущений. Оказалось, что вклад от первого неучтенного члена (пропорционального R^{-4}) вообще нулевой, а от следующего составляет $i \dfrac{27 e^2}{16 \kappa^2 m^2} \cdot \dfrac{t}{R^5}$. Сравнивая последнюю величину с тем, что дает (14), убеждаемся, что наибольший

вклад от неучтенных членов в разложении кулоновского взаимодействия значительно меньше, чем вычисленная амплитуда, когда t близко к R.

2. Из таблицы 1 следует, что эффект пропорционален e^2. Если мы в (12) учтем члены следующего приближения к $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, которые в e^2 раз меньше членов нулевого приближения, то получим поправку к $A(t)$ порядка e^4.

Таким образом, из изложенного следует, что полная вероятность $w(t)$ найти второй электрон в возбужденном состоянии до момента $t=R/c$ не равна нулю.

В связи с последним утверждением обсудим такое возражение: не является ли полученный непричинный эффект следствием "перекрывания" волновых функций электронов[x/] и введения обрезания $g^2(\omega)$? Оценим эффект, который можно ожидать от этих причин. Наши электроны локализованы осцилляторными потенциалами около точек $(+\vec{d})$ и $(-\vec{d})$ в областях размером $\ell \approx 1/\sqrt{m\kappa}$. Поскольку $R \gg \lambda = 1/\kappa$, то тем более $R \gg \ell$. Вне этих областей волновые функции электронов спадают экспоненциально. Поэтому, если бы наблюдаемый непричинный эффект обусловливался только перекрыванием волновых функций электронов, то при увеличении расстояния R между ямами вдвое, $A(t)$ уменьшалось бы не в ≈ 2 раза, как это дает формула (14) для t, близких к R, а в $(e^{(2R)^2/2\ell^2}/e^{R^2/2\ell^2})$ раз. Для рассматриваемого случая $R = 20\lambda$ это отношение равно $e^{5\cdot 1600}/e^{5\cdot 400} = e^{6000}$!

Введенное обрезание $g^2(\omega)=\mu^2/(\mu^2+\omega^2)$ с параметром $\mu=\sqrt{m\kappa}$ размазывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем по об-

---

[x/] Заметим, что вид гамильтониана (1) отражает тот факт, что осцилляторный потенциал первого электрона не действует на второй, и наоборот.

ласти такого же микроскопического размера ℓ [x/].

§3. Теория возмущений. "Голые" операторы.

Сравним результаты, полученные нами в формализме физических состояний, с результатами обычного формализма, использующего "голые" состояния.

Если гамильтониан модели выразить через так называемые "голые" операторы, см. (14) в работе [5], то получим такой гамильтониан взаимодействия:

$$
\begin{aligned}
h'_r = {} & \frac{S_r}{2\kappa}\left(-a_{1r}\, a_{2r} - a^+_{1r} a^+_{2r} + a_{1r}\, a^+_{2r} + a^+_{1r} a_{2r}\right) + \\
& + \frac{\sqrt{\kappa}}{2}\int_0^\infty dk \sum_{a=1}^{2} \{ \epsilon^r_{1a}(k)[a_{1r} a_{ar}(k) + a^+_{1r} a^+_{ar}(k) + a_{1r} a^+_{ar}(k) + a^+_{1r} a_{ar}(k)] + \\
& + \epsilon^r_{2a}(k)[a_{2r} a_{ar}(k) + a^+_{2r} a^+_{ar}(k) + a_{2r} a^+_{ar}(k) + a^+_{2r} a_{ar}(k)]\} + \\
& + \frac{1}{2}\int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' \sum_{a=1}^{2} \epsilon^r_{1a}(k)\, \epsilon^r_{1a}(k')[a_{ar}(k) a_{ar}(k') + a^+_{ar}(k) a^+_{ar}(k') + a_{ar}(k) a^+_{ar}(k') + a^+_{ar}(k) a_{ar}(k')],
\end{aligned}
\tag{16}
$$

[x/] Стоит, впрочем, отметить, что в нашей модели непричинные члены описанного происхождения вообще не могут появиться при самом точном решении. В силу дипольного приближения фотоны рождаются и уничтожаются в точках $(\pm\vec{d})$, а не в точках, где находятся электроны (или в областях около точек, где находятся электроны, из-за введения в теорию обрезающего формфактора). Можно сказать, что дипольное приближение делает теорию рассматриваемой модели более локальной, чем настоящая электродинамика.

где

$$S_r = \begin{cases} e^2/R^3 m\,, & r=x,\,y\,; \\ -2e^2/R^3 m\,, & r=z\,. \end{cases} \tag{17}$$

$$\epsilon^r_{1a}(k) = \begin{cases} -e\sqrt{\frac{k}{m}}\,g(k)\,f_{a1}(k,\frac{R}{2}), & r=x,y\,; \\ -e\sqrt{\frac{k}{m}}\,g(k)\,f_{a0}(k,\frac{R}{2}), & r=z\,. \end{cases} \tag{18}$$

$$\epsilon^r_{2a}(k) = (-1)^{a+1}\,\epsilon^r_{1a}(k)\,. \tag{19}$$

Функции $f_{a1}(k,\frac{R}{2})$ и $f_{a2}(k,\frac{R}{2})$ см. в приложении Б.

Теперь начальное состояние рассматриваемой задачи будет описываться вектором $a^+_{1x}\Omega_0$, в конечное - вектором $a^+_{2x}\Omega_0$, где Ω_0 - собственное состояние свободного гамильтониана с наинизшей энергией. Повторяя вычисления, аналогичные тем, которые были проведены ранее в формализме физических операторов, находим, что

$$\bar{A}^{(1)}_{T.B.}(t) = -it\langle a^+_{2x}(t)\Omega_0\,,\,h'_x a^+_{1x}(0)\Omega_0\rangle = -i\frac{S_x}{2\kappa}e^{-i\kappa t}\,. \tag{20}$$

(Здесь и в дальнейшем черта над амплитудой $A_{T.B}(t)$ означает, что теория возмущений рассматривается в формализме "голых" состояний).

Во втором порядке теории возмущений теперь возможны два типа промежуточных состояний: $a^+_{ax}(k)\Omega_0$ и $a^+_{1x}a^+_{2x}a^+_{ax}(k)\Omega_0$, поэтому

$$\bar{A}^{(2)}_{T.B.}(t) = \frac{\kappa e^{-i\kappa t}}{4}\int_0^\infty dk\,(\vec{\epsilon}^{\,x}_1(k)\vec{\epsilon}^{\,x}_2(k))\Big\{\frac{1}{k-\kappa}\Big[it + \frac{e^{i(\kappa-k)t}-1}{k-\kappa}\Big] + \frac{1}{k+\kappa}\Big[it + \frac{e^{i(\kappa+k)t}-1}{k+\kappa}\Big]\Big\}, \tag{21}$$

где (см. (18), (19) и (Б.21,22)):

$$(\vec{\epsilon}_1^{\,x}(k)\vec{\epsilon}_2^{\,x}(k)) = \frac{2e^2}{\pi m}\, g^2(k)\left\{ \frac{\sin kR}{kR} + \frac{\cos kR}{(kR)^2} - \frac{\sin kR}{(kR)^3} \right\}. \qquad (22)$$

Интеграл (21) считался численно на ЭВМ БЭСМ-6 таким же способом, как (5) и (12), для того же случая $R = 20\lambda$, $\kappa = m/10$ и $g^2(k) = \mu^2/(\mu^2 + k^2)$, где $\mu^2 = 10\kappa^2$. Результаты приведены в последней колонке таблицы 1 (ошибка вычислений $|\bar{A}_{T.B.}(t)|$ такая же, как у $|A_{T.B.}(t)|$). Сразу бросается в глаза, что непричинный эффект в формализме "голых" состояний в несколько раз, иногда на целый порядок, больше, чем при описании с помощью физических состояний. Более детально об этом свидетельствует асимптотическое приближение для $\bar{A}_{T.B.}(t)$:

$$\bar{A}_{T.B.}(t) \approx \begin{cases} \dfrac{e^2}{2\pi m R}\cos\kappa t\, e^{-i\kappa t}\,\dfrac{1}{\kappa(R-t)}, & t < R;\ \lambda \ll |R-t| \ll R. \\[2ex] i\,\dfrac{e^2}{2m R}\cdot\dfrac{\mu^2}{\mu^2+\kappa^2}\, e^{i(R-t)\kappa}\quad \kappa(t-R), & t > R;\quad R \gg \lambda. \end{cases} \qquad (23)$$

Сравнивая (23) и (14), видим, что в области $t > R$ выписанные самые главные члены у $\bar{A}_{T.B.}(t)$ и $A_{T.B.}(t)$ одинаковы (см. также табл.1), в области $t < R$ имеется существенное различие. В "голом" формализме непричинная часть амплитуды пропорциональна $(R-t)^{-1}$, а в физическом – $(R-t)^{-3}$.

§4. Исследование зависимости точного решения от e^2 и R.

В приложении А показано, что ϵ – величина порядка e^2/R^4. Такими величинами мы пренебрегали, когда выписывали $A(t)$ в форме (14), годной при $R > 1000\lambda$ (в частности, мы пренебрегаем $A^{(1)}_{T.B.}(t) \sim \epsilon$).

Хотя (14) не годится для $R = 20\lambda$, но все же можно ожидать, что при t, близких к R, учёт ϵ не будет качественно изменять поведение $w(t)$. Поскольку численный расчёт в предположении $\epsilon = 0$ проще, то при исследовании зависимости $A(t)$ от e^2 и R это будем предполагать. В этом случае $\Gamma_1 = \Gamma + \gamma$ и $\Gamma_2 = \Gamma - \gamma$, где

$$\Gamma(\omega) = \frac{4e^2\omega_0}{3m} \cdot \frac{\omega^3 g^2(\omega)}{(\omega+\omega_0)^2}, \tag{24}$$

$$\gamma(\omega) = \frac{3}{2}\Gamma(\omega)\left\{\frac{\sin\omega R}{\omega R} + \frac{\cos\omega R}{(\omega R)^2} - \frac{\sin\omega R}{(\omega R)^3}\right\}, \tag{25}$$

соответственно, $\mu_1 = \Lambda + \lambda$, а $\mu_2 = \Lambda - \lambda$, где

$$\Lambda(\omega) = \frac{1}{\pi} P\int_0^\infty d\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\nu - \omega}, \quad \lambda(\omega) = \frac{1}{\pi} P\int_0^\infty d\nu \frac{\gamma(\nu)}{\nu-\omega}, \tag{26}$$

и (5) приобретает вид ($A(t)$ при $\epsilon = 0$ будем обозначать через $A_0(t)$):

$$A_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\omega\, e^{-i\omega t} \frac{\gamma[\Gamma^2+\gamma^2+\lambda^2+(\omega-\omega_0+\Lambda)^2] - 2\Gamma[\Gamma\gamma+\lambda(\omega-\omega_0+\Lambda)]}{[\Gamma^2+\gamma^2+\lambda^2+(\omega-\omega_0+\Lambda)^2]^2 - 4[\Gamma\gamma+\lambda(\omega-\omega_0+\Lambda)]^2}. \tag{27}$$

Интеграл (27) считался численно по методу Гаусса (процесс интегрирования такой же, как при вычислении (5) в §1[x/]). Результаты для $|A_0(t)|$ приведены в таблице 2; в ее третьей колонке для сравнения даны $|A^{(2)}_{T.B.}(t)|$, т.е. $A_{T.B.}(t)$ без члена $A^{(1)}_{T.B.}(t) \sim \epsilon$. Ошибка вычислений $|A_0(t)|$ составляет $\pm 3.10^{-11}$.

---

x/ А.И.Широковой (ЛВТА ОИЯИ) был проведен независимый расчёт интеграла (27), давший те же результаты в пределах ошибок вычислений. Пользуюсь случаем поблагодарить А.И.Широкову за эти многочисленные расчёты.

Таблица 2.

$t\omega_0$	$\lvert A_0(t)\rvert$	$\lvert A^{(2)}_{т.в.}(t)\rvert$
0	$0{,}9\cdot10^{-11}$	0
2	$1{,}99\cdot10^{-8}$	$1{,}996\cdot10^{-8}$
4	$5{,}82\cdot10^{-8}$	$5{,}816\cdot10^{-8}$
6	$7{,}18\cdot10^{-8}$	$7{,}181\cdot10^{-8}$
8	$7{,}05\cdot10^{-8}$	$7{,}072\cdot10^{-8}$
10	$1{,}331\cdot10^{-7}$	$1{,}335\cdot10^{-7}$
12	$1{,}636\cdot10^{-7}$	$1{,}634\cdot10^{-7}$
14	$0{,}660\cdot10^{-7}$	$0{,}663\cdot10^{-7}$
16	$3{,}237\cdot10^{-7}$	$3{,}263\cdot10^{-7}$
18	$9{,}422\cdot10^{-7}$	$9{,}397\cdot10^{-7}$
20	$8{,}508\cdot10^{-6}$	$8{,}497\cdot10^{-6}$
22	$3{,}719\cdot10^{-6}$	$3{,}723\cdot10^{-5}$
24	$6{,}828\cdot10^{-5}$	$6{,}841\cdot10^{-5}$
26	$1{,}009\cdot10^{-4}$	$1{,}012\cdot10^{-4}$
28	$1{,}338\cdot10^{-4}$	$1{,}342\cdot10^{-4}$
30	$1{,}666\cdot10^{-4}$	$1{,}671\cdot10^{-4}$

Сравнивая вторую колонку таблицы 2 со второй колонкой таблицы 1, видим, что при $t > 16\lambda$ учёт ϵ не меняет качественно картины, как и ожидалось. Далее, величина $A^{(2)}_{Т.В.}(t)$ достаточно хорошо передает (27).

Как уже упоминалось, при наличии в модели двух приближений (см. §2) необходимо показать, что вычисленная амплитуда действительно представляет основную, главную часть амплитуды передачи возбуждения. В §2 это было сделано с помощью формул теории возмущений для асимптотического случая, когда $R \gg \lambda$, $1 \ll |R-t|/\lambda \ll R/\lambda$ $(|R-t|/\lambda)^3 \ll (R/\lambda)^2$. Однако можно вовсе не обращаться к теории возмущений и не ограничиваться асимптотическим приближением, а получить представление о зависимости точного решения $|A_0(t)|$ от R и от $e^2 = \alpha$ чисто численным методом. С этой целью кроме $R = 20\lambda$ были проведены расчёты для $R = 40\lambda$ и $R = 200\lambda$ при $\alpha = 1/137$. Далее, при фиксированном $R = 20\lambda$

кроме случая $a = 1/137$ были рассмотрены случаи, когда $a = 1/2\cdot 137$ и $a = 2/137$. Результаты приведены в таблицах 3 и 4 (в выписанных числах таблиц не верна последняя цифра).

Таблица 3.

$t\omega_0$	$\lvert A_0(t)\rvert$		
	$R = 20\lambda$	$R = 40\lambda$	$R = 200\lambda$
$R-10\lambda$	$1,331\cdot 10^{-7}$	$3,3\cdot 10^{-8}$	$1,9\cdot 10^{-9}$
$R-5\lambda$	$1,372\cdot 10^{-7}$	—	$1,15\cdot 10^{-8}$
R	$8,5082\cdot 10^{-6}$	$4,201\cdot 10^{-6}$	$8,340\cdot 10^{-7}$
$R+5\lambda$	$8,45342\cdot 10^{-5}$	—	$8,3827\cdot 10^{-6}$
$R+10\lambda$	$1,665842\cdot 10^{-4}$	$8,3089\cdot 10^{-5}$	$1,65948\cdot 10^{-5}$

Таблица 4.

$t\omega_0$	$\lvert A_{1/137}(t)\rvert$	$\lvert A_{2/137}(t)\rvert$	$\frac{\lvert A_{2/137}\rvert}{\lvert A_{1/137}\rvert}$	$\lvert A_{1/2\cdot 137}(t)\rvert$	$\frac{\lvert A_{1/137}\rvert}{\lvert A_{1/2\cdot 137}\rvert}$
5	$7,01\cdot 10^{-8}$	$1,403\cdot 10^{-7}$	2,00	$3,49\cdot 10^{-8}$	2,01
10	$1,331\cdot 10^{-7}$	$2,656\cdot 10^{-7}$	1,99	$6,63\cdot 10^{-8}$	2,01
15	$1,372\cdot 10^{-7}$	$2,699\cdot 10^{-7}$	1,97	$6,81\cdot 10^{-8}$	2,01
20	$8,5082\cdot 10^{-6}$	$1,70263\cdot 10^{-5}$	2,001	$4,2540\cdot 10^{-6}$	2,000
25	$8,45342\cdot 10^{-5}$	$1,686928\cdot 10^{-4}$	1,9955	$4,23153\cdot 10^{-5}$	1,9977
30	$1,665842\cdot 10^{-4}$	$3,320410\cdot 10^{-4}$	1,9932	$8,34347\cdot 10^{-5}$	1,9965

Теперь, располагая данными таблиц 3 и 4, обсудим приближения модели.

1. Из таблицы 3 следует, что при t, близких к R, $\lvert A_0(t)\rvert$ убывает гораздо медленнее, чем вклад в амплитуду передачи возбуждения от неучтённых членов в кулоновском взаимодействии (он пропорционален t/R^5, см. §2).

2. Нулевые приближения к $\vec{E}_1^2$ и $\vec{E}_2^2$ пропорциональны e^2, а поправки к ним $\sim e^4$. Как следует из таблицы 4, $|A_0(t)|$ с большой точностью пропорционально e^2 для $t < R$ и близких к R. С этим фактом хорошо согласуются данные, приведенные в таблице 2: для $0 < t \leq 30\lambda$ результаты, полученные для $|A_0(t)|$ по теории возмущений в рамках ее второго приближения, которое описывает эффекты второго порядка по e, совпадают с результатами точного решения.

Если бы величина $A_0(t)$ была сравнима с тем вкладом, который могут дать поправки к $\vec{E}_1^2$ и $\vec{E}_2^2$, то она не была бы пропорциональна e^2, но $\sim e^4$, например.

Таким образом, исследование точного решения в зависимости от e^2 и R подтверждает вывод, сделанный в §2 с помощью теории возмущений, что вычисленная величина $|A(t)|$ представляет основную, главную часть амплитуды передачи возбуждения от первого атома второму.

В заключение пользуюсь возможностью *bona fide* поблагодарить М.И.Широкова за постановку задачи, а также за внимание к работе и обсуждения.

Приложение А.

Вычисление ϵ.

В §2 работы /5/ для нормальных осцилляторных частот электронов ω_1 и ω_2 было получено:

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2\left[S + \int_0^\infty dk\ k \sum_{a=1}^{2} \xi_1^a(k)\,\xi_2^a(k) \right], \tag{A.1}$$

где

$$\xi_i^a(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\, a_i^a(k) - \epsilon_i^a(k), \quad i = 1,2;$$

$$a^a_{1,2}(k) = \frac{k\sqrt{k}}{2}\{[\frac{1}{k+\omega_1} + \frac{1}{k+\omega_2}]\epsilon^a_{1,2}(k) + \frac{\omega_2-\omega_1}{(k+\omega_1)(k+\omega_2)}\epsilon^a_{2,1}(k)\} \qquad (A.2)$$

S и $\epsilon^a_i(k)$ определены в формулах (17), (18) и (19).

Подставив (A.2) в (A.1), после алгебраических преобразований получаем:

$$(\omega_1-\omega_2)\cdot(1-\frac{1}{2\omega_0}\int_0^\infty dk\,\vec{\epsilon}_1^{\,2}(k)k^2\,[\frac{\omega_1}{(k+\omega_1)^2(k+\omega_2)}+\frac{\omega_2}{(k+\omega_2)^2(k+\omega_1)}]) =$$

$$= \frac{1}{\omega_0}(S+\frac{1}{2}\int_0^\infty dk\,(\vec{\epsilon}_1(k)\vec{\epsilon}_2(k))\,k\,[\frac{\omega_1^2}{(k+\omega_1)^2}+\frac{\omega_2^2}{(k+\omega_2)^2}]). \qquad (A.3)$$

В (A.3) $\omega_0=(\omega_1+\omega_2)/2$ (см. (38) в работе [5]).

Интеграл с $\vec{\epsilon}_1^{\,2}(k)$ в (A.3) может быть легко оценен, он оказывается $< \frac{2e^2}{3}\cdot\frac{\omega_0}{\mu} \ll 1$; пренебрегая им по сравнению с 1, имеем с достаточной точностью

$$\epsilon \equiv \frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_1+\omega_2} = \frac{1}{2\omega_0^2}[S+\int_0^\infty dk(\vec{\epsilon}_1(k)\vec{\epsilon}_2(k))k\{\frac{\omega_1^2}{(k+\omega_1)^2}+\frac{\omega_2^2}{(k+\omega_2)^2}\}]. \qquad (A.4)$$

Интеграл в (A.4) был вычислен точно путем сведения его к табличным. При $R \gg \lambda$ можно использовать известные асимптотические разложения для встречающихся в полученной формуле интегральных синусов, косинусов и интегральной показательной функции. Пренебрегая членами порядка $1/R^5$ и еще меньшими, получаем для случая $r = x$ или y ;

$$\epsilon \approx \frac{1}{2\omega_0^2}(S - \frac{e^2}{R^3 m} + \frac{16 e^2}{\pi m\omega_0 R^4}) = \frac{8e^2}{\pi m \omega_0^3 R^4}. \qquad (A.5)$$

Для проверки вычислений было проведено также приближенное интегрирование с заменой контура интегрирования с выходом на комплексную плоскость (такой способ интегрирования описан в §2). Для случая $r=z$ аналогичные вычисления дают результат, отличающийся от (А.5) только знаком.

Для случая $R=20\lambda$ ϵ было вычислено с помощью ЭВМ БЭСМ-6. Интеграл (А.4) в пределах от 0 до 30 считался по методу Гаусса (см. §1), а $\int_{30}^{\infty}$ был вычислен аналитически. В результате было получено, что для $R=20\lambda$ $\epsilon=1{,}119\cdot 10^{-8}$. Это число было проверено также по полученной точной формуле. Приближенная формула (А.5) дает $1{,}16\cdot 10^{-8}$.

Приложение Б.

Векторные двухточечные функции.

1. При построении модели /5/ оператор электромагнитного поля $\vec{A}(\vec{x})$ был разложен по полной системе векторных соленоидальных двухточечных функций $\vec{G}^{(\sigma)}_{\Lambda M}(k,\vec{x})$, построенных в работе /8/. Там же были приведены их значения в точках $(\pm\vec{d})=(\pm\vec{R}/2)$:

$$\vec{G}^{(+)}_{1,\pm 1}(\vec{d})=[(N_1^{1,m})^2+(N_1^{1,e})^2]^{1/2}[2N_1^{1,m}N_1^{1,e}]^{-1}\vec{\xi}_{\pm 1}=\vec{G}^{(+)}_{1,\pm 1}(-\vec{d}),$$

$$\vec{G}^{(+)}_{2,\pm 1}(\vec{d})=[(N_2^{1,m})^2+(N_2^{1,e})^2]^{1/2}[2N_2^{1,m}N_2^{1,e}]^{-1}\vec{\xi}_{\pm 1}=-\vec{G}^{(+)}_{2,\pm 1}(-\vec{d}),$$

$$\vec{G}^{(+)}_{1,0}(\vec{d})=[2N_1^{0,e}]^{-1}\vec{\xi}_0=\vec{G}^{(+)}_{1,0}(-\vec{d}),\tag{Б.1}$$

$$\vec{G}^{(+)}_{2,0}(\vec{d})=[2N_2^{0,e}]^{-1}\vec{\xi}_0=-\vec{G}^{(+)}_{2,0}(-\vec{d}).$$

Остальные функции $\vec{G}^{(\sigma)}_{\Lambda M}(k,\vec{x})$ равны нулю в этих точках. В формулах (Б.1)

$$[2N_1^{0,e}]^{-1} = \frac{1}{2kd\sqrt{\pi}}\{\sum_{L=1}^{\infty}{}' L(L+1)(2L+1)j_L^2(kd)\}^{1/2} \equiv \frac{1}{2kd\sqrt{\pi}}W_1(kd),$$

$$[2N_2^{0,e}]^{-1} = \frac{1}{2kd\sqrt{\pi}}\{\sum_{L=2}^{\infty}{}'' L(L+1)(2L+1)j_L^2(kd)\}^{1/2} \equiv \frac{1}{2kd\sqrt{\pi}}W_2(kd). \quad (Б.2)$$

$$[2N_1^{1,m}]^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\sum_{L=2}^{\infty}{}''(2L+1)j_L^2(kd)\}^{1/2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\{1+\frac{\sin 2kd}{2kd} - \frac{2\sin^2 kd}{(kd)^2}\} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}T_2(kd),$$

$$(Б.3)$$

$$[2N_2^{1,m}]^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\sum_{L=1}^{\infty}{}'(2L+1)j_L^2(kd)\}^{1/2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\{1-\frac{\sin 2kd}{2kd}\} \equiv \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}T_1(kd).$$

$$[2N_1^{1,e}]^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\sum_{L=1}^{\infty}{}'\frac{1}{2L+1}[(L+1)j_{L-1}(kd)-Lj_{L+1}(kd)]^2\}^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}S_1(kd),$$

$$(Б.4)$$

$$[2N_2^{1,e}]^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\{\sum_{L=2}^{\infty}{}''\frac{1}{2L+1}[(L+1)j_{L-1}(kd)-Lj_{L+1}(kd)]^2\}^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}S_2(kd).$$

Здесь $\sum_{L=1}^{\infty}{}'$ обозначает сумму по всем нечётным L, $\sum_{L=2}^{\infty}{}''$ – по всем чётным; $j_\mu(x) = J_{\mu+\frac{1}{2}}(x)/\sqrt{x}$, $J_{\mu+\frac{1}{2}}(x)$ – функция Бесселя. Суммы T_1 и T_2 были вычислены с помощью формулы (1) в п.5.51 гл. V в книге Ватсона /9/.

В этом приложении описаны вычисления сумм, фигурирующих в (Б.2) и (Б.4).

2. Вычисление сумм $W_1(x)$ и $W_2(x)$. Возьмем "формулы сложения" (6) и (7) в §3 п.6 в работе Н.Я.Виленкина /10/ и положим в них $n=4$, $k=m=j=1$ и $r_1=r_2=r=x$. Используя приведенную там же в п.1 формулу (2), получим следующие формулы:

$$\sum_{L=1}^{\infty}(-1)^{L-1}\,L(L+1)(2L+1)\,j_L^2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\,j_1(2x) \qquad \text{(Б.5)}$$

и

$$\sum_{L=1}^{\infty}L(L+1)(2L+1)\,j_L^2(x)=\frac{4x^2}{3\pi}\,. \qquad \text{(Б.6)}$$

При сложении (Б.5) и (Б.6) получаем:

$$W_1(x)=\frac{2x^2}{3\pi}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x\,j_1(2x)\,. \qquad \text{(Б.7)}$$

Соответственно, при вычитании (Б.5) из (Б.6):

$$W_2(x)=\frac{2x^2}{3\pi}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x\,j_1(2x)\,. \qquad \text{(Б.8)}$$

Для проверки формулы (Б.7) и (Б.8) были получены также другим способом, использующим известное разложение плоской волны, см., например, (6.5) в книге Роуза /11/.

3. Вычисление сумм $S_1(x)$ и $S_2(x)$.

Можно проверить, что

$$S_{1,2}(x)=\frac{1}{x^2}\left(W_{1,2}(x)+T_{1,2}(x)-U_{1,2}(x)+\frac{1}{x}V_{1,2}(x)\right), \qquad \text{(Б.9)}$$

где T и W – известные суммы,

$$U_{1,2}(x)=\sum_{L=1,2}^{\infty}{}'{,}''\,(2L+1)\,j_{L-1}(x)\,j_{L+1}(x)\,, \qquad \text{(Б.10)}$$

$$V_{1,2}(x)=\sum_{L=1,2}^{\infty}{}'{,}''\,(2L+1)\left\{\frac{L}{x}\,j_L(x)-j_{L+1}(x)\right\}j_L(x)\,. \qquad \text{(Б.11)}$$

$U_{1,2}(x)$ можно свести к известным суммам:

$$U_1(x)=\frac{1}{2x^2}\cdot(4W_1(x)+T_1(x)-T_2(x)-\frac{3}{2}j_0^2(x))$$

$$U_2(x)=\frac{1}{2x^2}(4W_2(x)+T_2(x)-T_1(x)+\frac{1}{2}j_1^2(x)). \qquad (\text{Б.12})$$

$V_{1,2}(x)$ вычисляются так же, как в п. 2 вычислялись $W_{1,2}(x)$, но при помощи "формулы сложения" (10), приведенной в работе /12/.

В результате получаем

$$S_1(x)=\frac{1}{\pi}\{\frac{1}{3}+\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{1}{2x^2}(2-\frac{\sin 2x}{2x}-\cos 2x)\}, \qquad (\text{Б.13})$$

$$S_2(x)=\frac{1}{\pi}\{\frac{1}{3}-\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{1}{2x^2}(\frac{\sin 2x}{2x}-\cos 2x)\}. \qquad (\text{Б.14})$$

(Б.13) и (Б.14) можно получить другим способом. Так, известно разложение Герцеля плоской волны по электрическим и магнитным мультиполям, см., например, (6.8) в книге Роуза /11/:

$$\vec{u}_p e^{i\vec{k}\vec{r}}=\pi\sum_{L=1}^{\infty}\sum_{M=-L}^{L} i^L\sqrt{2L+1}\; D^L_{Mp}(\phi,\theta,0)\{\vec{A}^{(m)}_{kLM}(\vec{r})+ip\vec{A}^{(e)}_{kLM}(\vec{r})\}, \qquad (\text{Б.15})$$

θ и ϕ – полярный и азимутальный углы вектора k.

Поэтому

$$e^{i\vec{k}2\vec{d}}=(\vec{u}_1 e^{i\vec{k}\vec{d}})(\vec{u}_{-1} e^{i\vec{k}\vec{d}})=$$

$$=\pi^2\sum_{L=1}^{\infty}\sum_{L'=1}^{\infty}\sum_{M=-L}^{L}\sum_{M'=-L'}^{L'} i^{L+L'}\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}\,D^L_{M1}(\phi,\theta,0)D^{L'}_{M',-1}(\phi,\theta,0)\times$$

$$\times(\vec{A}^{(m)}_{kLM}(\vec{d})+i\vec{A}^{(e)}_{kLM}(\vec{d}),\ \vec{A}^{(m)}_{kL'M'}(\vec{d})-i\vec{A}^{(e)}_{kL'M'}(\vec{d})),$$

где $\vec{d}=(0,0,d)$. Так как

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, D^{L}_{M1}(\phi,\theta,0)\, D^{L'}_{M',-1}(\phi,\theta,0)=(-1)^{1-M}\frac{4\pi}{2L+1}\delta_{LL'}\delta_{M,-M'} \tag{Б.17}$$

(см., например, §29, там же), то после интегрирования обеих частей (Б.16) по ϕ и θ, получаем:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{2i\vec{k}\vec{d}} = 4\pi^3 \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{M=-L}^{L} (-1)^{L-M+1} (\vec{A}^{(m)}_{kLM}(\vec{d})+i\vec{A}^{(e)}_{kLM}(\vec{d}), \vec{A}^{(m)}_{kL,-M}(\vec{d}) - \tag{Б.18}$$

$$-i\vec{A}^{(e)}_{kL,-M}(\vec{d}))$$

или

$$\frac{4}{\pi}\frac{\sin 2kd}{2kd} = \sum_{L=1}^{\infty} (-1)^{L} \{(2L+1) j_L^2(kd) - \frac{1}{(kd)^2} L(L+1)(2L+1) j_L^2(kd) -$$

$$-\frac{1}{2L+1}[(L+1) j_{L-1}(kd) - L j_L(kd)]^2 \} . \tag{Б.19}$$

При получении (Б.19) было учтено, что в точке $(\vec{d})$ отличны от нуля только мультиполи $\vec{A}^{(m)}_{kL,\pm 1}(\vec{d})$ и $\vec{A}^{(e)}_{kL\,0,\pm 1}(\vec{d})$, и был использован явный вид этих мультиполей, см. (3.5), (3.9) и (3.10) в работе /8/.

Аналогично, исходя из $(\vec{u}_1 e^{i\vec{k}\vec{d}})(\vec{u}_{-1} e^{-i\vec{k}\vec{d}})$, получаем, что

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{L=1}^{\infty} \{(2L+1) j_L^2(kd) + \frac{1}{(kd)^2} L(L+1)(2L+1) j_L^2(kd) +$$

$$+\frac{1}{2L+1}[(L+1) j_{L-1}(kd) - L j_L(kd)]^2 \} . \tag{Б.20}$$

Складывая (Б.19) и (Б.20) и вычитая одно из другого, заменяя при этом получающиеся ряды $W_{1,2}$ и $T_{1,2}$ их суммами, получаем S_1 и S_2 .

4. В заключение выпишем значения векторных двухточечных функций $\vec{G}^{(+)}_{\Lambda,\pm 1,0}(k,\vec{d})$, $\Lambda = 1,2$:

$$\vec{G}^{(+)}_{\Lambda,\pm 1}(k,\vec{d}) = \frac{1}{2\pi}\left\{ \frac{2}{3} \pm \left[\frac{\sin 2kd}{2kd} + \frac{\cos 2kd}{(2kd)^2} - \frac{\sin 2kd}{(2kd)^3} \right]\right\}^{1/2} \vec{\xi}_{\pm 1} \equiv \qquad \text{(Б.21)}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{6\pi}} f_{\Lambda 1}(k,d)\, \vec{\xi}_{\pm 1} \, ,$$

$$\vec{G}^{(+)}_{\Lambda,0}(k,\vec{d}) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left\{ \frac{1}{3} \pm \left[\frac{\sin 2kd}{(2kd)^3} - \frac{\cos 2kd}{(2kd)^2} \right]\right\}^{1/2} \vec{\xi}_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{6\pi}} f_{\Lambda 0}(k,d)\, \vec{\xi}_0 \, . \qquad \text{(Б.22)}$$

В (Б.22,21) верхний знак перед квадратной скобкой соответствует $\Lambda = 1$, а нижний $-\Lambda = 2$.

Литература

1. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ, Москва, 1956.
2. М.И.Широков. ЯФ, 4, 1077 (1966); Препринт ОИЯИ Р-1719, Дубна (1964).
3. B.Ferretti in "Old and New Problems in Elementary Particles", New-York, 1968, 108.
4. Г.Бартон. Дисперсионные методы в теории поля. Атомиздат. Москва, 1968.
5. И.А.Еганова, М.И.Широков. Препринт ОИЯИ Р2-4645, Дубна (1969).
6. М.И.Широков. Препринт ОИЯИ Р2-4410, Дубна (1969).
7. Л.Шифф. Квантовая механика. ИЛ, Москва (1959).
8. I.A.Jeganova, M.I.Shirokov. Annalen der Physik, 21, 225 (1968).
9. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций. ч.1. ИЛ, Москва (1949).

10. Н.Я.Виленкин. Труды Моск. матем. о-ва 12, 185 (1963).

11. М.Роуз. Поля мультиполей. ИЛ, Москва (1957).

12. B.Friedman and J.Russek. Quarterly of Applied Mathematics, 12, 13 (1954).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 февраля 1970 года.