ЯФ, 1970, т.12 №6, р. 1286-97

6/IV-70

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4931

Б.З. Копелиович

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1970

P2 - 4931

Б.З. Копелиович

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Направлено в ЯФ

Summary

The covariant expression of the polarization density matrix, or the projection operator, for the arbitrary integer (19) or halfinteger (36) spin is derived in an explicit form.

The covariant formalisms of Pauli-Firz/7/ and Rarita-Schwinger/2/ are used for describing higher fields.

The following notations and abbreviations are used: 1) instead of the density matrix averaged over polarization $\Lambda^{J}_{\mu_1 \dots \mu_J \nu_1 \dots \nu_J}$ we shall write simply $\Lambda^{J}_{\mu\nu}$. The same is taken for the polarization density matrix $P^{J}_{\mu\nu}$; 2) the symbol $\sum\limits_{\mu} p$ means summation over all permutations in the totality of indeces μ; 3) in those cases, when the index labels have no meaning (for instance, when we have symmetry over these indeces) they are dropped; 4) when some tensors of the same type are contained under the symbol $\sum\limits_{\mu p}$ the following abbreviation is introduced:

$$\sum_{\mu} p \; t_{\mu_1} \dots t_{\mu_n} = \sum_{\mu} p \; (t_{\mu})_n \; .$$

At first, we consider the density matrix $\Lambda^{J}_{\mu\nu}$, averaged over polarization, for the integer spin.

From relations (2) and (3) we obtain $\Lambda^{J}_{\mu\nu}$ in the form of eq.(10) or in the rest frame of the particle $\lambda^{J}_{\alpha\beta}$ in the form (11) ($\alpha, \beta = 1,2,3$).

The operator of spin J $s^{J}_{i,\alpha_1 \dots \alpha_J \beta_1 \dots \beta_J}$ (it is noted by $s^{J}_{i,\alpha\beta}$) in the rest frame is defined by expression (12). There are also introduced by (13) the irreducible spin-tensors $s^{J,n}_{i_1 \dots i_n, \alpha_1 \dots \alpha_J \beta_1 \dots \beta_J}$ of higher ranks (they are noted by $s^{J,n}_{i,\alpha\beta}$).

The density matrix $\rho^{J}_{\alpha\beta}$ for the mixing state in the rest frame of a particle has form (16) where the abbreviation $\omega^{J,n}_{i,\gamma\rho}$ is given in the text; the coefficients b^{J}_{n} are given by formulas (A.2) and (B.2) of appendices.

When we come back to the laboratory system, three-dimensional tensors $\overline{s^{J,n}_{i}}$ turn under the Lorentz transformation to the four-dimensional tensors $S^{J,n}_{\lambda}$, symmetrical and traceless above λ and also orthogonal to the particle momentum.

The components of $S^{J,n}_{\lambda}$ are related with $\overline{s^{J,n}_{i}}$ by (18).

The tensors $\omega^{J,n}_{i,\alpha\beta}$ are transformed into four-dimensional $\Omega^{J,n}_{\lambda,\sigma\delta}$ defined in the text.

So, the polarization density matrix $P^{J}_{\mu\nu}$ is of covariant form (19). It satisfies relation (21) but in the relative meaning.

From (27) and (24) we obtain a simple formula (32) which relate $\Lambda^{J+1/2}_{\mu\nu}$ with $\Lambda^{J+1}_{\mu\nu}$.

The half-integer spin $J+1/2$ operator is of the form (34).

The covariant polarization density matrix $P^{J+1/2}_{\mu\nu}$ satisfies the conditions, analogous to (22)-(30) and (37). It is connected with $P^{J+1}_{\mu\nu}$ by relation (36) in which all the tensors $S^{J+1,n}_{\lambda}$ are substituted by $S^{J+1/2,n}_{\lambda}$. It is clear that $S^{J+1,2J+2}_{\lambda}$ does not make any contribution to $P^{J+1/2}_{\mu\nu}$.

Введение

С тех пор, как Мишель и Вайтман[1] (подробнее см.[3]) в 1955 году получили ковариантную матрицу плотности или проекционный оператор для частиц со спином $1/2$, она широко применяется для вычисления поляризационных эффектов в процессах с участием электромагнитных или слабых взаимодействий[2,3,4].

Правила обращения с матрицей плотности просты и широко известны. Они подробно изложены в цитированной литературе. Метод матрицы плотности можно с одинаковым успехом применять как в двухчастичных, так и в многочастичных процессах. При высоких энергиях это особенно важно. Использование матрицы плотности позволяет вычислять спиновые корреляции.

В работе[5] рассматривался вопрос о ковариантной матрице плотности для произвольных спинов. Для описания частицы со спином J использовался так называемый $2J+1$ -компонентный формализм, введенный Вайнбергом[6]. Была описана общая структура матрицы плотности и изложен способ, по которому можно находить явное выражение матрицы плотности для каждого конкретного спина. Сложность применения этого метода растёт с увеличением спина. В работе получено явное выражение матрицы плотности для спинов $1/2$, 1 и $3/2$.

$2J + 1$ – компонентный формализм, используемый в [5], представляется менее удобным для вычислений и обладает рядом недостатков, отмеченных в [6], по сравнению с ковариантными формализмами Паули–Фирца [7] и Рариты–Швингера [8], которые используются в настоящей работе.

В данной работе получено явное выражение матрицы плотности в ковариантном виде для частиц с произвольным спином. Для построения матрицы плотности используются свойства, вытекающие из ее определения и из свойств волновой функции.

Результаты этой работы для случая матрицы плотности, усредненной по поляризации, для спина $3/2$ содержатся, например, в [9]. Нерелятивистская поляризационная матрица плотности для спина $3/2$ была получена в [10] и использована для расчёта угловых корреляций в распадах Ω^- –гиперона.

В первом параграфе данной работы получено ковариантное выражение для матрицы плотности частиц с целым спином.

Во втором параграфе получена матрица плотности для полуцелого спина. Она выражается простой формулой через матрицу плотности для целого спина. Написана также матрица плотности для античастиц. Указано, как находить средние значения спин-тензоров частицы в конечном состоянии по выражению для вероятности процесса. Перечислены свойства матрицы плотности, полезные для вычисления различных процессов.

§1. ЦЕЛЫЙ СПИН

1. Матрица плотности, усредненная по поляризациям

Волновая функция частицы с целым спином J в импульсном представлении может быть записана в виде тензора $V_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p, \lambda)$ ранга J [4]. Здесь p – вектор энергии-импульса частицы; λ – ее спиральность; $\mu = 0,1,2,3$.

Этот тензор симметричен и имеет нулевой след по любой паре индексов, а также удовлетворяет условиям 4-поперечности и ортогональности:

$$p_{\mu_1} V_{\mu_1 \cdots \mu_J} (p, \lambda) = 0 ,$$

$$V^*_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p, \lambda)\, V_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p, \lambda') = \delta_{\lambda \lambda'} .$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование.

В системе покоя частицы отлична от нуля только пространственная часть волновой функции $V_{a_1 \cdots a_J}$, где $a = 1,2,3.$

Матрица плотности для полностью поляризованного или чистого состояния определяется следующим образом:

$$P^{J,\lambda}_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = V_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p, \lambda)\, V^*_{\nu_1 \cdots \nu_J}(p, \lambda) .$$

Матрица плотности для полностью неполяризованного состояния есть результат усреднения по λ $P^{J,\lambda}_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J}$

$$\Lambda^J_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = \frac{1}{2J+1} \sum_{\lambda=-J}^{J} P^{J,\lambda}_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} .$$

Отсюда и из свойств волновых функций вытекают свойства $\Lambda^J_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J}$. Матрица плотности симметрична по совокупностям индексов μ и ν;

$$p_{\mu_1} \Lambda^J_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = p_{\nu_1} \Lambda^J_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = 0 , \qquad (1)$$

$$g_{\mu_1 \mu_2} \Lambda^J_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = g_{\nu_1 \nu_2} \Lambda^J_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = 0 , \qquad (2)$$

$$\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\mu_1\dots\mu_J} = 1 \quad , \tag{3}$$

$$\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\nu_1\dots\nu_J} = \Lambda^{J}_{\nu_1\dots\nu_J\mu_1\dots\mu_J} \quad , \tag{4}$$

$$\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\lambda_1\dots\lambda_J}\Lambda^{J}_{\lambda_1\dots\lambda_J\nu_1\dots\nu_J} = \frac{1}{2J+1}\,\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\nu_1\dots\nu_J} \; . \tag{5}$$

Как будет показано, условия (1) – (3) однозначно определяют вид $\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\,\nu_1\dots\nu_J}$, поэтому должно также выполняться соотношение:

$$g_{\mu_J\nu_J}\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\nu_1\dots\nu_J} = \Lambda^{J-1}_{\mu_1\dots\mu_J\nu_1\dots\nu_J} \; . \tag{6}$$

Прежде чем перейти к построению усредненной по поляризации матрицы плотности, следует договориться об обозначениях. Вместо $\Lambda^{J}_{\mu_1\dots\mu_J\nu_1\dots\nu_J}$ будем кратко писать $\Lambda^{J}_{\mu\nu}$. Аналогично будет записываться поляризационная матрица. Знак $\sum\limits_{\mu}{}_{p}$ означает суммирование по всем перестановкам индексов из совокупности μ (включая и те перестановки, относительно которых выражение симметрично). В тех случаях, когда номера индексов не играют никакой роли (например, когда по этим индексам имеется симметрия), индексы часто нумероваться не будут. Если какой-нибудь тензор повторяется под знаком $\sum\limits_{\mu}{}_{p}$, то будет использовано сокращение типа:

$$\sum_{\mu}{}_{p}\, t_{\mu_1}\dots t_{\mu_n} = \sum_{\mu}{}_{p}\,(t_{\mu})_n \; .$$

Рассмотрим теперь неполяризованное состояние частицы в её системе покоя. Согласно (1), в этом случае отлична от нуля только пространственная часть $\Lambda^{J}_{\mu\nu}$, которую обозначим $(-1)^J\,\lambda^{J}_{\alpha\beta}$. Множитель $(-1)^J$ введен для удобства. $\lambda^J_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям (2) и (3):

$$\delta_{\alpha_1\alpha_2}\lambda^J_{\alpha\beta} = \delta_{\beta_1\beta_2}\lambda^J_{\alpha\beta} = 0 , \qquad (7)$$

$$\lambda^J_{\alpha\alpha} = 1 , \qquad (8)$$

$\lambda^J_{\alpha\beta}$ инвариантна относительно пространственных поворотов, так что $\lambda^J_{\alpha\beta}$ можем строить только из $\delta_{\alpha\beta}$, $\delta_{\alpha\alpha}$ и $\delta_{\beta\beta}$. Если вернуться в лабораторную систему отсчёта, то $\delta_{\alpha\beta}$ перейдет в $-\rho_{\mu\nu} = -(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / m^2)$, где m – масса частицы. Таким образом, $\Lambda^J_{\mu\nu}$ следует строить из $\rho_{\mu\nu}$, $\rho_{\mu\mu}$ $\rho_{\nu\nu}$. Тем самым (1) выполняется автоматически.

В общем виде можем написать:

$$\Lambda^J_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{\frac{J}{2}+\frac{(-1)^J-1}{4}} a^J_k \sum_{\mu,\nu} P\ (\rho_{\mu\mu})_k\,(\rho_{\nu\nu})_k\,(\rho_{\mu\nu})_{J-2k}. \qquad (9)$$

Из (2) вытекает рекуррентное соотношение для a^J_k :

$$a^J_k = -\frac{(J-2k+2)(J-2k+1)}{2k(2J-2k+1)}\,a^J_{k-1}.$$

Отсюда получаем, что

$$a^J_k = \frac{(-1)^k}{2^k}\,\frac{J!\,(2J-2k-1)!!}{k!\,(J-2k)!\,(2J-1)!!}\,a^J_0$$

a^J_0 можно найти из (3) или (5)

$$a^J_0 = \frac{1}{(2J+1)(J!)^2}.$$

Таким образом,

$$\Lambda^J_{\mu\nu} = \frac{1}{J!(2J+1)!!} \sum_{k=0}^{\frac{J}{2}+\frac{(-1)^J-1}{4}} \frac{(-1)^k(2J-2k-1)!!}{2^k\, k!(J-2k)!} \sum_{\mu,\nu} p\, (\rho_{\mu\mu})_k (\rho_{\nu\nu})_k (\rho_{\mu\nu})_{J-2k} . \qquad (10)$$

В системе покоя частицы имеем:

$$\lambda^J_{\alpha\beta} = \frac{1}{J!(2J+1)!!} \sum_{k=0}^{\frac{J}{2}+\frac{(-1)^J-1}{4}} \frac{(-1)^k(2J-2k-1)!!}{2^k\, k!(J-2k)!} \sum_{\alpha,\beta} p\, (\delta_{\alpha\alpha})_k (\delta_{\beta\beta})_k (\delta_{\alpha\beta})_{J-2k} . \qquad (11)$$

2. Поляризационная матрица плотности

Сначала рассмотрим систему покоя частицы. Оператор спина $s^J_{i,\alpha_1\ldots\alpha_J\beta_1\ldots\beta_J}$ (или коротко $s^J_{i,\alpha\beta}$) определим так:

$$s^J_{i,\alpha\beta} = \frac{1}{J!(J-1)!} \sum_{\alpha,\beta} p \; -i\, e_{i\alpha\beta} (\delta_{\alpha\beta})_{J-1} . \qquad (12)$$

Смешанное состояние характеризуется средними значениями $2J$ неприводимых спин-тензоров /11/, которые мы построим из оператора спина (12). Спин-тензор ранга n определим следующим образом:

$$s^{J,n}_{i_1\ldots i_n,\alpha_1\ldots\alpha_J\beta_1\ldots\beta_J} = \frac{(2J-n)!}{(2J)!\,n!} \sum_i p \; s^J_{i_1,\alpha\gamma} s^J_{i_2,\gamma\rho} \ldots s^J_{i_n,\sigma\beta} + \qquad (13)$$

$$+ \text{ члены, содержащие } \delta_{ii} .$$

Не выписанные здесь явно члены таковы, что след $s^{J,n}_{i,\alpha\beta}$ по любой паре индексов i равен нулю. Кроме того, все они симметричны по i. Причина такого выбора коэффициента в (13) станет ясна позже. $s^{J,n}_{i_1\ldots i_n,\alpha_1\ldots\alpha_J\beta_1\ldots\beta_J}$ обозначим через $s^{J,n}_{i,\alpha\beta}$.

Покажем, что спин-тензоры $s^{J,n}_{i,\alpha\beta}$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$s^{J,n}_{i,\alpha\gamma}\; s^{J,k}_{i,\gamma\beta}\; \lambda^{J}_{\beta\alpha} = 0 \qquad (14)$$

при условии, что $n \neq k$. Это следует из того, что любой тензор $t_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_k}$, построенный из δ_{ii}, δ_{jj} δ_{ij}, симметричный по i и по j и имеющий нулевой след по любой паре i или j, тождественно равен нулю, если $n \neq k$.

Действительно, если $(-1)^{n-k} = -1$, то справедливость утверждения очевидна. Если же $(-1)^{n-k} = 1$, то записав тензор в виде

$$t_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_k} = \sum_{m=0}^{\frac{k}{2}+\frac{(-1)^k-1}{4}} d_m \sum_{ij} {}_p\, (\delta_{ii})_{\frac{n-k}{2}} (\delta_{jj})_m (\delta_{ii})_m (\delta_{ij})_{k-2m}$$

(пусть $n > k$), умножим его на $\delta_{i_1 i_2}$ и приравняем нулю. Тогда получим $d_m = 0$ для всех m.

Поляризационная матрица плотности $\rho^{J}_{\alpha\beta}$ в системе покоя частицы должна удовлетворять условиям (7), (8) и, кроме того, соотношению:

$$s^{J,n}_{i,\beta\alpha}\; \rho^{J}_{\alpha\beta} = \overline{s^{J,n}_{i_1 \dots i_n}} \;. \qquad (15)$$

Здесь $\overline{s^{J,n}_{i_1 \dots i_n}}$ -среднее значение спин-тензора ранга n в данном состоянии. $\overline{s^{J,n}_{i_1 \dots i_n}}$ имеет $2n+1$ независимую компоненту. Все $2J$ спин-тензоров имеют в сумме $4J\,(J+1)$ компонент, как и должно быть для поляризационной матрицы плотности.

В наиболее общем виде, удовлетворяющем (7), $\rho^{J}_{\alpha\beta}$ можно записать следующим образом:

$$\rho^{J}_{\alpha\beta} = \lambda^{J}_{\alpha\gamma} \left[\sum_{n=0}^{2J} b^{J}_{n} \overline{s^{J,n}_{i}} \, \omega^{J,n}_{i,\gamma\rho} \right] \lambda^{J}_{\rho\beta} . \tag{16}$$

Здесь введены обозначения: $\overline{s^{J,n}_{i_1 \dots i_n}} = \overline{s^{J,n}_{i}}$; $\omega^{J,n}_{i_1 \dots i_n, \alpha_1 \dots \alpha_J \beta_1 \dots \beta_J} = \omega^{J,n}_{i,\alpha\beta}$

$$\omega^{J,2k}_{i,\gamma\rho} = \sum_{i,\gamma,\rho} (\delta_{i\gamma})_k (\delta_{i\rho})_k (\delta_{\gamma\rho})_{J-k} ,$$

$$\omega^{J,2k+1}_{i,\gamma\rho} = \sum_{p} i \, e_{i\gamma\rho} (\delta_{i\gamma})_k (\delta_{i\rho})_k (\delta_{\gamma\rho})_{J-k-1} .$$

Коэффициенты b^{J}_{n} находятся из равенства (15) и даются формулами (A.2) и (B.2) приложений A и B.

Используя результаты, получаемые в приложении C, можно также записать $\rho^{J}_{\alpha\beta}$ в следующем виде:

$$\rho^{J}_{\alpha\beta} = \lambda^{J}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2J+1} \left[\sum_{n=1}^{2J} \frac{b^{J}_{n}}{c^{J}_{n}} \overline{s^{J,n}_{i}} \, s^{J,n}_{i,\alpha\gamma} \right] \lambda^{J}_{\gamma\beta} . \tag{17}$$

Коэффициенты c^{J}_{n} определены формулами (C.2) и (C.3). Выражение (17) более симметрично, но менее удобно в практическом отношении, чем (16).

Перейдем теперь в лабораторную систему отсчёта. Здесь средним значениям спин-тензоров $\overline{s^{J,n}_{i}}$ соответствуют 4-мерные тензоры $S^{J,n}_{\lambda}$, симметричные по индексам λ и имеющие нулевой след по любой их паре. В системе покоя пространственные компоненты $S^{J,n}_{\lambda}$ должны быть равны $\overline{s^{J,n}_{i}}$, а временная и смешанные компоненты – нулю. Отсюда следует, что

$$p_{\lambda_1} \quad S_{\lambda}^{J,n} = 0 \,, \qquad (S_{\lambda}^{J,n})^2 = (-1)^n (\overline{s_i^{J,n}})^2 \;.$$

Компоненты $S_{\lambda}^{J,n}$ связаны с $\overline{s_i^{J,n}}$ следующим соотношением

$$S^{J,n}_{i_1 \ldots i_k 0 \ldots 0} = \sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{\ell!\,(k-\ell)!} \sum_{p} \frac{\overline{s^{J,n}_{i_1 \ldots i_\ell \, l_1 \ldots l_{n-\ell}}}}{m^{n-\ell} (E+m)^{k-\ell}} \, p_{l_1} \ldots p_{l_{n-\ell}} \, p_{i_{\ell+1}} \ldots p_{i_k} \,. \qquad (18)$$

Тензоры $\omega^{J,n}_{i,\rho\gamma}$ в лабораторной системе отсчёта перейдут в 4-мерные тензоры $\Omega^{J,n}_{\lambda,\sigma\delta}$, имеющие вид

$$\Omega^{J,2k}_{\lambda,\sigma\delta} = \sum_{P_{\lambda,\sigma,\delta}} (\rho_{\lambda\sigma})_k \, (\rho_{\lambda\delta})_k \, (\rho_{\sigma\delta})_{J-k} \,,$$

$$\Omega^{J,2k+1}_{\lambda,\sigma\delta} = \sum_{P_{\lambda,\sigma,\delta}} i \, e_{\lambda\sigma\delta\nu} \frac{p_\nu}{m} (\rho_{\lambda\sigma})_k \, (\rho_{\lambda\delta})_k \, (\rho_{\sigma\delta})_{J-k-1}$$

Теперь можем записать поляризационную матрицу плотности в ковариантном виде:

$$P^J_{\mu\nu} = \Lambda^J_{\mu\sigma} \left[\sum_{n=0}^{2J} (-1)^n b^J_n \, S^{J,n}_{\lambda} \, \Omega^{J,n}_{\lambda,\sigma\delta} \right] \Lambda^J_{\delta\nu} \;. \qquad (19)$$

Посмотрим теперь, не существует ли для $P^J_{\mu\nu}$ соотношения, аналогичного условию (6) для $\Lambda^J_{\mu\nu}$. Для этого необходимо, чтобы в системе покоя частицы

$$s^{J-1,n}_{i,\beta a} (\rho^J_{a\beta} \, \delta_{a_J \beta_J}) = s^{J-1,n}_{i,\beta a} \, \rho^{J-1}_{a\beta} \qquad {}^{x/} \qquad (20)$$

---

x/ Это равенство чисто условное. Оно может выполняться лишь при $\overline{s_i^{J,n}} = \overline{s_i^{J-1,n}}$; в противном случае оно отражает лишь равенство коэффициентов при спин-тензорах.

Согласно (С.2) и (С.3), имеем:

$$s^{J-1,n}_{i,\beta a}\,\rho^{J-1}_{a\beta} = s^{J,n}_{i,\beta a}\,\rho^{J}_{a\beta} = c^{J}_{n}\,\omega^{J,n}_{i,\beta a}\,\rho^{J}_{a\beta} =$$

$$= J^2\,\frac{c^{J}_{n}}{c^{J-1}_{n}}\,s^{J-1,n}_{i,\beta a}\,(\rho^{J}_{a\beta}\,\delta_{a_J\beta_J}) = s^{J-1,n}_{i,\beta a}(\rho^{J}_{a\beta}\,\delta_{a_J\,\beta_J}).$$

Этим (20) доказано, и $P^{J}_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению

$$g_{\mu_J\,\nu_J}\,P^{J}_{\mu\nu} = P^{J-1}_{\mu\nu} \tag{21}$$

в том смысле, о котором говорилось выше.

Заметим, что это равенство есть следствие той нормировки, которая была выбрана для спин-тензоров (13).

Матрица плотности для решений, соответствующих отрицательной частоте, имеет вид

$$\tilde{\tilde{P}}^{J}_{\mu\nu} = (P^{J}_{\mu\nu})^* = P^{J}_{\nu\mu}\ .$$

§2. ПОЛУЦЕЛЫЙ СПИН

1. Матрица плотности, усредненная по поляризации

Рассмотрим частицу с полуцелым спином $J + 1/2$. Для её описания будем пользоваться формализмом Рариты-Швингера /6/, в котором волновая функция частицы в импульсном представлении является тензором ранга J, каждая компонента которого $U_{\mu_1\dots\mu_J}(p,\lambda)$ есть биспинор, подчиняющийся уравнению Дирака:

$$(\hat{p} - m)\,U_{\mu_1\dots\mu_J}(p,\lambda) = 0\ .$$

Здесь и далее спинорные индексы опускаются. Тензор симметричен и имеет нулевой след по любой паре индексов μ.

Кроме того он должен удовлетворять условию:

$$\gamma_{\mu_1} U_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p,\lambda) = 0 .$$

Из этого равенства и уравнения Дирака следует условие 4-поперечности:

$$p_{\mu_1} U_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p,\lambda) = 0.$$

Имеется также условие ортогональности:

$$\bar{U}_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p,\lambda)\, U_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p,\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

(при такой записи квадрат нормы волновой функции равен не $2E$, как принято, а E/m. Матрица плотности поэтому будет нормирована на 1).

Матрица плотности для чистого состояния по определению есть:

$$P^{J+\frac{1}{2},\lambda}_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = U_{\mu_1 \cdots \mu_J}(p,\lambda)\, \bar{U}_{\nu_1 \cdots \nu_J}(p,\lambda) .$$

Тогда матрица плотности, усредненная по поляризации, имеет вид:

$$\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = \frac{1}{2(J+1)} \sum_{\lambda=-J-\frac{1}{2}}^{J+\frac{1}{2}} P^{J+\frac{1}{2},\lambda}_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} .$$

Она симметрична по индексам μ и ν и удовлетворяет соотношениям:

$$(\hat{p}-m)\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}(\hat{p}-m) = 0 , \qquad (22)$$

$$p_{\mu_1} \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = p_{\nu_1} \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = 0 , \qquad (23)$$

$$\gamma_{\mu_1} \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} \gamma_{\nu_1} = 0 , \qquad (24)$$

$$g_{\mu_1\mu_2}\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = g_{\nu_1\nu_2}\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = 0\,, \tag{25}$$

$$Sp\ \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\mu} = 1\,, \tag{26}$$

$$Sp\ \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = \Lambda^{J}_{\mu\nu}\,, \tag{27}$$

$$g_{\mu_J\nu_J}\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = \Lambda^{J-\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\,, \tag{28}$$

$$\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\lambda}\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2(J+1)}\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\,, \tag{29}$$

$$\gamma_0\left(\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\right)^{+}\gamma_0 = \Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\nu\mu}. \tag{30}$$

Знаки взятия следа в (26) и (27) и эрмитова сопряжения действуют только на спинорные индексы. Это относится и к дальнейшему.

Из (22) следует, что имеет место равенство:

$$\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = \frac{1}{4m^2}(\hat{p}+m)\,\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}\,(\hat{p}+m)\,. \tag{31}$$

Спинорную часть $\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu}$ в правой части (31) разложим по полному набору независимых элементов алгебры Дирака, в качестве которого выберем следующий:

$$I\,,\ \gamma_\lambda\,,\ \gamma_5\,,\ \gamma_5\gamma_\lambda\,,\ \sigma_{\lambda\sigma}\,.$$

Ясно, что из всего набора можем воспользоваться только I и $\sigma_{\lambda\sigma}$. Соотношение (31) тогда запишется в виде:

$$\Lambda^{J+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4m^2}(\hat{p}+m)\,(L_{\mu_1\ldots\mu_J\nu_1\ldots\nu_J} + M_{\mu_1\ldots\mu_J\nu_1\ldots\nu_{J+1}}\,\sigma_{\mu_{J+1}\nu_{J+1}})(\hat{p}+m)\,.$$

Из (27) сразу получаем:

$$L_{\mu_1 \cdots \mu_J \nu_1 \cdots \nu_J} = \frac{1}{2} \Lambda^{J}_{\mu\nu} .$$

Тензор $M_{\mu_1 \cdots \mu_{J+1} \nu_1 \cdots \nu_{J+1}}$ находится из (24):

$$M_{\mu_1 \cdots \mu_{J+1} \nu_1 \cdots \nu_{J+1}} = \frac{1}{2} \Lambda^{J+1}_{\mu\nu} .$$

Таким образом, матрицы плотности для неполяризованных состояний частиц с целыми и полуцелыми спинами связаны очень простым соотношением:

$$\Lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\mu\nu} = \Lambda^{J+1}_{\mu\nu} \gamma_{\mu_{J+1}} \gamma_{\nu_{J+1}} \frac{\hat{p}+m}{4m} . \qquad (32)$$

В системе покоя частицы имеем:

$$\lambda^{J+\frac{1}{2}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \lambda^{J+1}_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha_{J+1}} \sigma_{\beta_{J+1}} , \qquad (33)$$

σ_a – здесь матрицы Паули.

2. Поляризационная матрица плотности

В системе покоя частицы оператор полуцелого спина $J+\frac{1}{2}$ определим так:

$$s^{J+\frac{1}{2}}_{l,\alpha\beta} = \frac{1}{(J!)} \sum_{\alpha,\beta} p \left[\frac{1}{2} \sigma_i (\delta_{\alpha\beta})_J - iJ e_{l\alpha\beta} (\delta_{\alpha\beta})_{J-1} \right] . \qquad (34)$$

Спин-тензоры $s^{J+\frac{1}{2},n}_{l,\alpha\beta}$ определим аналогично целому спину:

$$s^{J+\frac{1}{2},n}_{l,\alpha\beta} = \frac{(2J+1-n)!}{(2J+1)!\,n!} \sum_{l} p \; s^{J+\frac{1}{2}}_{l_1,\alpha\gamma} \; s^{J+\frac{1}{2}}_{l_2,\gamma\rho} \cdots s^{J+\frac{1}{2}}_{l_n,\sigma\beta} + \qquad (35)$$

$$+ \text{ члены, содержащие } \delta_{ii} .$$

Среднее значение спин-тензора $\overline{s_i^{J+\frac{1}{2},n}}$ в лабораторной системе отсчёта переходит в 4-мерный тензор $S_\lambda^{J+\frac{1}{2},n}$, компоненты которого выражаются через $\overline{s_l^{J+\frac{1}{2},n}}$ так же,как $S_\lambda^{J,n}$ через $\overline{s_l^{J,n}}$ в формуле (18).

Покажем, что поляризационная матрица плотности $P_{\mu\nu}^{J+\frac{1}{2}}$ связана с $P_{\mu\nu}^{J+1}$ соотношением, аналогичным (32):

$$P_{\mu\nu}^{J+\frac{1}{2}} = P_{\mu\nu}^{J+1} \gamma_{\mu_{J+1}} \gamma_{\nu_{J+1}} \frac{\hat{p} + m}{4m} \text{ x/}. \tag{36}$$

В таком виде $P_{\mu\nu}^{J+\frac{1}{2}}$ удовлетворяет условиям (22) - (30), но нужно показать, что выполняется также следующее требование:

$$Sp\ s_{i,\beta a}^{J+\frac{1}{2},n} \rho_{a\beta}^{J+\frac{1}{2}} = \overline{s_l^{J+\frac{1}{2},n}}, \tag{37}$$

где

$$\rho_{a\beta}^{J+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \rho_{a\beta}^{J+1} \sigma_{a_{J+1}} \sigma_{\beta_{J+1}}.$$

Принимая во внимание, что после упрощения спин-тензора матрицы Паули σ_i не должны остаться в степени, большей единицы (иначе это даст δ_{ll}), легко получить:

$$Sp\ [\ s_{l,\beta a}^{J+\frac{1}{2},n} \frac{1}{2} \rho_{a\beta}^{J+1} \sigma_{a_{J+1}} \sigma_{\beta_{J+1}}] = s_{l,\beta a}^{J,n} \rho_{a\beta}^{J} = \overline{s_l^{J,n}}.$$

Таким образом, справедливость (36) доказана.

Приведем также другой вид матрицы плотности, аналогичный выражению (17):

---

x/ Это равенство имеет условный смысл. Подразумевается, что в $P_{\mu\nu}^{J+1}$ вместо $S_\lambda^{J+1,n}$ подставлены $S_\lambda^{J+\frac{1}{2},n}$ или они просто равны. Коэффициент при $S_\lambda^{J+1,2J+2}$ равен нулю.

$$\rho_{\alpha\beta}^{J+\frac{1}{2}} = \lambda_{\alpha\beta}^{J+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(J+1)} \left[\sum_{n=1}^{2J+2} \frac{b_n^{J+\frac{1}{2}}}{c_n^{J+\frac{1}{2}}} \overline{s_l^{J+\frac{1}{2},n}}\, s_{l,\alpha\gamma}^{J+\frac{1}{2},n} \right] \lambda_{\gamma\beta}^{J+\frac{1}{2}}. \quad (38)$$

Здесь $b_n^{J+\frac{1}{2}}$ и $c_n^{J+\frac{1}{2}}$ получаются из b_n^J и c_n^J заменой $2J$ на $2J+1$.

Из (17) и (38) следует, что среднее значение квадрата спин-тензора ранга n равно

$$\overline{(s_{i,\alpha\beta}^{s,n})^2} = (2n+1)(2s+1) \frac{c_n^s}{b_n^s} .$$

Здесь s – целое или полуцелое.

Приведем выражение для матрицы плотности, соответствующей решениям с отрицательной частотой:

$$\tilde{\tilde{P}}_{\mu\nu}^{J+\frac{1}{2}} = P_{\nu\mu}^{J+1} \gamma_{\mu_{J+1}} \gamma_{\nu_{J+1}} \frac{\hat{p} - m}{4m} .$$

В заключение заметим, что если выражение для вероятности процесса, в котором рождается частица с произвольным целым или полуцелым спином S, имеет вид:

$$|M|^2 \approx 1 + \sum_{n=1}^{2s} \overline{s_i^{s,n}}\, T_i^n , \quad (39)$$

где $T_i^n = T_{i_1 \dots i_n}^n$ какие-то тензоры с равным нулю следом, то из формул (17) и (38) следует, что средние значения спин-тензоров частицы в конечном состоянии равны:

$$\overline{s_l^{s,n}} = (2s+1) \frac{c_n^s}{b_n^s} T_l^n . \quad (40)$$

Автор глубоко благодарен Л.И.Лапидусу, обратившему его внимание на рассмотренную задачу, В.Б.Копелиовичу и М.И.Широкову за полезные обсуждения.

П р и л о ж е н и е   А

Из условия (15) найдем коэффициенты b^J_{2k}. Из (14) следует, что равенство (15) можно переписать так:

$$b^J_{2k}\; s^{J,2k}_{l,\beta a}\; \lambda^J_{a\gamma}\; \omega^{J,2k}_{l,\gamma\rho}\; \lambda^J_{\rho\beta} = \frac{1}{(2k)!^2} \sum_{i,l}\,_P\, (\delta_{il})_{2k} \; . \qquad (\text{A.1})$$

Здесь и в дальнейших преобразованиях (A.1) члены, содержащие δ_{ll} или δ_{ii}, опускаются, так как они дают нулевой вклад в (15). По этой причине и в силу условия (2) $s^{J,n}_{i,\beta a}$ в (A.1) можно заменить на $c^J_{2k}\; \omega^{J,2k}_{i,\beta a}$. Коэффициент c^J_{2k} дается формулой (C.2) приложения C. Выражение $\omega^{J,2k}_{l,\gamma\rho}$ в левой части (A.1) можно заменить на $1/f^J_{2k} \sum_i\,_P\; \lambda^{J+k}_{\gamma_1\ldots\gamma_J\, l_1\ldots l_k\, ,\rho_1\ldots\rho_J\, i_{k+1}\ldots i_{2k}}$ (или сокращенно $\sum_l\,_P\; \lambda^{J+k}_{\gamma l,\rho i}$). f^J_{2k} –коэффициент, с которым $\omega^{J,n}_{i,\gamma\rho}$ содержится в $\sum_i\,_P\; \lambda^{J+k}_{\gamma l,\rho i}$.

В результате этих замен левая часть (A.1) приобретает вид:

$$\frac{b^J_{2k}\, c^J_{2k}}{f^J_{2k}}\; \omega^{J,2k}_{i,\beta a}\; \lambda^J_{a\gamma}\; \Big[\sum_i\,_P\; \lambda^{J+k}_{\gamma l,\rho i}\Big]\; \lambda^J_{\rho\beta} =$$

$$= \frac{b^J_{2k}\, c^J_{2k}}{f^J_{2k}}\; \frac{1}{(2J+1)^2}\; \omega^{J,2k}_{i,\beta a} \sum_l\,_P\; \lambda^{J+k}_{\gamma l,\rho i} =$$

$$= \frac{b^J_{2k}\, c^J_{2k}}{f^J_{2k}}\; \frac{(J!)^2}{(2J+1)^2 (k!)^2}\; \omega^{k,2k}_{i,\beta a} \sum_l\,_P\; \lambda^{2k}_{ai,\beta i} =$$

$$= b^J_{2k}\, c^J_{2k}\; \frac{f^k_{2k}}{f^J_{2k}} \left(\frac{J!}{k!(2J+1)}\right)^2 \omega^{k,2k}_{i,\beta a}\; \omega^{k,2k}_{l,a\beta} =$$

$$= b^J_{2k}\, c^J_{2k}\; \frac{f^k_{2k}}{f^J_{2k}} \left(\frac{k!\,J!}{2J+1}\right)^2 \sum_{il}\,_P\; (\delta_{il})_{2k} \; .$$

Отношение $f^{k}_{2k} \;/\; f^{J}_{2k}$ дается формулой (Д.5) приложения Д. Возвращаясь к (A.1), получаем

$$b^{J}_{2k} = (-1)^{k}\; 2^{2J+k}\; \frac{[(2J+1)!!]^{2}(4k+1)!}{(2J+2k+1)!(2J-2k)![(2k)!]^{3}}. \qquad (A.2)$$

Приложение B

В случае спин-тензора нечётного ранга $2k+1$ можно переписать (15) следующим образом :

$$b^{J}_{2k+1}\; s^{J,2k+1}_{i,\beta a}\,\lambda^{J}_{a\gamma}\;\omega^{J,2k+1}_{i,\gamma\rho}\;\lambda^{J}_{\rho\beta} = \frac{1}{(2k+1)^{2}!}\sum_{i,j}\sum_{P}(\delta_{ij})_{2k+1}. \qquad (B.1)$$

Левую часть этого равенства преобразуем аналогично тому, как это было сделано в приложении A, опять опуская члены с δ_{ii} и δ_{jj}

$$b^{J}_{2k+1} c^{J}_{2k+1}\,\omega^{J,2k+1}_{i,\beta a}\;\lambda^{J}_{a\gamma}\,\omega^{J,2k+1}_{i,\gamma\rho}\;\lambda^{J}_{\rho\beta} =$$

$$= \frac{b^{J}_{2k+1}\; c^{J}_{2k+1}}{f^{J+1}_{2k+1}}\;\frac{1}{(2J+1)^{2}}\;\omega^{J,2k+1}_{i,\beta a}\;\sum_{i}\sum_{P} e_{i a_{J+1}\beta_{J+1}}\;\lambda^{J+k+1}_{a_1,\beta_1} =$$

$$= b^{J}_{2k+1} c^{J}_{2k+1}\;\; 2(k+1)!\,k!\,(J!)^{2} f^{k+2}_{2k+1} \,/\, f^{J+1}_{2k+1}\;\sum_{i,j}\sum_{P}(\delta_{ij})_{2k+1}.$$

Здесь f^{J+1}_{2k+1} – коэффициент, с которым $\sum_{i}\sum_{P} i\, e_{i\gamma_{J+1}\rho_{J+1}}\;\lambda^{J+1+k}_{\gamma_1,\rho_1}$ содержит $\omega^{J,2k+1}_{i,\gamma\rho}$. Он дается формулой (Д.6). Окончательно из (B.1) получаем:

$$b^{J}_{2k+1} = (-1)^{k}\; 3\;\; 2^{2J+k}\;\frac{(2J-k+1)}{(2J-2k+1)(k+3)}\;\frac{(4k+3)![(2J+1)!!]^{2}}{(2J+2k+2)![(2k+1)!]^{2}(2J-2k-1)!}.$$

Приложение C

Вычислим коэффициент c^J_{2k}, с которым $\omega^{J,\,2k}_{l,\,\alpha\beta}$ содержится в $s^{J,\,2k}_{l,\alpha\beta}$. Из того, как были введены спин-тензоры $s^{J,\,2k}_{l,\alpha\beta}$, следует, что для нахождения c^J_{2k} достаточно ограничиться тем членом $s^{J,\,2k}_{l,\,\alpha\beta}$, который выписан явно в (13):

$$\frac{(2J-2k)!}{(2J)!(2k)!}\sum_i \; [\; \frac{-ie_{i_1\alpha\gamma}}{J!(J-1)!}(\delta_{\alpha\gamma})_{J-1}]\ldots[\frac{-ie_{i_{2k}\sigma\beta}}{J!(J-1)!}(\delta_{\sigma\beta})_{J-1}]. \quad (C.1)$$

Это выражение обладает тем очевидным свойством, что при умножении на δ_{aa} получается тензор, содержащий $\delta_{\beta\beta}$. $2k$ сомножителей в (C.1) разобьем последовательно на k пар. Каждую пару преобразуем, используя формулу:

$$e_{\alpha\beta\gamma}\,e_{ijk} = \det\begin{pmatrix} \delta_{\alpha i} & \delta_{\alpha j} & \delta_{\alpha k} \\ \delta_{\beta i} & \delta_{\beta j} & \delta_{\beta k} \\ \delta_{\gamma i} & \delta_{\gamma j} & \delta_{\gamma k} \end{pmatrix}$$

и проведем в ней суммирование по повторяющимся индексам. Учитывая упомянутое свойство (C.1) и оставляя только члены, дающие вклад в $\omega^{J,\,2k}_{l,\,\alpha\beta}$, перемножим теперь пары последовательно слева направо и найдем коэффициент c^J_{2k}:

$$c^J_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^k}\;\frac{2^{2J}}{(2k)!\,[(2J)!!]^2}\,. \qquad (C.2)$$

Коэффициент c^J_{2k+1}, с которым $s^{J,\,2k+1}_{l,\alpha\beta}$ содержит $\omega^{J,2k+1}_{l,\alpha\beta}$, находится аналогичным путем. Первые $2k$ сомножителей преобразуются точно так же, как это было только что сделано, а затем результат умножается на последний множитель.

В результате получаем:

$$c^{J}_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} \; \frac{2^{2J}}{(2k+1)![(2J)!!]^2} \; . \qquad (\text{C.3})$$

Приложение Д

Представим $\sum_{i\,P} \lambda^{J+k}_{\alpha i,\,\beta i}$ в виде:

$$\sum_{i\;P} \lambda^{J+k}_{\alpha i,\,\beta i} = f^{J}_{2k} \sum_{i,\alpha,\beta P} (\delta_{i\alpha})_k \, (\delta_{i\beta})_k \, (\delta_{\alpha\beta})_{J-k} \; +$$

$$+ \; g^{J}_{2k} \sum_{i,\alpha,\beta P} (\delta_{i\alpha})_k \, (\delta_{i\beta})_k \, (\delta_{\alpha\beta})_{J-k-2} \, \delta_{\alpha\alpha} \, \delta_{\beta\beta} \; + \qquad (\text{Д.1})$$

$$+ \; h^{J}_{2k} \sum_{i,\alpha,\beta\,P} (\delta_{i\alpha})_{k-1} (\delta_{i\beta})_{k+1} (\delta_{\alpha\beta})_{J-k-1} \, \delta_{\alpha\alpha} \; +$$

$$+ \; h^{J}_{2k} \sum_{i,\alpha,\beta P} (\delta_{i\alpha})_{k+1} (\delta_{i\beta})_{k+1} (\delta_{\alpha\beta})_{J-k-1} \, \delta_{\beta\beta} \; +$$

плюс остальные, не интересующие нас члены. Соотношения между коэффициентами f^{J}_{2k}, g^{J}_{2k}, h^{J}_{2k} получаются из условия (7):

$$h^{J}_{2k} = - \frac{k(J-k)}{2J-1} \, f^{J}_{2k} \; , \qquad (\text{Д.2})$$

$$g^{J}_{2k} = - \frac{(J-k)(J-k-1)}{2(2J-1)} \left[1 - \frac{2k(k+1)}{2J-1} \right] f^{J}_{2k} \; . \qquad (\text{Д.3})$$

Умножим теперь (Д.1) слева и справа на $\delta_{\alpha_J \beta_J}$. Используя (Д.2) и (Д.3), получим рекуррентное соотношение

$$f^{J}_{2k} = \frac{4\,(2J-1)^2}{(2J-2k)(2J-2k-1)(2J+2k+1)(2J+2k)} \, f^{J-1}_{2k} \; . \qquad (\text{Д.4})$$

Отсюда сразу получаем

$$\frac{f^{k}_{2k}}{f^{J}_{2k}} = \frac{[(2k-1)!!]^2}{[(2J-1)!!]^2} \; \frac{(2J-2k)!\,(2J+2k+1)\,!}{2^{2J-2k}\,(4k+1\,)\,!} \; . \tag{Д.5}$$

Найдем теперь коэффициент, с которым тензор $\omega^{J,2k+1}_{l,\alpha\beta}$ содержится в $\sum\limits_{l} p \;\; i \;\; e_{l\alpha_{J+1}\beta_{J+1}} \;\; \lambda^{J+1+k}_{\alpha l,\,\beta l}$.

Опуская ненужные члены, можем написать:

$$\sum_{l} p \;\; i\, e_{l\alpha_{J+1}\beta_{J+1}} \lambda^{J+1+k}_{\alpha l,\beta l} = \sum_{l} p \;\; i\, e_{l\alpha_{J+1}\beta_{J+1}} [\, f^{J+1}_{2k} \sum_{\alpha,\beta p} (\delta_{l\alpha})_k \,(\delta_{l\beta})_k \,(\delta_{\alpha\beta})_{J+1-k} +$$

$$+ \, g^{J+1}_{2k} \sum_{\alpha\beta p} (\delta_{l\alpha})_k \; (\delta_{l\beta})_k \; (\delta_{\alpha\beta})_{J-k-1} \delta_{\alpha\alpha} \; \delta_{\beta\beta} = \tag{Д.6}$$

$$= - \frac{(J+1-k)(J-k)\;(2J+2k+3)(2J+1-k)}{(2J+1)^2} \; f^{J+1}_{2k} \; \omega^{J,2k+1}_{l,\alpha\beta} \; .$$

Литература

1. L. Michel and A.S. Wightman. Phys.Rev., 98, 1190 , 1955.
2. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. "Квантовая электродинамика", изд. "Наука", 1969 г.
3. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевкий. "Релятивистская квантовая теория", изд. "Наука", 1968 г.
4. Л.Б.Окунь. "Слабое взаимодействие элементарных частиц", Гос.изд. физ.-мат. литературы, 1963 г.
5. Arif-Uz-Zaman, Y.S. Liu. Nuovo Cimento, 44A , 903, 1966.
6. S. Weinberg. Phys.Rev., 133, B 1318 , 1964.
7. M. Fierz and W. Pauli. Proc. Roy. Soc., A173 , 211, 1939.
8. W. Rarita and J. Schwinger. Phys. Rev., 60, 61, 1941.
9. M. Gourden and J.Micheli. Nuovo Cimento., 40, 225, 1965.
10. В.Б.Копелиович. ЯФ, 8, 524 (1968)
11. L. Michel. Suppl. Nuovo Cimento, 14, 95, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 февраля 1970 года.