

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P2 - 4900



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ПРОПАГАТОРОВ ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ
И ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ
ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

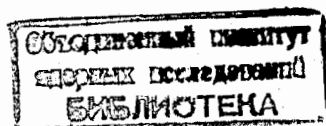
1970

P2 - 4900

Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ПРОПАГАТОРОВ ВИРТУАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ
И ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ
ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА

Направлено в журнал "Теоретическая
и математическая физика"



Введение

В некоторых случаях при рассмотрении диаграмм Фейнмана виртуальные частицы разделяют на "жесткие" и "мягкие" (основной вклад в интеграл по этим импульсам k_i возникает соответственно от больших или малых значений k_i). Если предположить, что в рассматриваемой диаграмме некоторые виртуальные частицы "мягкие", то естественно пренебречь в пропагаторах квадратичными по импульсам k_i членами

$$\frac{1}{(p + \sum_1^n k_i)^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{2p \sum_1^n k_i + i\epsilon}; \quad p^2 = m^2.$$

Такая аппроксимация оказывается правильной при изучении инфракрасных асимптотик в квантовой электродинамике /1,2,3/.

Так же поступают, например, в работах /4,5/ при исследовании высокоэнергетической амплитуды рассеяния. В этом случае удается просуммировать все лестничные и кросслестничные диаграммы.

Более корректным в смысле сходимости интегралов по k_i является отбрасывание только перекрестных по виртуальным импульсам членов $k_i k_j$, $i \neq j$, и удержание членов k_i^2

$$\frac{1}{(p + \sum k_i)^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{\sum_1 k_i^2 + 2p \sum k_i + i\epsilon}.$$

В некоторых работах эту аппроксимацию для пропагаторов при высоких энергиях $p_0 \rightarrow \infty$ называют "эйкональной", мы будем называть "приближением $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ ".

В работах /1,2,6,7/ при исследовании функций Грина и амплитуд рассеяния методом функционального интегрирования производится приближенное вычисление соответствующих функциональных интегралов; в теории возмущений это приближение как раз соответствует тому, что $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$.

До сих пор в литературе нет доказательств справедливости этого приближения (они существуют только для области инфракрасной асимптотики).

В настоящей заметке изучается приближение $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ для получения высокоэнергетической асимптотики различных диаграмм Фейнмана в простой модели скалярных частиц $\mathcal{L}_{int} = g: \psi^2(x) \phi(x)$:

Большинство из рассмотренных в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ /8,9/ фейнмановских интегралов исследуется методом Тиктополуса. Изучаемое приближение влияет на асимптотику диаграммы путем изменения коэффициентной функции $f(a)$, стоящей множителем при большой энергетической переменной s в детерминанте Чисхольма $D(a,s,t)$ /10/.

В приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ диаграмма Фейнмана n -го порядка в теории $g: \psi^2 \phi$ для процесса рассеяния $p_1 + p_2 \rightarrow q_1 + q_2$ дает следующий вклад в амплитуду \tilde{F}_n /8/ с точностью до постоянного множителя:

$$\tilde{F}_n(s, t) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^N da_i \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^N a_i) [\tilde{C}(a)]^{\ell-1}}{[D(a, s, t)]^{\ell+1}}, \quad (1)$$

где $\ell = \frac{1}{2}n - 1$ - число независимых внутренних виртуальных импульсов, $N = \frac{3}{2}n - 2$ - общее число внутренних линий в данной диаграмме $s = (p_1 + p_2)^2$; $t = (p_1 - q_1)^2$. $\tilde{C}(a)$ - это $C(a)$, в котором недиагональные элементы положены равными нулю, так как $k_i k_j = 0, i \neq j$, $\tilde{D}(a, s, t)$ получается из детерминанта Чисхольма $D(a, s, t)$ выбрасыванием недиагональных элементов, кроме последней строки и последнего столбца.

$$\tilde{D}(a, s, t) = s \tilde{f}(a) + t \tilde{g}(a) + u \tilde{h}(a). \quad (2)$$

a везде будет обозначать совокупность всех параметров Фейнмана.

Асимптотика $\tilde{F}_n(s, t)$ существенно зависит от вида функции $\tilde{f}(a)$. Ниже приводятся те диаграммы, для которых приближение $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ сохраняет асимптотику верной. Под сохранением асимптотики мы будем понимать следующее. Пусть $F_n(s, t)$ - точный вклад в амплитуду от диаграммы n -го порядка, а $\tilde{F}_n(s, t)$ в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$. Тогда при $s \rightarrow \infty$, а t фиксированном

$$F_n(s, t) \rightarrow \eta(t) \chi(s), \quad \tilde{F}_n(s, t) \rightarrow \tilde{\eta}(t) \tilde{\chi}(s).$$

Если $\chi(s) = \tilde{\chi}(s)$, то асимптотика сохраняется, хотя $\tilde{\eta}(t)$ и $\eta(t)$ будут иногда различны.

Рассмотрим подробно следующие две диаграммы. Детерминанты Чисхольма в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ для них приведены в приложениях А и В.

Скалярная лестница рис. 1. имеет точную асимптотику $\frac{\ell n s}{s^{n-1}}$ (согласно работе /11/).

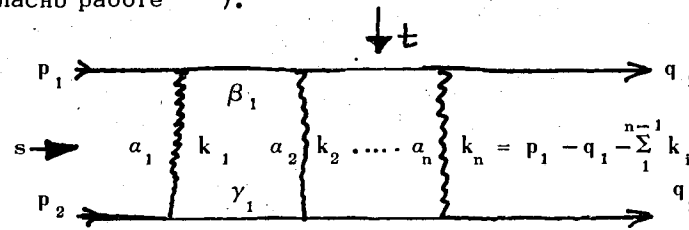


Рис. 1.

(Выбор независимых импульсов интегрирования обусловлен соответствием с работой /7/). Используя приложение А, найдем $\tilde{f}(a)$:

$$\tilde{f}(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{\ell=j}^{n-1} \beta_{\ell} \right) \left(\sum_{m=j}^{n-1} \gamma_m \right) \prod_{i=1}^{n-1} [a_i + a_n + \sum_{r=i}^{n-1} (\beta_r + \gamma_r)] \right\}.$$

Очевидно, что $\tilde{f}(a)=0$, если положить равными нулю $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ одновременно, или $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, т.е. асимптотика этой диаграммы в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ равна согласно /8/ $\frac{\ln s}{s^{n-1}}$ и совпадает с ее точным значением.

Далее рассмотрим так называемую "квазиплоскую" диаграмму в терминологии работы /12/ (рис. 2). Точная ее асимптотика $\frac{\ln s}{s^{n-1}}$

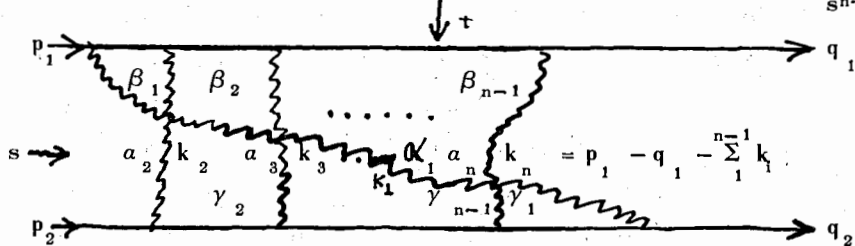


Рис. 2.

Из приведенного в приложении В детерминанта определим $\tilde{f}(a)$ и $\frac{\partial \tilde{f}(a)}{\partial a_1}$:

$$\tilde{f}(a) = -\gamma_1 \left(\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i \right) \prod_{i=1}^{n-1} [a_i + a_n + \sum_{i=j}^{n-1} (\beta_i + \gamma_i)] +$$

$$+ (a_1 + a_n + \gamma_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i) \sum_{\ell=2}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \beta_i \right) \left(\sum_{k=\ell}^{n-1} \gamma_k \right) \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \ell}}^{n-1} [a_j + a_n + \sum_{i=j}^{n-1} (\beta_i + \gamma_i)] \right\},$$

$$\frac{\partial \tilde{f}(a)}{\partial a_1} = \sum_{\ell=2}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \beta_i \right) \left(\sum_{k=\ell}^{n-1} \gamma_k \right) \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq \ell}}^{n-1} [a_j + a_n + \sum_{i=j}^{n-1} (\beta_i + \gamma_i)] \right\}.$$

Используя рассуждения работы /12/ по нахождению асимптотики квазиплоских графов, а также явный вид $\tilde{f}(a)$ и знакоопределенность $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial a_1}$, можно заключить, что диаграмма на рис. 2 в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ при $s \rightarrow \infty$ ведет себя как $\frac{\ln s}{s^{n-1}}$, т.е. и у таких графов выбрасывание $\sum_{i \neq j} k_i k_j$ из пропагаторов "нуклонов" не меняет высокоэнергетической асимптотики.

В качестве примера существенно неплоского графа, для которого приближение $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ сохраняет высокоэнергетическую асимптотику, можно привести следующую диаграмму.

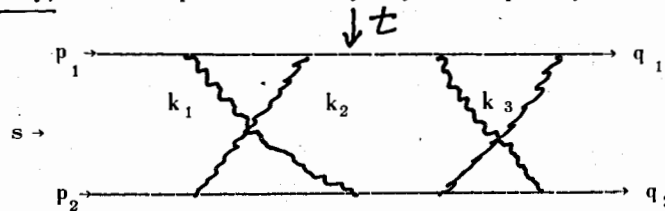


Рис. 3

Эта диаграмма при $s \rightarrow \infty$ ведет себя, как $\left(\frac{\ln s}{s}\right)^3$, независимо от того, выбрасываются ли члены $k_i k_j, i \neq j$ или нет.

Рассмотрим некоторые диаграммы Фейнмана, для которых приближение $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ существенно искажает асимптотику. Начнем с радиационных поправок к лестнице шестого порядка (см. рис. 4)

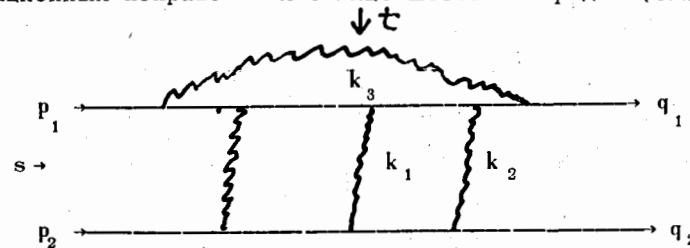


Рис. 4

Точная асимптотика этой диаграммы $\frac{1}{s}$. Учёт таких радиационных поправок при $s \rightarrow \infty$ более существенен по сравнению, например, с диаграммой рис. 5, которая ведет себя, как $\frac{1}{s^2}$, или с лестничной диаграммой того же порядка, асимптотика которой $\frac{\ln s}{s^3}$.

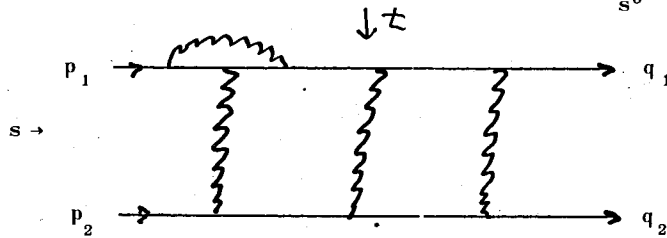


Рис. 5

Поступая совершенно так же, как и в случае первых двух диаграмм, можно найти, что в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ асимптотика диаграммы, показанной на рис. 4, равна $\frac{\ln s}{s^2}$ и не совпадает с ее точным значением $\frac{1}{s}$.

Эта аппроксимация пропагаторов нарушает также асимптотику и скалярной лестницы (рис. 1), если рассматривать ее в другом канале. $s = \text{const}$, $t \rightarrow \infty$. Переобозначив внешние импульсы на этой диаграмме, можно добиться того, что $s = (p_1 + p_2)^2$ будет по-прежнему большой переменной, а $t = (p_1 - q_1)^2$ будет фиксировано:

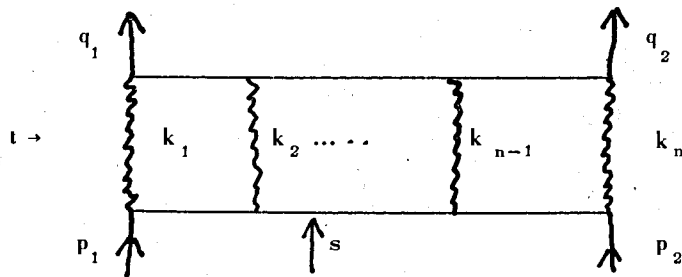


Рис. 6

Асимптотику этой диаграммы в приближении $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ удобно найти методом Судакова /13/. После замены переменных

$$k_i = x_i p_1 + y_i p_2 + k_{\perp i}, \quad (k_{\perp i} p_1) = (k_{\perp i} p_2) = 0; \quad d^4 k_i = \frac{1}{2} s dx_i dy_i d^2 k_{\perp i}$$

и с учетом того, что $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$, интеграл Фейнмана можно записать в виде

$$\tilde{F}_n(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}s\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} dx_i dy_i d^2 k_{\perp i}}{(s x_i y_i + k_{\perp i}^2 - \mu^2 + i\epsilon) \left\{ s + \sum_{i=1}^{n-1} [s y_i (x_i - 1) - s x_i + k_{\perp i}^2] - \mu^2 + i\epsilon \right\}} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^i [s y_i (x_i - 1) - 2 q_1 k_{\perp i} + k_{\perp i}^2] + i\epsilon \right) \left(\sum_{j=1}^i [s y_j (x_j - 1) + k_{\perp j}^2] + i\epsilon \right) \right\}}$$

Вначале выполним интегрирование по $\prod_{j=1}^{n-1} dy_j$. Если $-\infty < x_j < 0$ или $1 < x_j < +\infty$, то полюса по y_j лежат все по одну сторону от действительной оси y_j . Если $0 < x_j < 1$, то три полюса лежат по одну сторону от этой оси, а один полюс, соответствующий множителю $(s x_j y_j + k_{\perp j}^2 - \mu^2 + i\epsilon)$, - по другую сторону. Беря вычеты по всем y_j , получим ($j=1, 2, \dots, n-1$):

$$\tilde{F}_n(s, t) = \left(\frac{2\pi i}{s}\right)^{n-1} \int \dots \int \frac{\left(\frac{1}{2}s\right)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} dx_i d^2 k_{\perp i}}{\lambda(x_j, k_{\perp j}) \left\{ s + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mu^2 - k_{\perp j}^2}{x_j} - (x_j - 1) - s x_j + k_{\perp j}^2 - \mu^2 \right\}}$$

где $\lambda(x_j, k_{\perp j})$ - функция, не зависящая от s . Пределы интегрирования по x_i от 0 до 1. Асимптотика оставшегося интеграла, очевидно, равна $\frac{1}{s}$, в то время как точная асимптотика данной диаграммы согласно работам /11/, $\left(\frac{\ln s}{s}\right)^{n-1}$. Таким образом, в этом канале приближение $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ абсолютно неприменимо.

^{x/} Легко доказать, что это приближение будет также несправедливым для лестницы в случае s и $t \rightarrow \infty$ (высокоэнергетическое рассеяние на фиксированный угол)

Используя результаты работы /12/ по исследованию асимптотики фейнмановских диаграмм с участием векторных частиц, можно показать, что все выводы, сделанные выше, останутся справедливыми, если скалярные мезоны заменить на векторные частицы.

В заключение отметим следующее. Так как не ясно, как связано с топологией графов рассматриваемое приближение, то нет общих правил, определяющих справедливость его для произвольной диаграммы.

На основе проведенных выше расчетов можно утверждать справедливость приближения $\sum_{i \neq j} k_i k_j = 0$ при $s \rightarrow \infty$ для лестницы и квазиплоской лестницы, суммирование которых при этих условиях приводит, как показано в работах /5,7/, к глауберовскому представлению для амплитуды рассеяния. Существенным вопросом при этом остается учёт диаграмм типа показанной на рис. 4, имеющих более высокую асимптотику, чем соответствующая лестница. Но для них приближение $\sum_{i \neq j} k_i k_j$ при $s \rightarrow \infty$, t фиксированном несправедливо. Для неплоского графа (рис. 4) эта аппроксимация не искажает асимптотики при $s \rightarrow \infty$, но из-за технических трудностей более сложные неплоские графы исследовать с этой точки зрения не удастся.

Авторы благодарны Д.И.Блохинцеву, А.Н.Тавхелидзе, А.В.Ефремову, В.А.Матвееву, С.П.Кулешову, В.Н.Первушину, А.Н.Сисакяну за плодотворные и стимулирующие обсуждения.

Приложение А

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_1 + \alpha_n + \sum_1^{n-1} (\beta_1 + \gamma_1) & \circ & \dots & \circ & \sum_1^{n-1} (-p_1 \beta_1 + p_2 \gamma_1) - \alpha_n (p_1 - q_1) \\
 \circ & \alpha_2 + \alpha_n + \sum_2^{n-1} (\beta_1 + \gamma_1) & \dots & \circ & \sum_2^{n-1} (-p_1 \beta_1 + p_2 \gamma_1) - \alpha_n (p_1 - q_1) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \circ & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_1^{n-1} (-p_1 \beta_1 + p_2 \gamma_1) - \alpha_n (p_1 - q_1) & \dots & \dots & \dots & \sum_1^{n-1} \alpha_i (-\mu^2) + \alpha_n t
 \end{array}$$

Приложение В

$$\begin{array}{cccc}
 \alpha_1 + \alpha_n + \sum_1^{n-1} (\beta_1 + \gamma_1) & \circ & \dots & \circ & -p_1 \sum_1^{n-1} \beta_1 - \gamma_1 q_2 - \alpha_n (p_1 - q_1) \\
 \circ & \alpha_2 + \alpha_n + \sum_2^{n-1} (\beta_1 + \gamma_1) & \dots & \circ & -p_1 \sum_2^{n-1} \beta_1 + p_2 \sum_1^{n-1} \gamma_1 - \alpha_n (p_1 - q_1) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \circ & \circ & \dots & \dots & \dots \\
 -p_1 \sum_1^{n-1} \beta_1 - \gamma_1 q_2 - \alpha_n (p_1 - q_1) & -p_1 \sum_2^{n-1} \beta_1 + p_2 \sum_2^{n-1} \gamma_1 - \alpha_n (p_1 - q_1) & \dots & \dots & -p_1 \beta_{n-1} + q_1 \gamma_{n-1} - \alpha_n (p_1 - q_1) \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & (-\mu^2) \sum_1^n \alpha_i + \alpha_n t
 \end{array}$$

Л и т е р а т у р а

1. Б.М.Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).
2. Б.М.Барбашов, М.К.Волков. ЖЭТФ, 50, 660 (1966).
3. Г.А.Милехин, Е.С.Фрадкин. ЖЭТФ, 45, 1926 (1963).
4. М. Levy. Phys.Rev., 130, 791 (1969).
5. М. Levy, J. Sucher. Preprint N.983. University of Maryland (1969).
6. E.S. Fradkin. Nucl.Phys., 76, 588 (1966).
7. B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, A.N. Sissakian. Preprint, E2-4692, Dubna, 1969.
8. G. Tiktopoulos. Phys.Rev., 131, 480 (1963).
9. G. Tiktopoulos. Phys.Rev., 131, 2373 (1963).
10. R. Chisholm. Proc. Cambridge Phil.Soc., 48, 300 (1952).
11. И.Ф.Гинзбург, А.В.Ефремов, В.Г.Сербо. ЯФ, 9, вып. 2 (1969);
О.И.Завьялов. ЖЭТФ, 47, 1099 (1964).

12. R. Torgerson. Phys.Rev., 143, 1194 (1966).

13. В.В.Судаков. ЖЭТФ, 30, 87 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел

22 января 1970 года.