ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4887

М.М. Мусаханов

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА АДЛЕРА И ДОТАНА И РАСПАДЫ $\pi \to \pi e \nu \gamma$, $K \to \pi e \nu \gamma$, $\pi \to e^+ e^- e \nu$, $K \to e^+ e^- e \nu$

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1970

P2 - 4887

М.М. Мусаханов

НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА АДЛЕРА И ДОТАНА И РАСПАДЫ $\pi \to \pi e \nu \gamma$, $K \to \pi e \nu \gamma$, $\pi \to e^+ e^- e \nu$, $K \to e^+ e^- e \nu$

Направлено в ЯФ

В в е д е н и е

Общие требования градиентной и релятивистской инвариатности позволяют связать амплитуду процесса с испусканием " мягких" γ -квантов с амплитудой процесса без испускания фотона. Как впервые было показано Лоу[1], амплитуду с излучением фотона ($a \to \beta \gamma$) можно выразить через амплитуду без излучения ($a \to \beta$) с точностью до членов, пропорциональных первой степени импульса k испускаемого фотона (или электрон-позитронной пары).

Адлер и Дотан в интересной работе[2] рассмотрели возможность обобщения теоремы Лоу на матричные элементы полулептонных процессов слабого взаимодействия. Они подчеркнули, что отправным пунктом в теореме Лоу является известное значение дивергенции электромагнитного тока, а не его сохранение. Такой подход позволяет использовать " частичное сохранение" аксиального тока (PCAC) в полулептонных процессах для того, чтобы выразить матричный элемент аксиального тока ($a \to \beta e \nu$) через матричный элемент процесса ($a \to \beta$) и матричный элемент дивергенции аксиального тока. Адлер и Дотан показали, что это удается сделать с точностью до членов q^2 , где q – суммарный импульс лептонной пары. Для процессов ($a \to \beta e \gamma \nu$) , обязанных комбинированному действию электромагнитного и слабого взаимодействий, оказывается возможным вычислить матричные элементы с точностью до членов порядка (kq). В работе[2] были намечены некоторые применения их общих результатов к различным физическим процессам.

Ниже рассмотрено применение теоремы Адлера и Дотана к анализу процессов радиационных слабых распадов π – и k – мезонов.

1. Амплитуда общего процесса вида $\alpha \to \beta\, \bar{e}\,(q_1)\,\nu\,(q_2)\;\gamma(k)$, где α и β – произвольные адронные состояния, включает амплитуду тормозного излучения электроном M^T (рис. 1) и амплитуду излучения адронами M^w (рис. 2,3)

$$M = M^T + M^w . \tag{1}$$

В дальнейшем будем рассматривать только ту амплитуду, которая связана с излучением фотона адронами. Такое разбиение не является градиентно инвариантным. Градиентно инвариантной является полная амплитуда M.

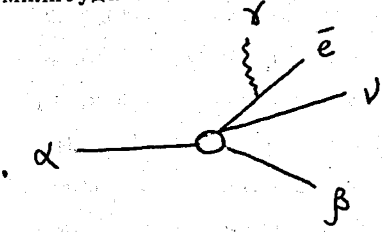

Рис. 1

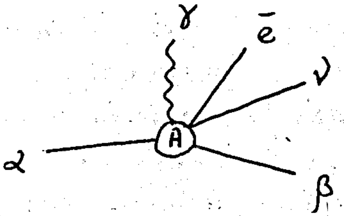

Рис. 2

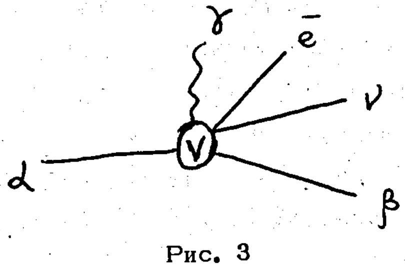

Рис. 3

Амплитуда M^{W} имеет вид:

$$M^{W} = \frac{G}{\sqrt{2}} < \beta\gamma(k) \mid I_{\nu}^{W} \mid \alpha > \ell_{\nu}, \tag{2}$$

где I^{W} – сумма векторного тока I^{V} и аксиального тока I^{A}, $\ell_{\nu} = \bar{u}_{e}(q_1)\gamma_{\nu}(1+\gamma_5)u_{\nu}(q_2)$, $q_1 + q_2 = q$. Матричный элемент $< \beta\gamma(k) \mid I_{\nu}^{W} \mid \alpha >$ можно записать в виде:

$$<\beta\gamma(k) \mid I_{\nu}^{W} \mid \alpha > = e\ \epsilon_{\mu} M_{\mu\nu}^{W}. \tag{3}$$

Требование градиентной инвариантности означает, что замена $\epsilon_{\mu} \to k_{\mu}$ в M должна обращать получающееся при этом выражение в нуль. Это приводит к тому, что

$$k_{\mu}\ell_{\nu} M_{\mu\nu}^{W} = -<\beta \mid I_{\nu}^{W} \mid \alpha > \ell_{\nu}. \tag{4}$$

Для вычисления $\epsilon_{\mu} q_{\nu} M_{\mu\nu}^{W}$ используем PCAC $\Delta s = 0$ и принцип минимальности электромагнитного взаимодействия. Тогда в присутствии электромагнитного поля A_{μ}:

$$\partial_{\mu} I_{\mu}^{V} = ie A_{\mu} I_{\mu}^{V}, \tag{5}$$

$$\partial_{\mu} I_{\mu}^{A} = ie A_{\mu} I_{\mu}^{A} + f_{\pi} m_{\pi}^{2} \phi_{\pi^{+}}.$$

Используя (5) и (3), получаем

$$\epsilon_\mu q_\nu M^W_{\mu\nu} = \epsilon_\mu \langle \beta | I^W_\mu | \alpha \rangle + \frac{m^2_\pi f_\pi}{q^2 - m^2_\pi} \epsilon_\mu M_\mu , \qquad (6)$$

где $\epsilon_\mu M_\mu = i \epsilon_\mu \langle \beta \pi(q) | I^{em}_\mu | \alpha \rangle$ – амплитуда процесса $\alpha \to \beta \pi(q) \gamma(k)$.

Отметим, что (4) и (6) можно получить, если рассматривать величину $M^W_{\mu\nu} = i \int d^4x\, e^{ikx} \langle \beta | T\{ I^{em}_\mu(x), I^W_\nu(0)\} | \alpha \rangle$, а при вычислении $k_\mu M^W_{\mu\nu}$ и $q_\nu M^W_{\mu\nu}$ воспользоваться PCAC и одновременными коммутаторами:

$$\delta(x_0)[I^{em}_0(x), I^W_\mu(0)] = -\delta^4(x) I^W_\mu(0),$$

$$\delta(x_0)[I^W_0(x), I^{em}_\mu(0)] = \delta^4(x) I^W_\mu(0)$$

в соответствии с /2/ и /3/.

2. $\pi \to \pi e \nu \gamma$, $k \to \pi e \nu \gamma$ распады. Используя (6), вычислим аксиальную часть матричного элемента для процесса $\pi^+(p) \to \pi^0(p') e^+(q_1) \nu(q_2) \gamma(k)$. С учётом (4) общий вид матричного элемента можно представить в виде:

$$M^A_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho [(p+p')_\sigma \Phi + q_\sigma \Phi_1] + \qquad (7)$$

$$+ \epsilon_{\mu\rho\sigma\lambda} k_\rho p_\sigma p'_\lambda [(p+p')_\nu \Phi_2 + (p-p')_\nu \Phi_3 + q_\nu \Phi_4] .$$

Для рассматриваемого процесса общее соотношение (6) обращается в

$$\epsilon_\mu q_\nu M^A_{\mu\nu} = \frac{m^2_\pi f_\pi}{q^2 - m^2_\pi} \epsilon_\mu M_\mu , \qquad (8)$$

т.к. $\langle \pi \mid I^A_\mu \mid \pi \rangle = 0$. В(8) $M_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_\nu p_\rho p'_\sigma F$ – амплитуда $\gamma - 3\pi$ взаимодействия /4/. Сравнивая (7) и (8), находим, что

$$2\Phi \Big|_{q=0} = -f_\pi F \Big|_{q=0} \tag{9}$$

и $F\big|_{q=0} = e^{-1} \dfrac{C_\pi}{m^3_\pi}$, где константа C_π экспериментально определяется /4/ при изучении реакции $\pi p \to \pi \gamma N$ путем выделения вклада π – мезонной полюсной диаграммы.

Таким образом,

$$\Phi \Big|_{q=0} = -\frac{1}{2} e^{-1} \frac{C_\pi}{m^3_\pi} \tag{10}$$

и с точностью до членов первого порядка по q аксиальная часть матричного элемента $\pi \to \pi e \nu \gamma$ распада

$$M^A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} e \frac{f_\pi C_\pi}{m^3_\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho (p + p')_\sigma + 0(q) . \tag{11}$$

Аналогично, используя PCAC с $\Delta s = 1$, можно показать, что аксиальная часть матричного элемента процесса

$$K^+(p) \to \pi^0(p') \; e^+(q_1) \, \nu(q_2) \; \nu(k) , \tag{12}$$

$$M^A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} e^{-1} \frac{f_k C_k}{m^3_k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k_\rho (p + p')_\sigma + 0(q) .$$

Константа C_k может быть измерена при исследовании реакции $\pi N \to K \gamma \Lambda$, где необходимо выделить вклад K – мезонного полюса. Другой возможностью является исследование образования π –мезоном $K \bar{K}$ пар в кулоновском поле ядра.

3. Распады $\pi^+(p) \to e^+(k_1)\, e^-(k_2)\, e^+(q_1)\, \nu(q_2)$,

$K^+(p) \to e^+(k_1)\, e^-(k_2)\, e^+(q_1)\, \nu(q_2)$.

Рассмотрим первый из них. Матричный элемент аксиального тока (рис. 4,5) имеет вид:

$$M^A = \frac{eG}{\sqrt{2}} \{ \epsilon_\mu(k_1,k_2)\, \ell_\nu(q_1,q_2)\, M^A_{\mu\nu}(k_1+k_2,\ q_1+q_2) - \tag{13}$$

$$-(k_1 \rightleftarrows q_1) \},$$

где

$$\epsilon_\mu(k_1,k_2) = \frac{1}{(k_1+k_2)^2}\, \bar{u}(k_2)\, \gamma_\mu\, u(k_1)$$

$$\ell_\nu(q_1,q_2) = \bar{u}(q_2)\, \gamma_\nu (1+\gamma_5)\, u(q_1) .$$

Наиболее общий вид $\epsilon_\mu\, \ell_\nu\, M^A_{\mu\nu}$:

$$\epsilon_\mu\, \ell_\nu\, M^A_{\mu\nu}(k,q) = -f_\pi \{ -\frac{M_\mu(k,q)\, q_\nu}{q^2 - m_\pi^2} + \delta_{\mu\nu} + \tag{14}$$

$$+ a(k^2,q^2)\,[(kq)\,\delta_{\mu\nu} - q_\mu k_\nu] + a_1(k^2,q^2)(k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) +$$

$$+ A(k^2,q^2)\,[k^2 q_\mu q_\nu - (kq)\, k_\mu q_\nu] \}\, \epsilon_\mu \ell_\nu$$

получен применением условия(4). Первое слагаемое содержит электромагнитную вершину π -мезона:

$$M_\mu(k,q) = F_\pi\,(k^2,q^2)(2q+k)_\mu + g_\pi(l^2,q^2)\,k_\mu\,. \qquad (15)$$

При вычислении $k_\ell\, \ell_\nu\, M^A_{\mu\nu}$ необходимо учесть тождество Уорда-Такахаши в форме /5/ :

$$(q^2-m^2_\pi)\,F_\pi\,(k^2,q^2) - k^2 g_\pi\,(k^2,q^2) = q^2 - m^2_\pi \qquad (16)$$

$a(k^2,q^2)$, $a_1(k^2,q^2)$, $A(k^2,q^2)$ – форм-факторы, которые нельзя определить с помощью(4). Отметим, что эти форм-факторы не содержат полюса в точке $q^2 = m^2_\pi$. Согласно(6),

$$\epsilon_\mu q_\nu M^A_{\mu\nu} = f_\pi\left[(\epsilon q) + \frac{m^2_\pi}{q^2 - m^2_\pi}\,\epsilon_\mu M_\mu \right], \qquad (17)$$

где в качестве M_μ следует взять(15). С другой стороны подставляя в(14)q_ν вместо ℓ_ν, получим

$$\epsilon_\mu q_\nu M^A_{\mu\nu} = -f_\pi\left\{ -\frac{q^2}{q^2 - m^2_\pi}\,\epsilon_\mu M_\mu + (\epsilon q)\cdot\left[k^2 a\,(l^2,q^2) + k^2 q^2 A\,(k^2,q^2)\right]\right\}. \qquad (18)$$

Сравнивая (17) и (18) и учитывая (15), приходим к равенству

$$1 + k^2 a_1 (k^2, q^2) + k^2 q^2 A (k^2, q^2) = \tag{19}$$
$$= 2 F_\pi (k^2, q^2) - 1 .$$

При $k^2 = 0$, $F_\pi (0, q) = 1$, что находится в соответствии с (16). При $q^2 = 0$

$$1 + k^2 a (k^2, 0) = 2 F_\pi (k^2, 0) - 1 . \tag{20}$$

Зависимость форм-факторов a, a_1, A в (14) от q^2 можно оценить с помощью полюсной диаграммы от аксиального векторного мезона A_1 (1080). Так как в нашем случае $q^2_{max} = m^2_\pi$, то такая оценка указывает на то, что $a_1(k^2, q^2) = a_1(k^2, 0)$ с точностью $\le \frac{m^2_\pi}{m^2_{A_1}} = 2\%$.

Форм-фактор $a(k^2, q^2)$ с помощью (6) определить не удается, так как третье слагаемое в (14) пропорционально (kq). Однако существуют как экспериментальные, так и теоретические оценки для a /6/.

Таким образом выражение (14) с учётом требований градиентной инвариантности и точного PCAC с $\Delta s = 0$ принимает вид:

$$\epsilon_\mu \ell_\nu M^A_{\mu\nu} = - f_\pi \{ - F_\pi (k^2, q^2) \frac{2(\epsilon q)(\ell q)}{q^2 - m^2_\pi} + \tag{21}$$
$$+ a [(\epsilon \ell)(kq) - (\epsilon q)(\ell k)] +$$
$$+ [2 F_\pi (k^2, 0) - 1] (\epsilon \ell) + 0 (\frac{q^2}{m^2_{A_1}}) \}.$$

Матричный элемент векторного тока (рис. 6) определяется по аналогии с (13). Требования (4) и (6) приводят к

$$k_\mu \ell_\nu M^V_{\mu\nu} = \epsilon_\mu q_\nu M^V_{\mu\nu} = 0, \tag{22}$$

т.к. $\langle 0 | I^V_\mu | \pi \rangle = 0$. Уравнение (22) означает, что для нахождения $\epsilon_\mu \ell_\nu M^V_{\mu\nu}$ можно воспользоваться гипотезой сохранения векторного тока (CVC). Это позволяет связать матричный элемент векторного тока (рис. 6) с амплитудой $\pi^0 \to \gamma e^+ e^-$.

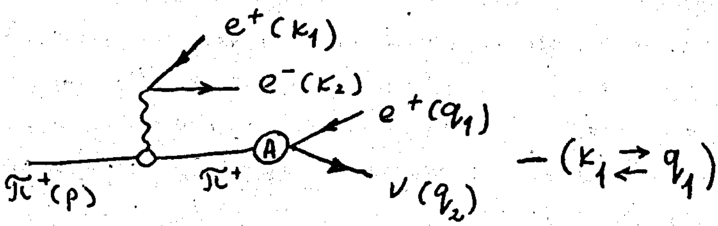

Рис. 4

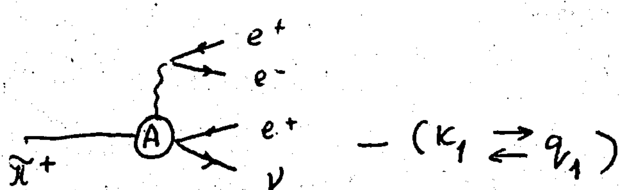

Рис. 5

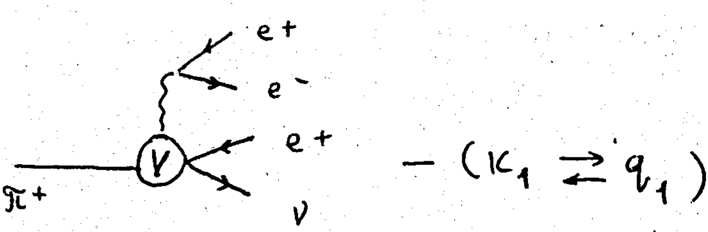

Рис. 6

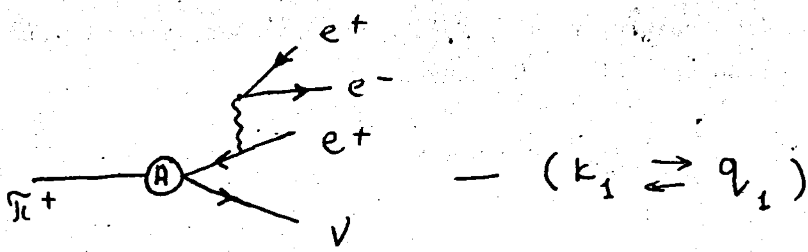

Рис. 7

Диаграмма (рис. 7) учитывается с помощью обычных правил квантовой электродинамики. Таким образом, амплитуда $\pi^+ \to e^+ e^- e^+ \nu$ известна с точностью до $0\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \approx \frac{m_\pi^2}{m_{A_1}^2} = 2\,\%$, при предположении точного PCAC и CVC. Это позволяет, по крайней мере в принципе, определить электромагнитный форм-фактор π – мезона F_π в области $0 \le k^2 \le m_\pi^2$. Эту область значений k^2 нельзя достигнуть ни при изучении $e\pi$ рассеяния, ни в процессе $e^+ e^- \to \pi^+ \pi^-$. Точно таким же образом можно определить матричный элемент аксиального тока для $K^+(p) \to e^+(k_1) e^-(k_2) e^+(q_1) \nu(q_2)$, где нужно применить PCAC с $\Delta s = 1$. Аналогично тому, как были получены (14) и (21), получаем

$$M^A = \frac{eG}{\sqrt{2}}\{\epsilon_\mu(k_1, k_2)\ell_\nu(q_1, q_2)M^A_{\mu\nu}(k_1+k_2,\ q_1+q_2) - (k_1 \rightleftarrows q_1)\} \tag{23}$$

$$\epsilon_\mu \ell_\nu M^A_{\mu\nu} = -f_k\{-F_k(k^2, q^2)\frac{2(\epsilon q)(\ell q)}{q^2 - m_k^2} + a_k[(\epsilon \ell)(kq) - (\epsilon q)(\ell k)] + [2F_k(k^2, 0) - 1](\epsilon \ell) + 0(q^2)\}. \tag{24}$$

Для процессов распада $\pi^+ \to e^+ e^- \mu^+ \nu$ и $K^+ \to e^+ e^- \mu^+ \nu$ антисимметризацию по заряженным лептонам не нужно проводить.

Тогда (13) и (23) переходят в

$$M^A = \frac{eG}{\sqrt{2}} \epsilon_\mu (k_1, k_2) \ell_\nu (q_1, q_2) M^A_{\mu\nu} (k_1 + k_2, q_1 + q_2), \qquad (25)$$

где $\epsilon_\mu \ell_\nu M^A_{\mu\nu}$ берется соответственно либо (21), либо (24).

В заключение автор благодарит Л.И.Лапидуса за поддержку и неоднократные обсуждения работы, а также Д.Ю.Бардина, А.В.Тарасова и Н.М.Шумейко за обсуждение результатов.

Литература

1. F.L. Low. Phys. Rev., 110, 974 (1959).
2. S.L. Adler, Y. Dothan. Phys. Rev., 151, 1274 (1966).
3. M. Gell-Mann Physics, 1, 63 (1964).
4. В.А. Мещеряков, Л.Л.Неменов, Л.Д.Соловьев, П.Строкач, Ф.Г.Ткебучава. ЯФ, 2, 124 (1965).
5. Г.Бартон. "Дисперсионные методы в теории поля", стр. 196, Атомиздат, 1968.
6. В.С.Березинский, ЯФ, 8, 1208 (1968).
   P. Depomier, Y.Heintze, C. Rubbia, V. Soergel. Phys. Lett., 7, 285 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 января 1970 года.