ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4866

В.Н. Первушин

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЭЙКОНАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АМПЛИТУД ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4866

В.Н. Первушин

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЭЙКОНАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АМПЛИТУД ПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

§1. В в е д е н и е

В последнее время глауберовское представление для амплитуды потенциального рассеяния высокоэнергетических частиц [1] с успехом применяется для объяснения экспериментальных данных [2].

При получении этого представления с помощью методов, не связанных с теорией возмущения, обычно исследуют эйкональное приближение точных волновых или гриновских функций [1,3,4]. Найденное таким способом выражение для амплитуды несимметрично относительно начального и конечного импульсов и справедливо лишь для малых углов рассеяния [5].

В настоящей работе данная задача решается в рамках метода функционального интегрирования. Это позволяет получить симметричное по импульсам выражение для амплитуды и тем самым уточнить эйкональное приближение для больших углов рассеяния, найденное в работе Шиффа [5] с помощью теории возмущения.

Мы попытались также найти связь полученного представления для амплитуды потенциального рассеяния с приближением эйконала в квантовой теории поля, рассмотренном в работах [6,7,8,9].

В §2 исследуется случай взаимодействия бесспиновых частиц со скалярным потенциалом, а в §3 – спинорных частиц с векторным потенциалом.

§2. <u>Потенциальное рассеяние частиц со спином ноль</u>

Рассмотрим представление амплитуды рассеяния бесспиновой частицы на потенциале $g\phi(x)$ через функциональный интеграл по траекториям. Для этого будем искать амплитуду с помощью причинной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$[(i\partial)^2 - m^2 + g\phi(x)]\,G(x,y\,|\,\phi) = -\delta^4(x-y), \qquad (1)$$

по формуле

$$F(p,q\,|\,\phi) = \lim_{p^2,\ q^2\to m^2} (p^2-m^2)(q^2-m^2)\,G(p,q\,|\,\phi), \qquad (2)$$

где

$$G(p,q\,|\,\phi) = \int d^4x\, d^4y\, e^{ipx - iqy}\, G(x,y\,|\,\phi). \qquad (3)$$

Для функции Грина $G(x,y|\phi)$ используем замкнутое выражение, найденное в работе /10/ с помощью собственно-временного формализма Фока и интегрального представления в функциональном пространстве:

$$G(x,y\,|\,\phi) = i\int_0^\infty ds\, e^{-im^2 s}\, C\int\delta^4\nu\, \exp\{-i\int_0^s d\xi\,[\nu_\mu^2(\xi) - g\phi(x - 2\int_\xi^s d\eta\,\nu(\eta))]\}\times$$
$$\times\ \delta^4(x-y-2\int_0^s \nu(\xi)\,d\xi). \qquad (4)$$

Функциональный интеграл берется по гауссовой мере в пространстве четырех функций $\nu_\mu(\xi)$. Константа C выбирается таким образом, чтобы $C\int\delta^4\nu\,\exp\{-i\int_0^s d\xi\,\nu^2(\xi))\} = 1$.

Подставим (4) в формулу (3), где производится интегрирование по x, и сделаем подстановку $\omega_\mu(\xi) = \nu_\mu(\xi) - p_\mu$. Вместо выражения (3) получим:

$$G(p,q\,|\,\phi) = i\int d^4y\, e^{iTy}\int_0^\infty ds\, e^{i(p^2-m^2)s}\int\delta^4\omega\,\exp\{-i\int_0^s d\xi[\omega^2(\xi) - g\phi(y+2p\xi+2\int_0^\xi\omega(\eta)\,d\eta)]\}, \qquad (5)$$

где $T = p - q$. Вычтем из $G(p,q|\phi)$ свободную функцию Грина $G_0 = \frac{(2\pi)^4\delta^4(p-q)}{p^2-m^2}$, которая не дает вклада в амплитуду (2), применяя при этом тождество

$$e^a - 1 = \int_0^1 d\lambda\; a\; e^{\lambda a}.$$

Тогда для функции $G'(p,q\,|\,\phi) = G(p,q\,|\,\phi) - G_0(p,q)$ будем иметь

$$G'(p,q\,|\,\phi) = i\int dy\, e^{iTy}\int_0^\infty ds\int_0^s d\eta\, e^{i(p^2-m^2)s}\int\delta^4\omega\,\exp\{-i\int_0^s d\xi\,\omega^2(\xi)\}\times$$
$$\times\, ig\,\phi(y+2p\eta+\int_0^\eta\omega(\eta')\,d\eta')\int_0^1 d\lambda\,\exp\{i\lambda g\int_0^s d\xi\,\phi(y+2p\xi+2\int_0^\xi\omega(\eta')\,d\eta')\}. \qquad (6)$$

Производя в (6) замену переменных

$$y = y' - 2p\eta - \int_0^\eta \omega(\eta')\,d\eta',$$
$$\omega(\xi) = \omega'(\xi) - (p-q)\,\theta(\eta-\xi),\quad \theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases} \qquad (7)$$

и используя соотношение /11/

$$\lim_{a,\epsilon\to 0} ia\int_0^\infty ds\, e^{ias-\epsilon s} f(s) = f(\infty) \tag{8}$$

(где $f(s)$ - конечная функция), которое позволяет выделить полюса (p^2-m^2) , (q^2-m^2) , окончательно для амплитуды рассеяния (2) получим выражение

$$F(p,q|\phi) = \int d^4y\, e^{iTy} g\phi(y) \int \delta^4\omega\, \exp\{-i\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2(\eta)d\eta\} \times$$
$$\times \int_0^1 d\lambda\, \exp\{i\lambda\int_{-\infty}^{\infty} g\phi[y+2p\theta(\xi)\xi+2q\theta(-\xi)\xi+2\int_0^{\xi}\omega(\eta)d\eta]\,d\xi\}. \tag{9}$$

Будем считать, что потенциал $\phi(y)$ - гладкая, ограниченная функция, так что $|\max\phi(y)|=1$. Рассмотрим асимптотическое поведение амплитуды (9) при таких энергиях E_p , E_q рассеивающейся частицы, что справедливы условия:

$$E_p \gg g^{1/2}\ ;\ |\vec{p}| \gg \frac{|\frac{\partial}{\partial r}\phi|}{|\phi|} \cong \frac{1}{R}\ ,\ E \gg \frac{|\frac{\partial}{\partial t}\phi|}{|\phi|} \cong \frac{1}{\tau}\ . \tag{10}$$

При этом $E_p \gg E_p - E_q$, а R и τ - эффективный радиус и продолжительность взаимодействия. Далее для простоты положим $R \approx \tau$.

Приближение больших энергий в рамках метода функционального интегрирования выполняется сравнительно просто. Действительно, переходя под знаком последней экспоненты в (9) к интегрированию по временной координате t с помощью замены $2E\xi = t$, мы получим возможность разложить потенциал, а, следовательно, указанную экспоненту, в ряд по степеням функциональной переменной $\int_0^{\xi}\omega(\eta)d\eta = \frac{1}{2E}\int_0^t dt'\omega(\frac{t'}{2E})$, что естественно при $E\to\infty$ x/.

Учитывая в этом разложении первые три члена и выполняя функциональное усреднение (см., например, /12/), для амплитуды (9) получим выражение

$$F(p,q) = \int d^4y\, e^{iTy} g\phi(y)\int_0^1 d\lambda\, e^{i\lambda\chi_0(y)}[1+\lambda g\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\cdot\xi\,\Box\phi(y+2p\,\theta(\xi)\xi+2p\theta(-\xi)\xi)+$$
$$+i\lambda^2 g^2\iint_{-\infty}^{\infty} d\xi_1\, d\xi_2 \min(\xi_1,\xi_2)\partial_\mu\phi(y+2p\theta(\xi_1)\xi_1+2q\theta(-\xi_1)\xi_1)\,\partial_\mu\phi(y+2p\theta(\xi_2)\xi_2+$$
$$+2q\theta(-\xi_2)\xi_2)+\ \dots], \tag{11}$$

где

$$\chi_0(y) = g\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\phi(y+2p\theta(\xi)\xi+2q\theta(-\xi)\xi),\quad \min(\xi_1,\xi_2) = \begin{cases}\xi_1 & \xi_1<\xi_2,\\ \xi & \xi=\xi_1=\xi_2,\\ \xi_2 & \xi_1>\xi_2.\end{cases}$$

С учётом замены $2E_i=t_i$ легко видеть, что последние два слагаемых в квадратных скобках имеют порядок $\frac{g}{E^2}$, $\frac{g^2R}{E^3}$ соответственно. Это совпадает с порядком поправок, приведенных в работе Шиффа и Саксона /4/, где произведен анализ соотношений между основным членом и поправками при эйкональном приближении.

Таким образом, при условиях (10) разложение в ряд по степеням функциональной переменной в (9) является одновременно разложением по малому параметру $\frac{1}{E}$.

---

x/ Такой метод приближенного функционального интегрирования впервые использовал Яглом /12/ при нахождении квантовой статистической суммы в квазиклассическом приближении.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда потенциал от времени не зависит $\phi(x)=\phi(t,\vec{r})=\phi(\vec{r})$. Тогда, учитывая лишь первый, основной член в разложении (11), для амплитуды рассеяния получим следующее представление:

$$F(p,q)=2(2\pi)^2\delta(E_p-E_q)f(p,q),$$

$$f(p,q)=\frac{1}{4\pi}\int d^3r\ e^{i\vec{r}\vec{T}}g\phi(\vec{r})\int_0^1 d\lambda \exp\{i\lambda\chi_0(\vec{r})\},\qquad (12)$$

где

$$\chi_0(\vec{r})=\frac{g}{2|\vec{p}|}\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\phi(\vec{r}+\hat{p}\theta(s)+\hat{q}\ \theta(-s)s);\ \hat{p}=\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}. \qquad (13)$$

Заметим, что полученное представление (12), которое справедливо для любых углов рассеяния, отличается от аналогичного в работе Шиффа [5] на интеграл по λ. Можно убедиться, что более строгий расчёт в рамках метода, предложенного в работе Шиффа, также приводит к интегралу по λ [x].

Выбирая ось z вдоль импульса $\vec{p}$, а плоскость x, z в плоскости векторов $\vec{p}$, $\vec{q}$ и вводя обозначения $\vec{r}=(\vec{b},z)$, $\vec{b}=(x,y)$, при малых углах рассеяния $\psi\ll 1$ для фазы будем иметь [13]:

$$2|\vec{p}|\chi_0(r)=g\int_0^{\infty}ds\phi(b,z+s)+g\int_{-\infty}^{0}ds\phi(x+s\sin\psi,y,z+s\cos\psi)= \qquad (14)$$

$$=g\int_{-\infty}^{\infty}ds\,\phi(\vec{b},z+s)+\psi\int_{-\infty}^{0}ds\,s\frac{\partial}{\partial x}\phi(\vec{b},z+s)+O(\psi^2)\cong \qquad (15)$$

$$=g\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\phi(r)=2|\vec{p}|\chi_0(\vec{b}), \qquad (16)$$

так как порядок величин двух членов в (15) есть gR и ψgR соответственно.

Интегрируя в (12) по λ, для амплитуды рассеяния получим выражение

$$f(p,q)=\frac{|\vec{p}|i}{2\pi}\int d^2b\ e^{i\vec{b}\vec{T}}\frac{\tilde{\tilde{\phi}}(\vec{b},T_z)}{\tilde{\tilde{\phi}}(\vec{b},0)}(1-e^{i\chi_0(\vec{b})}), \qquad (17)$$

где

$$\tilde{\tilde{\phi}}(\vec{b},T_z)=\int dz\,e^{izT_z}\phi(\vec{r}).$$

При $\psi\ll(pR)^{-1/2}$ в (18) можно пренебречь изменениями множителя e^{izT_z} (так как $\max(zT_z)=Rp\psi^2\ll 1$). Тогда $\tilde{\tilde{\phi}}(\vec{b},T_z)=\tilde{\tilde{\phi}}(\vec{b},0)$, и мы приходим к глауберовскому представлению для амплитуды [1].

При рассмотрении рассеяния на потенциале, зависящем от времени, когда есть запаздывание, удобно перейти к однородным координатам $y_\mu=(\vec{b},y_z,y_0)=(b,\eta,\gamma)$, где

$$\left.\begin{aligned}\eta&=\frac{vy_0-y_z}{2}\\ \gamma&=\frac{y_0+y_z\frac{1}{v}}{2}\end{aligned}\right\}\quad v=\frac{|\vec{p}|}{E},\ \ \mathrm{Det}\left|\frac{y_0\ y_z}{\eta,\gamma}\right|=2. \qquad (19)$$

Аналогично предыдущему случаю легко показать, что при $\psi\ll(pR)^{-1/2}$, $E_p-E_q=\Delta E\ll E_p$ в аргументе фазы χ_0 можно пренебречь зависимостью от параметров передачи импульса и положить $p_\mu=q_\mu$. Тогда для $\chi_0(y)$ будем иметь:

---

[x] Такой же результат был недавно получен Леви и Шухером [16] с помощью теории возмущения.

$$\chi_0=\frac{g}{2|\vec p|}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\vec b,\eta+s,\gamma)\,ds=\chi_0(\vec b,\gamma), \tag{20}$$

Учитывая, что при принятых обозначениях (19) и ограничениях на угол ψ

$$Ty=-\vec T\vec b+\gamma E_\gamma+\eta E_\eta,\quad E_\gamma=\frac{E\Delta E-p\Delta p}{E},\quad E_\eta=\frac{E\Delta E+p\Delta p}{p}, \tag{21}$$

из (11) для амплитуды рассеяния получим следующее представление:

$$F(p,q)=4i|\vec p|\int d^2b\,d\gamma\, e^{i\vec b\vec T+\gamma E_\gamma}\frac{\tilde{\tilde\phi}(\vec b,\gamma,E_\eta)}{\tilde{\tilde\phi}(\vec b,\gamma,0)}(e^{i\chi_0(\vec b,\gamma)}-1). \tag{22}$$

Здесь

$$\tilde{\tilde\phi}(\vec b,\gamma,E_\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(y)\,e^{i\eta E_\eta}\,d\eta.$$

Если передача энергии настолько мала, что $\frac{E\Delta E}{p}\ll\frac{1}{r}$, то $\tilde{\tilde\phi}(\vec h,\gamma,E_\eta)=\tilde{\tilde\phi}(\vec b,\gamma,0)$. В этом случае мы получим для амплитуды представления глауберовского типа. Эйкональная фаза зависит лишь от координат гиперплоскости, ортогональной 4-импульсу рассеивающейся частицы.

§3. Рассеяние спинорных частиц

Как и в предыдущем параграфе, амплитуду рассеяния спинорной частицы на векторном потенциале $A_\mu(x)$, $\partial_\mu A_\mu(x)=0$ будем искать с помощью причинной функции Грина уравнения

$$[i\hat\partial-m+\hat A(x)]\,G(x,y|A)=-\delta^4(x-y) \tag{1}$$

по формуле

$$F(p,q|A)=\lim_{p^2,q^2\to m^2}\bar u_p(\hat p-m)G(p,q|A)(\hat p-m)u_q, \tag{2}$$

где

$$G(p,q|A)=\int d^4x\,d^4y\,e^{ipx-iqy}\,G(x,y|A). \tag{3}$$

Спиноры $\bar u_p$ и u_q на массовой поверхности удовлетворяют свободному уравнению Дирака и условию нормировки $\bar u_p u_q=2m$.

Нам удобно перейти к двухкомпонентному описанию спиноров по правилам, предложенным в работе /14/.

Выберем представление γ - матриц, где γ_5 - диагональна:

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}0,I\\ I,0\end{pmatrix},\quad \vec\gamma=\begin{pmatrix}0,&\vec\sigma\\ \vec\sigma,&0\end{pmatrix},\quad \gamma_5=i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\begin{pmatrix}I,0\\ 0,-I\end{pmatrix} \tag{4}$$

и введем двухкомпонентные обозначения:

$$\bar u_p=\sqrt m\,(\Psi_{p(+)},\Psi_{p(-)}),\quad u_q=\begin{pmatrix}\Psi_{q(+)}\\ \Psi_{q(-)}\end{pmatrix}\sqrt m,\quad G=\begin{pmatrix}G_{(+)},&G_1\\ G_2,&G_{(-)}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Следуя работе [14], введем спинор $u_{q(+)}$, удовлетворяющий условию $\gamma_5 u_{q(+)} = u_{q(+)}$ [x/], по формуле

$$u_q = \frac{1}{m}(\hat{q}+m)\, u_{q(+)} , \qquad (6)$$

который связан с u_q также соотношением

$$u_{q(+)} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\, u_q = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \Psi_{q(+)} \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим:

$$u_q = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{q_0 - \vec{\sigma}\vec{q}}{m} \end{pmatrix} \sqrt{m}\,\Psi_{q(+)} , \qquad (8)$$

где σ_i – матрицы Паули. Действуя аналогичным образом для $\bar{u}_p$, получим

$$\bar{u}_p = \sqrt{m}\,\bar{\Psi}_{p(+)}\left(1,\ \frac{p_0+\vec{\sigma}\vec{p}}{m}\right). \qquad (9)$$

Выражение для амплитуды (2) в двухкомпонентном описании принимает вид

$$F(p,q) = \lim_{p^2,\, q^2 \to m^2} (p^2-m^2)(q^2-m^2)\,\bar{\Psi}_{p(+)} G'_{(+)}(p,q)\,\Psi_{q(+)} , \qquad (10)$$

---

x/ Мы выбрали u_q с (+) – чётностью при γ_5 – преобразовании, поскольку этот знак правильно отражает спиральность частиц при высоких энергиях. Для описания античастиц нужно использовать спинор $u_{(-)}$, $(\gamma_5 u_{(-)} = -u_{(-)})$.

где введено обозначение $G'_{(+)} = \frac{1}{m} G_{(+)}$. В дальнейшем мы будем опускать индексы (+), (–) там, где это не вызовет никаких сомнений.

Функция Грина $G'_{(+)}(x,y|A)$, как это легко показать (см. [14]), удовлетворяет уравнению

$$[(i\partial_\mu + A_\mu(x))^2 - m^2 + \vec{\sigma}(\vec{H}(x) + i\vec{E}(x))]\, G'(x,y|A) = -\delta^4(x-y). \qquad (11)$$

Здесь $\vec{H}$ и $\vec{E}$ –напряженности магнитного и электрического полей. Для краткости примем обозначение: $\vec{\sigma}(\vec{H}+i\vec{E}) = \Gamma A(x)$,

$$\Gamma = (\Gamma_0\, ; \vec{\Gamma}) = (i\vec{\sigma}\vec{\nabla}\ ;\ -\vec{\nabla}\times\vec{\sigma}\ \ i\partial_0\vec{\sigma}). \qquad (12)$$

Используя для функции Грина $G'(x,y|A)$ замкнутое выражение в виде функционального интеграла [10] и проводя при выделении полюсов (p^2-m^2), (q^2-m^2) в (10) те же выкладки, что и в предыдущем параграфе, для амплитуды рассеяния (3) получим выражение

$$F(p,q|A) = \bar{\Psi}_p \int dy\, e^{iTy} (p+q+\Gamma) A(y) \int \delta^4\omega \exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2(\xi)\, d\xi\right\} \times$$
$$\times \int_0^1 d\lambda\ T_\sigma \exp\left\{ i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [2\omega(\xi) + 2p\,\theta(\xi) + 2q\,\theta(-\xi) + \Gamma] \times \right. \qquad (13)$$
$$\left. \times A\left(y + 2p\,\theta(\xi)\xi + 2q\,\theta(-\xi)\xi + \int_0^{\xi}\omega(\eta)\, d\eta\right)\right\} \Psi_q .$$

Здесь T_σ – символ упорядочивания σ – матриц по переменной ξ [15].

При условиях гладкости и ограниченности всех компонент векторного потенциала, которые легко получить из условий (10) §2, полагая там $g = E\,|\max A|$, в рамках уже описанного метода приближения при

$E \to \infty$, $\psi \ll 1$, $\Delta E \ll E_p$ для амплитуды (13) будем иметь:

$$F_{Э}(p,q|A) = \bar{\Psi}_p \Psi_q \int d^4 y e^{iTy}\, 2pA(y) \int_0^1 d\lambda e^{i\lambda \chi_0(y)}, \qquad (14)$$

где

$$\chi_0(y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, 2pA(y + 2p\xi). \qquad (15)$$

Легко видеть, что (14) совпадает с аналогичным выражением в §2 (см. (11)) с точностью до замены $g\phi \to 2pA$. Отличия от скалярного случая в основном будут появляться при вычислении поправок. При рассеянии в кулоновском поле $A_0(x) = \phi(\vec{r})$, $\vec{A} \equiv 0$ учёт первой поправки к спин-флип-амплитуде приводит к следующему глауберовскому представлению:

$$F(p,q) = \delta(E_p - E_q) 4\pi |\vec{p}|\, i\bar{\Psi}_p \int d^2 b\, e^{-i\vec{b}\vec{T}} \left[1 - e^{i\chi_0(\vec{b})}\left(1 - \frac{\vec{\nabla}\vec{\sigma}}{2E}\chi_0(\vec{b})\right)\right]\Psi_q,$$

где фазу $\chi_0(\vec{b})$ можно получить из (16) §2, полагая там $g = 2E$.

Используя то обстоятельство, что мы не ограничивали себя специальным видом потенциала, продемонстрируем получение из эйконального выражения (14) глауберовского представления для амплитуды рассеяния двух спинорных частиц, обменивающихся виртуальными нейтральными векторными мезонами (см. работы /7,8,9/). Применим для этого операцию функционального усреднения произведения классических амплитуд (14)

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) F(p_1, p_2, q_1, q_2) = \exp\left\{-ig^2 \frac{\delta}{\delta A_{\mu 1}} D_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta A_{\nu 2}}\right\} F_{Э}(p_1 q_1|A_1) \times$$
$$\times F(p_2, q_2|A)\Big|_{A_1 = A_2 = 0} = \int d^4 y_1 d^4 y_2 e^{iT_1 y_1 + iT_2 y_2} \int_0^1 d\lambda_1 d\lambda_2 [ig^2 s D(y_1 - y_2) + \qquad (16)$$
$$+ i^2 \lambda_1 \lambda_2 \chi_1 \chi_2] e^{i\lambda_1 \lambda_2 \chi_0} \bar{\Psi}_{p_1} \Psi_{q_1} \bar{\Psi}_{p_2} \Psi_{q_2},$$

где

$$\chi_1 = g^2 s \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 D(y_1 - y_2 + 2p_1\xi_1),$$

$$\chi_2 = g^2 s \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 D(y_1 - y_2 - 2p_2\xi_2),$$

$$\chi_0 = g^2 s \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 D(y_1 - y_2 + 2p_1\xi_1 - 2p_2\xi_2) = \frac{g^2}{2\pi} K_0(\kappa\sqrt{\vec{b}^2}). \qquad (17)$$

$s = (E_p + E_q)^2 \approx 4pq$ – мандельстамовская переменная, κ – масса мезона $\vec{b}$ – компоненты 4-вектора $y_1 - y_2$ в плоскости, ортогональной импульсам p_1, p_2, $K_0(x)$ – функция Кельвина нулевого порядка.

Переходя в (16) к переменным $x = y_1 + y_2$, $b + 2p_1\gamma_1 - 2p_2\gamma_2 = y_1 - y_2$ и интегрируя по x, γ_1, γ_2, λ_1, λ_2, с учётом $(p_1 - q_1)p_1 \cong$ $\cong (p_1 - q_1)p_2 \cong 0$ получим для амплитуды рассеяния глауберовское представление

$$F(p_1 p_2|q_1 q_2) = s\bar{\Psi}_{p_1} \Psi_{q_1} \Psi_{p_2} \Psi_{q_2} \int d^2 b\, e^{i\vec{b}\vec{T}} (1 - e^{i\chi_0(\vec{b})}). \qquad (18)$$

Подробное обсуждение вопросов о связи данного метода приближения с теорией возмущения, а также о справедливости выражения (18) в различных моделях делается в работах /7,8,9/. Мы ограничимся лишь следующими замечаниями.

Выражение $F_{Э}(p,q|A)$ справедливо при условиях гладкости и ограниченности функций A_μ. Замена каждых двух гладких функций $A_{\mu 1}(y)$ и $A_{\nu 2}(y)$ на сингулярную функцию Грина в (16) кажется действием, противоречащим указанным условиям. Однако окрестностью сингулярной точки ноль в интеграле (18) можно пренебречь из-за сильно осциллирующего множителя $e^{i\chi_0(\vec{b})}$, тогда во всей оставшейся области значений переменной $\vec{b}$ фаза $\chi_0(\vec{b})$ и эффективный потенциал удовлетворяют условиям эйконального приближения при $s \to \infty$, т.е. операция (16) вполне корректна. Вопрос о гладкости потенциала рассмотрен также в работе /17/.

Заключение

Было получено точное замкнутое выражение для амплитуды потенциального рассеяния частиц со спином 0,1/2 в виде функционального интеграла по траекториям. Это позволило сравнительно просто разложить амплитуду по степеням малого параметра $\frac{1}{E}$. Первый член указанного разложения является эйкональным приближением для амплитуды рассеяния на любые углы и совпадает в случае динамически малых углов $\psi \ll (pR)^{-1/2}$ с глауберовским представлением.

Мы нашли асимптотический вид амплитуды рассеяния двух частиц, обменивающихся виртуальными мезонами. Аналогичный результат был получен в работе /7/ функциональным интегрированием по внешним полям точных функций Грина и последующим эйкональным разложением на массовой поверхности. Эквивалентность этого более точного метода с приближением, описанным в нашей работе (см. также /8,9/), связана с интересным вопросом о перестановке операций эйконального приближения и вторичного квантования.

Если последнее справедливо, то глауберовское представление для амплитуды (18) в квантовой теории поля является следствием приближения эйконала в квантовой механике.

Автор очень благодарен Б.М.Барбашову за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний в процессе ее выполнения, а также профессору А.Н.Тавхелидзе, С.П.Кулешову, В.А.Матвееву, М.В.Савельеву, А.Н.Сисакяну за плодотворные и стимулирующие обсуждения.

Литература

1. R.I. Glauber. Lectures in Theoretical Physics, ed. W.F. Brittin, L.G. Dunham, vol.I, N.Y., 1959, p.315.
2. W. Czysz and K.L. Lesniak. Phys.Letteres, 24B, 227 (1967); 25B, 319 (1967); R.H. Bassel and C. Wilkin. Phys.Rev.Letters, 18, 871 (1967).
3. S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, A.N. Sissakian. JINR Communication, E2-4455, Dubna, 1969.
4. P.S. Saxon and L.I. Schiff. Nuovo Cim., 6, N.3, 614 (1957).
5. L.I. Schiff. Phys.Rev., 103, 443 (1956).
6. V.R. Garsevanishvili, V.A. Matveev, L.A. Slepchenko, A.N. Tavkhelidze. Phys. Letters, 29B, 191 (1969); Talk given at the Coral Colles Conference, Miami (1969).
7. B.M. Barbashov, S.P. Kuleshov, V.A. Matveev, A.N. Sissakian. JINR Communication, E2-4692, Dubna, 1969.
8. H.D.I. Abarbanel and C. Itzykson. Phys.Rev.Lett., 23, 53 (1969).
9. И.В.Андреев. ЖЭТФ, 58, 257 (1970).
10. Б.М.Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 (1965).
11. Г.А.Милёхин, Е.С.Фрадкин. ЖЭТФ, 45, 1926 (1963).
12. И.М.Гельфанд, А.М.Яглом. УМН, 11, 77 (1956).
13. L.I. Schiff. Phys.Rev., 176, 1390 (1968).
14. R. Feynman and M.Gell-Mann. Phys.Rev., 109, 193 (1958).
15. R. Feynman. Phys.Rev., 84, 108 (1951).
16. M. Levy and I. Sucher. University of Maryland. Technical report N. 983 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 декабря 1969 года.