10/II-70

E-924

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4864

А.В. Ефремов, В.А. Ризов

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ В АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4864

А.В. Ефремов, В.А. Ризов

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ В АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

В последние годы предпринято исследование одного класса моделей [1-7], в которых квантованное поле характеризуется со стороны его алгебраических свойств. В трансляционно-инвариантной теории скалярного поля $\phi(p)$ величины

$$\phi(p), [\phi(p_1), \phi(p_2)], \ldots, [..[\phi(p_1), \phi(p_2)], \phi(p_3)], \ldots,], \phi(p_n)]$$

и т.д. являются собственными элементами операторов $\mathrm{ad}\, P^{\mu}$, $\mu=0,1,2,3$, т.е.

$$[P^{\mu}, \phi(p)] = p^{\mu}\phi(p), [P^{\mu}, [\phi(p_1), \phi(p_2)]] = (p_1+p_2)^{\mu}[\phi(p_1), \phi(p_2)]$$

и т.д., где P^{μ} -генераторы трансляции группы Пуанкаре. Основное предположение упомянутых моделей по существу заключается в том, что коммутатор $[\phi(p), \phi(q)]$ как элемент из пространства собственного значения $(p+q)^{\mu}$ оператора $\mathrm{ad}\, P^{\mu}$ является линейной комбинацией лишь единичного оператора и собственного элемента $\phi(p+q)$ вида

$$[\phi(p), \phi(q)] = \delta(p+q) f(p) + g(p,q)\phi(p+q), \qquad (1)$$

а для полей, преобразующихся по другим представлениям группы Лоренца [5-7],

$$[\phi_\alpha(p), \phi_\beta(q)] = \delta(p+q)\, f_{\alpha\beta}(p) + \sum_\gamma g_{\alpha\beta\gamma}\phi_\gamma(p+q).$$

Исследования показали, что согласование свойств функций $f(p)$ и $g(p,q)$, вытекающих из тождества Якоби для такой алгебры полей, с локальностью и спектральностью приводит к единичной S -матрице.

Однако в работах [5,6] выражалась надежда, что если сделать линейным по полю двойной коммутатор $[[\phi(p), \phi(q)], \phi(k)]$, т.е. предположить, что, будучи элементом пространства собственного значения $(p+q+k)^\mu$ оператора $\mathrm{ad}\, P^\mu$, он представляется в виде .

$$[[\phi(p), \phi(q)], \phi(k)] = c(p,q,k)\phi(p+q+k),\ c(p,q,k) \neq 0, \tag{2}$$

то условия на обобщенную функцию $c(p,q,k)$, вытекающие из тождества Якоби,

$$c(p,q,k) + c(k,p,q) + c(q,k,p) = 0, \tag{3}$$

уже не будут столь ограничительными. Тогда, задавая в дополнение к (2) вакуумное среднее $\langle[\phi(p), \phi(q)]\rangle_0$, мы смогли бы вычислить нетривиальную S -матрицу.

Однако связь (3) не является единственным ограничением на функцию $c(p,q,k)$. Действительно, если определить оператор

$$K(p,q) = [\phi(p), \phi(q)],$$

то из (2) следует, что

$$[K(p,q), K(s,t)] = \int H(p,q,s,t;u,v)\, K(u,v)\, d^4u\, d^4v,$$

где H линейно связано с функцией c . Но теперь тождества Якоби для троек операторов $K(p,q)$, $K(s,t)$, $K(u,v)$ и $K(p,q)$, $K(s,t)$, $\phi(v)$ приведут к сложным нелинейным условиям на $c(p,q,k)$.

Мы не будем заниматься решением этих уравнений, а, исследовав представление группы Пуанкаре $U(a,\Lambda)$, по которому преобразуется скалярное поле со свойством (2), покажем, что оператор энергии не является положительно определенным, т.е. в рассматриваемой теории условие спектральности не выполняется.

Построим сначала генераторы трансляции, которые преобразуют поле по закону

$$[P^{\lambda}, \phi(p)] = p^{\lambda}\phi(p), \quad \lambda = 0,1,2,3. \tag{4}$$

Сравнение соотношений (4) и (2) показывает, что P^{λ} должны выражаться через коммутатор поля

$$P^{\lambda} = \int d^4p\, p^{\lambda} f(p) :[\phi(-p), \phi(p)]: , \quad \lambda = 0,1,2,3, \tag{5}$$

где, как обычно,

$$:AB: = AB - \langle AB \rangle_0 .$$

Из условия эрмитовости поля: $\phi(p)^{+} = \phi(-p)$, и, следовательно, вещественность функции $f(p)$ гарантирует эрмитовость операторов (5). Функция $f(p)$, кроме того, должна обладать свойствами

$$f(p) = f(-p), \tag{6}$$

$$f(\Lambda p) = f(p), \tag{7}$$

поскольку P^{λ} являются векторными операторами по отношению к преобразованиям Лоренца $U(\Lambda)$.

Для выполнения закона преобразования (4) необходимо, чтобы

$$\int p^{\mu} c(-p,p,q)\; f(p)\, d^4p = q^{\mu}, \quad \mu = 0,1,2,3. \tag{8}$$

Это равенство связывает функцию $c(p,q,k)$, определяющую динамику в рассматриваемой модели с представлением группы Пуанкаре. Проистекающее из эрмитовосопряженного равенства (2) свойство

$$c(p,q,k)^* = c(-p,-q,-k)$$

и следующая из (8) вещественность $c(-p,\ p,q)$ дают

$$c(-p,p,-q) = c(p,-p,q).$$

Используя соотношение (8) и лоренц-инвариантность $c(p,q,k)$, можно показать, что операторы

$$M^{\mu\nu} = i\int d^4p\; f(p) :\{p^{\mu}[\phi(-p), \frac{\partial\phi(p)}{\partial p_{\nu}}] - p^{\nu}[\phi(-p), \frac{\partial\phi(p)}{\partial p_{\mu}}]\}: ,$$
$$\mu,\nu = 0,1,2,3, \tag{9}$$

являются генераторами подгруппы Лоренца для поля $\phi(p)$ и преобразуют его по закону

$$[M^{\mu\nu}, \phi(k)] = i(k^{\mu}\frac{\partial\phi(k)}{\partial k_{\nu}} - k^{\nu}\frac{\partial\phi(k)}{\partial k_{\mu}}).$$

Простые, но длинные вычисления коммутаторов $[M^{\mu\nu}, M^{\sigma\tau}]$ и $[M^{\mu\nu}, P^{\sigma}]$ подтверждают, что операторы (5) и (9) при выполнении лоренц-инвариантности функций $f(p)$ и $c(p,q,k)$ и соотношения (8) действительно задают эрмитово представление генераторов группы Пуанкаре. Все другие представления, по которым преобразуется поле $\phi(p)$, будут эквивалентными данному (см., например, /8/).

Операторы 4-импульса (5) можно записать в другой форме:

$$P^k = 2 \int d^4p \, p^k f(p) : \phi(p)^+ \phi(p) :, \; k = 1,2,3 .$$

$$P^0 = 2 \int d^4p \, p^0 f(p) : \phi(p)^+ \phi(p) : .$$

Поскольку $f(p)$ – четная функция p, то оператор энергии не является положительно определенным и аксиома спектральности в рассматриваемой модели нарушается.

Отметим в заключение, что для теории, в которой выполняется соотношение (1), нахождение представления группы Пуанкаре еще не помогает установлению физической тривиальности теории и только одновременный анализ алгебраической структуры функций f и g с локальностью и спектральностью приводит к эквивалентности такой теории обобщенным свободным полям. В рассматриваемой здесь модели существенным для несохранения положительной определенности энергии оказался сам факт линейности по полю двойного коммутатора.

Один из нас, В.А.Р., выражает благодарность Д. Стоянову, Р. Зайкову и Б. Марковскому за полезные обсуждения.

Литература

1. O.W. Greenberg. Ann.Phys., 16, 158 (1961).
2. I.T. Lopuszański. Phys.Lett., 8, 85 (1964).
3. D.W. Robinson. Phys.Lett., 9, 189 (1964).
4. J.H. Lowenstein. Commun.math.Phys., 6, 49 (1967).

5. А.В. Ефремов. Препринт ОИЯИ, Р-3731, Дубна, 1968.
6. A.V.Efremov, in: "Axiomatic Approach to Quantum Field Theory and Many Body Problem, V.th Winter school in Karpacz", vol. IA, 98 (1968).
7. O.W. Greenberg. Commun.math.Phys., 9, 13 (1968).
8. Р.Ф. Стритер, А.С. Вайтман. PCT, спин и статистика и все такое. "Наука", 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 декабря 1969 года.