0-52

/I 70

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4812

А.И. Оксак, И.Т. Тодоров

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

1969

P2 - 4812

А.И. Оксак, И.Т. Тодоров

ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ФУНКЦИИ
ЛОКАЛЬНЫХ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ

8169/2 up

Объединенный [illegible]
ядерных исслед[illegible]
БИБЛИОТЕ[illegible]

Summary

A two-point function of local infinite-component fields ϕ and ψ transforming under arbitrary irreducible representations χ_1 and χ_2 of the proper Lorentz group is studied by the manifestly covariant technique. The locality and normal spectrum condition imply the following general form for the two-point function:

$$< 0 \mid \phi(x;f)\,\psi(y;g) \mid 0 > = \sum_n \sum_a \Gamma_a^{\mu_1 \dots \mu_n}(f,g)\,\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} F_{n,a}(x-y),$$

where $\Gamma_a^{\mu_1 \dots \mu_n}(f,g)$ are covariant continuous bilinear functionals over spaces of the representations χ_1 and χ_2; moreover $\Gamma_a^{\mu_1 \dots \mu_n}$ are symmetric 4-tensors of the n-th degree and satisfy the condition $g_{\mu_1 \mu_2} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$; $F_{n,a}(x)$ are positive-frequencies distributions, the number of $F_{n,a}$ which are different from zero being finite. A generalized version of the Grodsky-Sreater theorem on the infinite degeneracy of mass with spin in the infinite-component field theory is proved.

1. Введение

Одним из интересных вопросов теории бесконечнокомпонентных полей является задача отыскания представления (аналогичного известному представлению Челлена-Лемана[1]) для двухточечной функции, удовлетворяющей условиям спектральности и локальности. В[2-3] был найден общий вид в импульсном пространстве двухточечной функции полей φ и ψ, преобразующихся соответственно по неприводимым представлениям[x] $\chi_1=[k_1,c_1]$ и $\chi_2=[k_2,c_2]$ собственной группы Лоренца; при этом налагалось только сильное условие спектральности: спектр энергии-импульса принадлежит $\{0\}\cup V_+^{\mu}=\{p: p=0$ или $p^0\geq\sqrt{\mu^2+\vec{p}^2}\}$, где $\mu>0$ - массовая щель. В данной работе изучается двухточечная функция полей φ и ψ (также преобразующихся по представлениям χ_1 и χ_2) в координатном пространстве. В дополнение к условию спектральности, которое мы примем в слабой форме: спектр энергии-импульса лежит в $V_+ = \{p: p^0\geq|\vec{p}|\}$, - мы налагаем условие локальности поля (анти) коммутируют при пространственноподобном разделении аргументов.

В соответствии с[3] мы рассматриваем релятивистское квантовое поле φ, преобразующееся по представлению χ группы $L_+^{\uparrow}$, как операторнозначный билинейный функционал $\varphi(u;f)$ над $(u,f)\in S(R_4)\times\mathfrak{D}_{-\chi}$, где $S(R_4)$- пространство Шварца быстро убывающих основных функций в 4-мерном вещественном евклидовом пространстве, а $\mathfrak{D}_{-\chi}$ - пространство представления[5] $T_{-\chi}$ группы $SL(2,C)$, универсальной

---

[x] Неприводимые представления собственной группы Лоренца обозначают[4] парой чисел $\chi=[k,c]$, где k - целое или полуцелое, c -произвольное комплексное число.

накрывающей группы $L_+^\uparrow$. При фиксированных $f \in \mathfrak{D}_{-\chi_1}$, $g \in \mathfrak{D}_{-\chi_2}$ двухточечная функция $F_{\varphi\psi}(x;f,g)$ полей φ и ψ есть ядро билинейного трансляционно-инвариантного (непрерывного) функционала над $u, v \in S(R_4)$:

$$\langle 0|\varphi(u;f)\psi(v;g)|0\rangle = \iint F_{\varphi\psi}(x-y;f,g)\, u(x)\, v(y)\, d^4x\, d^4y.$$

Мы видим, что двухточечную функцию $F_{\varphi\psi}(x;f,g)$ можно отождествить с непрерывным трилинейным функционалом $F_{\varphi\psi}(u;f,g)$ над $S(R_4)\times\mathfrak{D}_{-\chi_1}\times\mathfrak{D}_{-\chi_2}$. Чтобы достичь существенного упрощения задачи описания полилинейных лоренц-инвариантных функционалов, удобно воспользоваться изоморфизмом между $\mathfrak{D}'_{-\chi}$ – пространством непрерывных линейных функционалов над $\mathfrak{D}_{-\chi}$ – и пространством d_χ однородных индекса χ обобщенных функций в двумерной комплексной области $\tilde{C}_2 = C_2 \setminus \{0\}$ (работа[3], дополнение А). Этот изоморфизм позволяет сопоставить трилинейному функционалу $F_{\varphi\psi}(u;f,g)$ обобщенную функцию[x] $F_{\varphi\psi}(x;z,w) \in D'(R_4\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$, обладающую свойством однородности:

$$F_{\varphi\psi}(x;\sqrt{\rho_1}\,e^{i\alpha_1/2}z,\sqrt{\rho_2}\,e^{i\alpha_2/2}w) = \rho_1^{c_1-1}\,\rho_2^{c_2-1}\,e^{i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\times \tag{1.1}$$

$$\times\, F_{\varphi\psi}(x;z,w)\ ; \qquad\qquad (\rho_j>0,\ \bar{\alpha}_j=\alpha_j,\ j=1,2).$$

При этом связь между функционалом $F_{\varphi\psi}(u;f,g)$ и обобщенной функцией $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ осуществляется формулой

$$F_{\varphi\psi}(u;f,g) := \left(F_{\varphi\psi}(x;z,w),\quad u(x)\,\mathcal{F}(z)\,\mathcal{G}(w)\right), \tag{1.2}$$

---

[x] $D'(R_4\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$ – пространство Шварца обобщенных функций, связанных с областью $R_4\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2$. В действительности (ниже мы используем это обстоятельство при формулировке условия (1.4)) $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ принадлежит $S'(R_4\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$ – подпространству в $D'(R_4\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$ обобщенных функций умеренного роста.

где $\mathcal{F}(z)$ и $\mathcal{G}(z)$ – основные функции из $D(\tilde{C}_2)$, связанные с f и g соотношениями $f = I_{-\chi_1}\mathcal{F}$, $g = I_{-\chi_2}\mathcal{G}$, а I_χ – оператор из $D(\tilde{C}_2)$ на $\mathfrak{D}_\chi$, введенный в /3/, дополнении А.

Сформулируем теперь условия, накладываемые на двухточечные функции $F_{\varphi\psi}(x; f, g)$ и соответствующие им обобщенные функции $F_{\varphi\psi}(x; z, w)$.

1. Лоренц-ковариантность:

$$F_{\varphi\psi}(\Lambda(A)x; T_{-\chi_1}(A)f, T_{-\chi_2}(A)g) = F_{\varphi\psi}(x; f, g),$$

$$F_{\varphi\psi}(\Lambda(A)x; zA^{-1}, wA^{-1}) = F_{\varphi\psi}(x; z, w); \qquad (1.3)$$

здесь $f \in \mathfrak{D}_{-\chi_1}$, $g \in \mathfrak{D}_{-\chi_2}$, $A \in SL(2,C)$, $\Lambda(A)$ – стандартное представление группы $SL(2,C)$ в пространстве Минковского, zA – вектор в $\tilde{C}_2$ с компонентами $(zA)_a = \sum_{b=1,2} z_b A^b_a$.

2. Спектральность:

$$\operatorname{supp} \tilde{F}_{\varphi\psi}(p; f, g) \subset \overline{V}_+ = \{p:\ p^0 \geq |\vec{p}|\},$$

$$\operatorname{supp} \tilde{F}_{\varphi\psi}(p; z, w) \subset \overline{V}_+ \times \tilde{C}_2 \times \tilde{C}_2; \qquad (1.4)$$

здесь $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p; z, w)$ – преобразование Фурье по x от $F_{\varphi\psi}(x; z, w)$, аналогичный смысл имеет $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p; f, g)$.

3. Локальность:

$$F_{\varphi\psi}(x; f, g) = \sigma \cdot F_{\psi\varphi}(-x; g; f),$$

$$F_{\varphi\psi}(x; z, w) = \sigma \cdot F_{\psi\varphi}(-x; w, z); \qquad (1.5)$$

здесь

$$(x)^2 \equiv (x^0)^2 - (\vec{x})^2 < 0, \qquad \sigma = \pm 1.$$

Из условия 2 следует, что $F_{\varphi\psi}(x;f,g)$ есть граничное значение функции $H_{\varphi\psi}(\zeta;f,g)$ – преобразования Лапласа по p от $\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p;f,g)$ – голоморфной по ζ в верхней трубе $\mathcal{T}_+ = R_4 + iV_+$. Условие 3 с помощью теоремы Боголюбова-Владимирова[6] обеспечивает существование голоморфного продолжения $H_{\varphi\psi}(\zeta;f,g)$ в так называемую "расширенную трубу" $\mathcal{T} = \{\zeta \in C_4: \ (\zeta)^2 \neq a$ при любом $a \geq 0\}$. Это означает, что $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ является граничным значением при $\mathrm{Im}\,\zeta \in V_+$, $\mathrm{Im}\,\zeta \to 0$ обобщенной функции $H_{\varphi\psi}(\zeta;z,w) \in \mathcal{D}'(\mathcal{T} \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$, голоморфной[x] по $\zeta \in \mathcal{T}$:

$$F_{\varphi\psi}(x;z,w) = \lim_{\eta \in V_+, \eta \to 0} H_{\varphi\psi}(x+i\eta;z,w). \tag{1.6}$$

Мы приходим к следующей задаче, непосредственным образом связанной с поставленной выше задачей описания двухточечных функций: найти общий вид распределений $H(\zeta;z,w) \in \mathcal{D}'(\mathcal{T} \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$, удовлетворяющих условиям:

а) голоморфности по $\zeta \in \mathcal{T}$:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta^\mu}} H = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3; \tag{1.7}$$

б) лоренц-инвариантности:

$$H(\Lambda(A)\zeta; zA^{-1}, wA^{-1}) = H(\zeta;z,w), \qquad A \in SL(2,C); \tag{1.8}$$

в) однородности по z, w:

$$H(\zeta; \sqrt{\rho_1}e^{i\alpha_1/2}z, \sqrt{\rho_2}e^{i\alpha_2/2}w) = \rho_1^{c_1-1}\rho_2^{c_2-1} e^{i(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2)} \times H(\zeta;z,w), \qquad (\rho_j > 0, \ \overline{\alpha}_j = \alpha_j). \tag{1.9}$$

---

[x] Для того, чтобы обобщенная функция в комплексной области была голоморфной, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла как обобщенная функция уравнениям Коши-Римана ([7], §4).

Опишем ход решения этой задачи. Из переменных $\zeta, z, w, \bar{z}, \bar{w}$ можно составить следующие (голоморфные по ζ) алгебраические инварианты группы преобразований $(\zeta; z, w) \longrightarrow (\Lambda(A)\zeta; zA^{-1}, wA^{-1})$:

$$t = \det \underset{\sim}{\zeta},\ u_{11} = z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{12} = z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w},\ u_{21} = w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{22} = w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w},$$
$$s = z\varepsilon w,\quad \bar{s} = \bar{z}\varepsilon\bar{w}, \tag{1.10}$$

где $\underset{\sim}{\zeta}$ и ε — 2 x 2 - матрицы соответственно полуторалинейной и билинейной форм на C_2:

$$\underset{\sim}{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^0+\zeta^3 & \zeta^1-i\zeta^2 \\ \zeta^1+i\zeta^2 & \zeta^0-\zeta^3 \end{pmatrix},\quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Эти инварианты подчинены тождеству $u_{11}\cdot u_{22} - u_{12}\cdot u_{21} = ts\bar{s}$.
В области $s \equiv z\varepsilon w \neq 0$ можно выбрать инварианть u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{21}, s в качестве первых пяти локальных комплексных координат; в пункте 2.2 мы показываем, что условия а) и б) (последнее удобней переписать в инфинитезимальной форме) приводят к выводу, что $H(\zeta; z, w)$ есть обобщенная функция только этих инвариантных переменных, причем она голоморфна по u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}. Далее остается использовать условие однородности (п. 3.1). В области, содержащей $z\varepsilon w = 0$, положение значительно сложнее. Дело в том, что на множестве $z\varepsilon w = 0$ инварианты u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} становятся зависимыми: они выражаются через два варианта u_{11} и $q = \frac{w_1}{z_1} = \frac{w_2}{z_2}$, поэтому в окрестности $s = 0$ нельзя полностью перейти к инвариантным переменным с помощью регулярной замены переменных. Чтобы упростить задачу, мы вначале отыскиваем решения (в области, где хотя бы один из инвариантов u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, например u_{11}, отличен от нуля), которые имеют носитель на множестве $s = 0$; совершая в условии ковариантности частичный переход к инвариантным переменным и используя условие на носи-

тель, мы приходим к явно ковариантному представлению (п. 2.3). Условие однородности этих решений исследовано в п. 3.3. В п. 3.2 рассмотрен вопрос, при каких дополнительных ограничениях решения, найденные в п. 3.1, продолжаются во всю область изменения переменных ζ, z, w. Объединяя результаты пп. 3.1–3.3, мы получаем (теорема 3.1) общий вид функций $H(\zeta; z, w)$, удовлетворяющих условиям а) – в).

С помощью теоремы 3.1 решается (п. 4.1, теорема 4.1) задача о нахождении ковариантного представления для двухточечных функций $F_{\varphi\psi}$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям (1.3) – (1.5). Отмечается также дополнительное ограничение на это представление, налагаемое требованием ТСР – инвариантности полей (п. 4.1, замечание 2). В замечании 3 (п. 4.1) указывается, каким образом результаты могут быть перенесены на неперенормируемые теории поля. В п. 4.2 мы приводим обобщенный вариант известной теоремы Гродского-Стритера[8] без дополнительных "технических" предположений; эта важная теорема утверждает[x], что в теории бесконечнокомпонентных полей с условиями локальности и спектральности обязательно имеет место бесконечное вырождение массы по спину.

В заключение г. 1 мы приводим список некоторых обозначений, используемых в работе.

Обозначения

R_n — n- мерное вещественное евклидово пространство;
C_n — n- мерное комплексное евклидово пространство;
$\tilde{C}_n = C_n \setminus \{0\}$;
$\mathcal{D}(\Omega)$ и $\mathcal{D}'(\Omega)$ – соответственно пространства Шварца основных и обобщенных функций в области Ω вещественного или комплексного евклидова пространства;

---

[x] Независимо от Гродского и Стритера к такому же выводу пришли Абарбанел и Фришман[9] (см. также[10]).

$$\zeta = (\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) \in C_4, \qquad (\zeta)^2 = (\zeta^0)^2 - (\zeta^1)^2 - (\zeta^2)^2 - (\zeta^3)^2;$$

$$\underset{\sim}{\zeta} \equiv \begin{pmatrix} \zeta^{11} & \zeta^{12} \\ \zeta^{21} & \zeta^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^0 + \zeta^3 & \zeta^1 - i\zeta^2 \\ \zeta^1 + i\zeta^2 & \zeta^0 - \zeta^3 \end{pmatrix};$$

$$z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w} = \zeta^{11} z_1 \bar{w}_1 + \zeta^{12} z_1 \bar{w}_2 + \zeta^{21} z_2 \bar{w}_1 + \zeta^{22} z_2 \bar{w}_2, \quad (z, w \in C_2, \ \zeta \in C_4);$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$z\varepsilon w = z_1 w_2 - z_2 w_1, \qquad (z, w \in C_2);$$

$$\mathfrak{M} = C_1 \setminus \{\lambda : \lambda \geqslant 0\};$$

$$\mathcal{T} = \{\zeta \in C_4 : (\zeta)^2 \in \mathfrak{M}\};$$

$$T = \{\underset{\sim}{\zeta} : \zeta \in \mathcal{T}\}.$$

2. Условия лоренц-инвариантности и голоморфности в расширенной трубе для двухточечной функции

2.1. Система дифференциальных уравнений для $H(\zeta; z, w)$

Мы условимся отождествлять комплексный 4-вектор ζ с 2 x 2 - матрицей (1.11) $\underset{\sim}{\zeta} = (\zeta^{a\dot{b}})_{a,\dot{b}=1,2}$. В терминах матрицы $\underset{\sim}{\zeta}$ $\mathcal{T}$ — область изменения ζ — записывается в виде $T = \{\underset{\sim}{\zeta} : \det\underset{\sim}{\zeta} \in \mathfrak{M}\}$, а преобразование Лоренца $\zeta \to \Lambda(A)\zeta$ принимает форму $\underset{\sim}{\zeta} \to A\underset{\sim}{\zeta}A^*$.

Условие голоморфности (1.7) $H(\underset{\sim}{\zeta}; z, w)$ по $\underset{\sim}{\zeta}$ имеет вид

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta^{a\dot{b}}}} H(\underset{\sim}{\zeta}; z, w) = 0. \tag{2.1}$$

Условие лоренц-инвариантности (1.8) перепишем в инфинитезимальной форме. С этой целью (как и в/3/, п. 2.1) выберем $A^1{}_1$, $A^2{}_1$, $A^1{}_2$ в качестве независимых параметров матрицы $A=(A^a{}_b)\in SL(2,C)$; дифференцируя (1.8) по $A^2{}_1$, $\overline{A^2{}_1}$, $A^1{}_2$, $\overline{A^1{}_2}$ в точке $A=1$, получаем (с учётом (2.1)) 4 дифференциальных уравнения, содержащих всю информацию о лоренц-инвариантности:

(А) $$\left(\zeta^{11}\frac{\partial}{\partial\zeta^{21}}+\zeta^{12}\frac{\partial}{\partial\zeta^{22}}-z_2\frac{\partial}{\partial z_1}-w_2\frac{\partial}{\partial w_1}\right)H=0, \qquad (2.2)$$

(Б) $$\left(\zeta^{11}\frac{\partial}{\partial\zeta^{12}}+\zeta^{21}\frac{\partial}{\partial\zeta^{22}}-\bar z_2\frac{\partial}{\partial\bar z_1}-\bar w_2\frac{\partial}{\partial\bar w_1}\right)H=0, \qquad (2.3)$$

(В) $$\left(\zeta^{21}\frac{\partial}{\partial\zeta^{11}}+\zeta^{22}\frac{\partial}{\partial\zeta^{12}}-z_1\frac{\partial}{\partial z_2}-w_1\frac{\partial}{\partial w_2}\right)H=0, \qquad (2.4)$$

(Г) $$\left(\zeta^{12}\frac{\partial}{\partial\zeta^{11}}+\zeta^{22}\frac{\partial}{\partial\zeta^{21}}-\bar z_1\frac{\partial}{\partial\bar z_2}-\bar w_1\frac{\partial}{\partial\bar w_2}\right)H=0. \qquad (2.5)$$

Ниже, в п. 2.2, мы находим общее решение системы (2.1) – (2.5) в области

$$\mathcal{O}=\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in T\times\tilde C_2\times\tilde C_2:\quad z\varepsilon w\neq 0\right\}. \qquad (2.6)$$

В п. 2.3 для этой же системы находим все решения, носитель которых принадлежит множеству

$$\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in T\times\tilde C_2\times\tilde C_2:\qquad z\varepsilon w=0\right\}; \qquad (2.7)$$

при этом мы ограничились областью, в которой $z\underset{\sim}{\zeta}\bar z\neq 0$.

2.2. Общее решение системы (2.1) - (2.5) в области (2.6)

Покажем, что в области $\mathcal{O}$ (2.6) $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ является обобщенной функцией, зависящей только от инвариантов. В силу (1.8) достаточно доказать, что это утверждение справедливо в подобласти $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$, такой, что $\bigcup\limits_{A\in SL(2,C)} A\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}$; здесь $A\mathcal{O}_1 = \{(A\underset{\sim}{\zeta} A^*; zA^{-1}, wA^{-1}) : (\underset{\sim}{\zeta}; z,w) \in \mathcal{O}_1\}$.

В качестве $\mathcal{O}_1$ возьмем

$$\mathcal{O}_1 = \{(\underset{\sim}{\zeta}; z,w) \in \mathcal{O} : \quad z_2 \neq 0\}. \tag{2.8}$$

Лемма 2.1. В области $\mathcal{O}_1$ регулярна замена переменных

$$(\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22}; z_1,z_2; w_1,w_2) \longrightarrow (u_{11} = z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{12} = z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w},$$

$$u_{21} = w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{22} = w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w};\ z_1,z_2;\ s = z\varepsilon w,\ w_2);$$

новые переменные также принимают значения в области $\mathcal{O}_1$.

Доказательство. Осуществим замену переменных в лемме 2.1 в виде последовательности двух регулярных отображений (т.е. взаимо однозначных и бесконечно дифференцируемых отображений с ненулевым якобианом); отсюда и будет следовать утверждение леммы.

α) $\quad (\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22}; z_1,z_2; w_1,w_2) \longrightarrow (u_{11},u_{12},u_{21},u_{22}; z_1,z_2; w_1,w_2),$

где

$$u_{11} = z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{12} = z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w},\ u_{21} = w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{22} = w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w};$$

якобиан отображения

$$J_{(\alpha)} = \left|\frac{\partial(u_{11},u_{12},u_{21},u_{22})}{\partial(\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22})}\right|^2 = |z\varepsilon w|^8 \neq 0;$$

β) $\quad (u_{11},u_{12},u_{21},u_{22}; z_1,z_2; w_1,w_2) \longrightarrow (u_{11},u_{12},u_{21},u_{22}; z_1,z_2; s,w_2),$

где

$$s = z_1 w_2 - z_2 w_1;$$

$$J_{(\beta)} = \left|\frac{\partial s}{\partial w_1}\right| = |z_2|^2 \neq 0.$$

Лемма 2.1 позволяет обобщенной функции $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in D'(\mathcal{O}_1)$ сопоставить $K(\mathcal{U};z_1,z_2;s,w_2)\in D'(\mathcal{O}_1)$ (где $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ - 2 x 2 - матрица с элементами u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) таким образом, что

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=K(z\underset{\sim}{\zeta}\bar z,z\underset{\sim}{\zeta}\bar w,w\underset{\sim}{\zeta}\bar z,w\underset{\sim}{\zeta}\bar w;z_1,z_2;z\varepsilon w,w_2). \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в уравнения (2.1) - (2.5), получим

$$\frac{\partial}{\partial \overline{u_{\alpha\beta}}}K=0, \qquad \alpha,\beta=1,2, \tag{2.10}$$

$$z_2\frac{\partial}{\partial z_1}K=0, \tag{2.11}$$

$$\bar z_2\frac{\partial}{\partial \bar z_1}K=0, \tag{2.12}$$

$$\left(z_1\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{z_1w_2-s}{z_2}\cdot\frac{\partial}{\partial w_2}\right)K=0, \tag{2.13}$$

$$\left(\bar z_1\frac{\partial}{\partial \bar z_2}+\frac{\bar z_1\bar w_2-s}{\bar z_2}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar w_2}\right)K=0. \tag{2.14}$$

Дифференцируя (2.13) по z_1 и (2.14) по $\bar z_1$ и учитывая, что $s\neq 0$, $w_2\neq 0$ в $\mathcal{O}_1$, получим вместо (2.11) - (2.12):

$$\frac{\partial K}{\partial z_1}=\frac{\partial K}{\partial \bar z_1}=\frac{\partial K}{\partial z_2}=\frac{\partial K}{\partial \bar z_2}=\frac{\partial K}{\partial w_2}=\frac{\partial K}{\partial \bar w_2}=0. \tag{2.15}$$

Так как произвольнсе сечение $(\mathcal{U},s)=\mathrm{const}$ области $\mathcal{O}_1$ связно по (z_1,z_2,w_2), то из (2.15) следует существование $\mathcal{H}(\mathcal{U};s)\in$ $\in D'(T\times\tilde C_1)$, такой, что $K(\mathcal{U};z_1,z_2;s,w_2)=\mathcal{H}(\mathcal{U};s)$, т.е.

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=\mathcal{H}(\mathcal{U};s);\quad \text{здесь}\quad \mathcal{U}=\begin{pmatrix} z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z} & z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w} \\ w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z} & w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\end{pmatrix},\ s=z\varepsilon w. \tag{2.16}$$

Теорема 2.1. В области $z\varepsilon w\neq 0$ обобщенная функция $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$, удовлетворяющая условиям (1.7) – (1.8), имеет вид (2.16) где $\mathcal{H}(\mathcal{U};s)$ принадлежит $\mathcal{D}'(T\times\widetilde{C}_1)$ и голоморфна по $\mathcal{U}$.

2.3. Решения в области $z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\neq 0$, сосредоточенные на множестве $z\varepsilon w=0$

В этом пункте мы найдем вид обобщенных функций $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$, удовлетворяющих уравнениям (2.1) – (2.5) в области

$$\Omega=\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2:\quad z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\neq 0\right\} \tag{2.17}$$

и имеющих носитель на множестве

$$\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in\Omega:\quad s\equiv z\varepsilon w=0\right\}. \tag{2.18}$$

Те же аргументы, что и в п. 2.2, позволяют для изучения $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ в Ω ограничиться $\Omega_1\subset\Omega$, где

$$\Omega_1=\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in\Omega:\quad z_2\neq 0,\ \zeta^{11}z_1+\zeta^{21}z_2\neq 0\right\}. \tag{2.19}$$

В области Ω_1 регулярна замена переменных

$$(\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22};z_1,z_2;w_1,w_2)\longrightarrow(t,v,\zeta^{11},\xi;z_1,z_2;s,q), \tag{2.20}$$

где $t=\det\underset{\sim}{\zeta}=(\zeta)^2,\ v=z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ \xi=\zeta^{11}z_1+\zeta^{21}z_2,\ s:=z\varepsilon w,\ q=\dfrac{w_2}{z_2};$

действительно, отображение (2.20) линейно по переменным, подвергающимся замене, и его якобиан

$$\left|\frac{\partial(t\,,\,v\,,\,\xi\,\,,\,s\,,\,q)}{\partial(\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22},w_1,w_2)}\right|^2 = \left|z_2\bar z_2\left(\zeta^{11}z_1+\zeta^{21}z_2\right)\right|^2,$$

очевидно, отличен от нуля в Ω_1. Новые переменные пробегают область

$$\omega=\Big\{(t,v,\zeta^{11},\xi;z_1,z_2;s,q):\quad t\in\mathfrak{M},\ v\in\tilde C_1,$$

$$\zeta^{11}\in C_1,\ \xi\in\tilde C_1,\ z_1\in C_1,\ z_2\in\tilde C_1,\ (s,q)\in\tilde C_2\Big\}. \tag{2.21}$$

Сопоставим $H(\zeta;z,w)\in\mathcal{D}'(\Omega_1)$ обобщенную функцию $G(t,v,\zeta^{11},\xi;z_1,z_2;s,q)\in\mathcal{D}'(\omega)$ так, что

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=G(t,v,\zeta^{11},\xi;z_1,z_2;s,q); \tag{2.22}$$

тогда система (2.) – (2.5) примет вид x/:

(a') $$\frac{\partial G}{\partial\bar t}=\frac{\partial G}{\partial\bar v}=\frac{\partial G}{\partial\bar\zeta^{11}}=\frac{\partial G}{\partial\bar\xi}=0, \tag{2.23}$$

(A') $$\frac{\partial}{\partial z_1}\,G=0, \tag{2.24}$$

(Б') $$\frac{\partial}{\partial\bar z_1}\,G=0, \tag{2.25}$$

(В') $$\left(\frac{\xi-\zeta^{11}z_1}{z_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta^{11}}-z_1\frac{\partial}{\partial z_2}+\frac{s}{(z_2)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial q}\right)G=0,$$

(Г') $$\left(\frac{v\zeta^{11}-\zeta^{11}\xi\bar z_1-tz_2\bar z_2}{\xi\bar z_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\zeta^{11}}+\frac{v-\xi\bar z_1}{\bar z_2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}-\bar z_1\frac{\partial}{\partial\bar z_2}+\frac{s}{(\bar z_2)^2}\frac{\partial}{\partial\bar q}\right)G=0.$$

---

x/ Для дальнейшего полезно замечание: при замене комплексных переменных $(z_1,\dots,z_n)\to(w_1,\dots,w_n)$ линейный дифференциальный оператор первого порядка $Q=\sum_i\left\{a_i(z)\frac{\partial}{\partial z_i}+b_i(z)\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right\}$ приобретает вид $\sum_i\left\{Q[w_i]\frac{\partial}{\partial w_i}+\right.$ $\left.+Q[\bar w_i]\frac{\partial}{\partial\bar w_i}\right\}$.

Дифференцируя (В') по z_1, получаем, с учётом (2.24), вместо (В') пару уравнений:

$$(\text{В}'.1)\quad \left(\xi z_2 \frac{\partial}{\partial \zeta''} + s\frac{\partial}{\partial q}\right)G = 0; \qquad (\text{В}'.2).\quad \left(\zeta''\frac{\partial}{\partial \zeta''} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2}\right)G = 0; \tag{2.26}$$

аналогично вместо (Г') можно написать:

$$(\text{Г}'.1)\quad \left((v\zeta'' - t z_2\bar z_2)\bar z_2 \frac{\partial}{\partial \zeta''} + v\xi \bar z_2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar s\,\xi \frac{\partial}{\partial \bar q}\right) G = 0, \tag{2.27}$$

$$(\text{Г}'.2)\quad \left(\zeta'' \frac{\partial}{\partial \zeta''} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \bar z_2 \frac{\partial}{\partial \bar z_2}\right) G = 0. \tag{2.28}$$

Будем искать сосредоточенные на множестве $s=0$ решения системы (2.23) - (2.28) в области ω. Прежде всего заметим, что так как $G=0$ при $s\neq 0$, достаточно ограничиться изучением G в области $\omega_1\subset\omega$:

$$\omega_1 = \{ s\in C_1,\ (t,v,\zeta'',\xi; z_1,z_2;q)\in \mathcal{K} = \mathcal{M}\times\tilde C_1\times C_1\times \tilde C_1\times C_1\times \tilde C_1\times \tilde C_1 \}.$$

Свойство носителя G позволяет представить G в виде

$$G(t,v,\zeta'',\xi; z_1,z_2; s,q) = \sum_{m,n=0,1,\dots} f_{mn}(t,v,\zeta'',\xi; z_1,z_2; q)\times \tag{2.29}$$

$$\times \frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m\, \partial \bar s^n}\,\delta(s),$$

где $\delta(s)$ - обобщенная функция из $D'(C_1)$, определяемая формальным интегралом $\int \delta(s)\varphi(s)\,|ds\, d\bar s| = \varphi(0)$; $f_{mn}(t,v,\zeta'',\xi;z_1,z_2;q)\in D'(\mathcal{K})$, причем в любой подобласти[x/] $\mathcal{K}_1 \Subset \mathcal{K}$ только конечное число f_{mn} отлично от нуля.

[x/] $\mathcal{K}_1\Subset\mathcal{K}$ означает, что $\mathcal{K}_1$ ограничено и $\bar{\mathcal{K}}_1\subset\mathcal{K}$.

С помощью тождества

$$\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\xi}\bar{z}\right)^m\left(z\underset{\sim}{\xi}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)^n\delta(s)=(z\underset{\sim}{\xi}\bar{z})^{m+n}\frac{\partial^{m+n}}{\partial s^m\partial\bar{s}^n}\delta(s), \quad (2.30)$$

$(s=z\varepsilon w)$, перепишем (2.29) (учитывая, что $V\equiv z\underset{\sim}{\xi}\bar{z}\neq 0$ в рассматриваемой области):

$$G(t,v,\zeta'',\xi;z_1,z_2;s,q)=\sum_{m,n=0,1,\ldots}f'_{mn}(t,v,\zeta'',\xi;z_1,z_2;q)\times \quad (2.31)$$

$$\times\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\xi}\bar{z}\right)^m\left(z\underset{\sim}{\xi}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)^n\delta(s).$$

Правило Лейбница позволяет преобразовать (2.31) к виду

$$G(t,v,\zeta'',\xi;z_1,z_2;s,q)=\sum_{m,n}\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\xi}\bar{z}\right)^m\left(z\underset{\sim}{\xi}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)^n\times \quad (2.32)$$

$$\times\left(G_{mn}(t,v,\zeta'',\xi;z_1,z_2;q)\;\delta(s)\right),$$

где G_{mn} – обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathcal{K})$, которые однозначно восстанавливаются по функциям f'_{mn} (а, следовательно, и по функции $H(\underset{\sim}{\xi};z,w)$). Другими словами, если выражение типа (2.32) равно нулю, то все (2.32) равны нулю (доказательство легко провести для G_{mn} с наибольшими номерами m, n, а далее с помощью индукции по m,n; здесь существенно, что $V\neq 0$).

Выражение (2.32) соответствует следующему представлению для функции $H(\underset{\sim}{\xi};z,w)$ в области Ω (2.17):

$$H(\underset{\sim}{\xi};z,w)=\sum_{m,n}\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\xi}\bar{z}\right)^m\left(z\underset{\sim}{\xi}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)^n H_{mn}(\underset{\sim}{\xi};z,w), \quad (2.33)$$

где $H_{mn}(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ – обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\Omega)$, обращающиеся в нуль при умножении на $z\varepsilon w$ или $\bar{z}\varepsilon\bar{w}$, причем в любой подобласти $\Omega'\Subset\Omega$ сумма (2.33) в действительности конечная. Применим условия голоморфности и лоренц-инвариантности (2.1) – (2.5) к функции $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$, записанной в виде (2.33). Дифференциальные операторы $\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\right)$ и $\left(z\underset{\sim}{\zeta}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)$ ковариантны, линейны по $\underset{\sim}{\zeta}$ и, следовательно, коммутируют с дифференциальными операторами в левых частях (2.1) – (2.5). Поэтому для голоморфности по $\underset{\sim}{\zeta}$ и инвариантности $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций $H_{mn}(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ удовлетворяла уравнениям (2.1) – (2.5) (именно в этом состоит преимущество представления (2.32) перед (2.29)).

Следовательно, обобщенные функции $G_{mn}(t,v,\zeta'';\xi;z_1,z_2;q)\cdot\delta(s)$ должны удовлетворять уравнениям (2.23) – (2.28). Отсюда получаем, что все частные производные от G_{mn} по $\bar{t},\bar{v},\zeta'',\overline{\zeta''},\xi,\bar{\xi},z_1,\bar{z}_1,z_2,\bar{z}_2$ равны нулю. В силу связности произвольного сечения $(t,v,q)=\mathrm{const}$ области ω по переменным (ζ'', ξ , z_1 , z_2) это означает существование обобщенных функций $g_{mn}(t,v;q)\in\mathcal{D}'(\mathcal{M}\times\tilde{C}_1\times\tilde{C}_1)$, голоморфных по t,v , таких, что

$$G_{mn}(t,v,\zeta'',\xi;z_1,z_2;q)=g_{mn}(t,v,q). \qquad (2.34)$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2. В области (2.17), где $z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\neq0$, обобщенная функция $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$, удовлетворяющая условиям (1.7)-(1.8) и сосредоточенная на множестве $z\varepsilon w=0$, имеет вид

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=\sum_{m,n}\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\right)^m\left(z\underset{\sim}{\zeta}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar{w}}\right)^n\left[g_{mn}(t,v;q)\delta(s)\right], \qquad (2.35)$$

где $t=(\zeta)^2$, $v=z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}$, q есть отношение одноименных компонент[x/]

[x/] Т.е. в качестве q следует взять $\frac{w_1}{z_1}$ при $z_1\neq0$ и $\frac{w_2}{z_2}$ при $z_2\neq0$; эта неоднозначность в определении q не сказывается в (2.35), так как на множестве $z\varepsilon w=0$ векторы w и z комплексно коллинеарны.

векторов w и z из $\widetilde{C}_2$; $g_{mn}(t,v;q)$ — обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathfrak{M}\times\widetilde{C}_1\times\widetilde{C}_1)$, голоморфные по t,v, причем, если q находится в произвольной подобласти $Q\Subset\widetilde{C}_1$, отлично от нуля лишь конечное число g_{mn}.

3. Описание обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathcal{T}\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2)$, удовлетворяющих условиям (1.7) – (1.9 голоморфности, лоренц-инвариантности и однородности

3.1. Условие однородности в области $z\varepsilon w\neq 0$

До сих пор мы исследовали лишь первые два из трех свойств (1.7) – (1.9) для $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$; полученные в п.2 результаты применимы для изучения двухточечных функций локальных полей φ и ψ, преобразующихся по определенным классам (просто) приводимых представлений. Наложим теперь условие однородности (1.9), которое выделяет двухточечные функции полей, преобразующихся по неприводимым представлениям группы $SL(2,C)$.

Вначале опишем однородные функции $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ при $z\varepsilon w\neq 0$.

Предложение 3.1. Обобщенные функции $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ в области (2.6), удовлетворяющие условиям (1.7) – (1.9), отличны от нуля лишь при целых $c_-=c_1-c_2$ и $k_-=k_1-k_2$. В зависимости от знаков c_- и k_- имеем следующие представления:

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{c_-}(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w})^{k_-}\,|z\varepsilon w|^{2(c_2-1)-k_-}\,e^{i(\arg z\varepsilon w)(k_1+k_2)}\times$$
$$\times\, h_{++}(t,\varkappa) \quad \text{при} \quad c_-\geq 0,\ k_-\geq 0, \tag{3.1}$$

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{c_-}(w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{|k_-|}\,|z\varepsilon w|^{2(c_2-1)+k_-}\,e^{i(\arg z\varepsilon w)(k_1+k_2)}\times$$
$$\times\, h_{+-}(t,\varkappa) \quad \text{при} \quad c_-\geq 0,\ k_-\leq 0, \tag{3.2}$$

аналогично заменой $z \leftrightarrow w$, $1 \leftrightarrow 2$ получаются представления

при $c_- \le 0$; (3.3)

здесь

$$t = (\zeta)^2, \quad \varkappa = \frac{z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z} \cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w} + z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w} \cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}}{(\zeta)^2 \cdot |z\varepsilon w|^2},$$

$h_{\pm\pm}(t,\varkappa)$ – голоморфные функции в области $\mathcal{M} \times \tilde{C}_1$.

Доказательство. Подставляем (2.16) в (1.9), получаем:

$$\mathcal{H}(\rho_1 u_{11}, \sqrt{\rho_1\rho_2}\, e^{i(\alpha_1-\alpha_2)/2} u_{12}, \sqrt{\rho_1\rho_2}\, e^{i(\alpha_2-\alpha_1)/2} u_{21}, \rho_2 u_{22}; \sqrt{\rho_1\rho_2}\, e^{i(\alpha_1+\alpha_2)/2} s) = \tag{3.4}$$
$$= \rho_1^{c_1-1} \rho_2^{c_2-1} e^{i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\, \mathcal{H}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s).$$

Положим здесь, в частности, $\rho_1 = \rho_2^{-1} = \rho > 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$:

$$\mathcal{H}(\rho u_{11}, u_{12}, u_{21}, \tfrac{1}{\rho} u_{22}; s) = \rho^{c_-}\, \mathcal{H}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s). \tag{3.5}$$

Функция $\mathcal{H}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s)$ голоморфна по $u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ при $u_{11} \cdot u_{22} - u_{12} u_{21} \in \mathcal{M}$; поэтому функция $\mathcal{H}'(\lambda; u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s) \equiv \mathcal{H}(\lambda u_{11}, u_{12}, u_{21}, \frac{1}{\lambda} u_{22}; s)$ голоморфна (и однозначна) по λ в области $\lambda \neq 0$. Кроме того, согласно (3.5), при $\lambda = \rho > 0$ $\mathcal{H}'(\rho; u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s) = \rho^{c_-}\, \mathcal{H}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s)$. Отсюда следует, что $\mathcal{H}' \neq 0$ лишь при условии: c_- – целое число, так что при $\lambda \neq 0$

$$\mathcal{H}(\lambda u_{11}, u_{12}, u_{21}, \tfrac{1}{\lambda} u_{22}; s) = \lambda^{c_-}\, \mathcal{H}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s). \tag{3.6}$$

При $u_{11} \neq 0$ можно в (3.6) положить $\lambda = (u_{11})^{-1}$, получим:

$$\mathcal{H}(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}; s) = (u_{11})^{c_-} \; g_1(u_{11}u_{22}, u_{12}, u_{21}; s), \quad (3.7)$$

где $g_1(\xi, u_{12}, u_{21}; s) \equiv \mathcal{H}(1, u_{12}, u_{21}, \xi; s)$ голоморфна по ξ, u_{12}, u_{21} при $\xi - u_{12} u_2 \in \mathfrak{M}$.

Для определенности будем считать $c_- \geqslant 0$. Тогда, очевидно, (3.7) остается справедливой и в тех точках, где u_{11} может обращаться в нуль.

Перепишем теперь (3.4) при $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha \in R_1$ с помощью (3.7):

$$g_1(\xi, e^{i\alpha} u_{12}, e^{-i\alpha} u_{21}; s) = e^{i(k_1-k_2)\alpha} g_1(\xi, u_{12}, u_{21}; s). \quad (3.8)$$

Ясно, что $g_1 \not\equiv 0$ лишь в том случае, если $k_- \equiv k_1 - k_2$ - целое число. По аналогии с переходом от (3.5) к (3.6) мы можем $e^{i\alpha}$ в (3.8) заменить на произвольное комплексное число $\lambda \neq 0$:

$$g_1(\xi, \lambda u_{12}, \frac{1}{\lambda} u_{21}; s) = \lambda^{k_-} g_1(\xi; u_{12}, u_{21}; s).$$

Полагая для определенности $k_- \geqslant 0$, находим отсюда

$$g_1 = (\xi, u_{12}, u_{21}; s) = (u_{12})^{k_-} g_2(\xi, u_{12} u_{21}; s),$$

где

$$g_2(\xi_1, \xi_2; s) = g_1(\xi_1, 1, \xi_2; s).$$

Наконец, полагая в (3.4) $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, получаем условие для g_2:

$$g_2(\rho^2 \xi_1, \rho^2 \xi_2; \rho e^{i\alpha} s) = \rho^{2(c_2-1)-k_-} e^{i(k_1+k_2)\alpha} g_2(\xi_1, \xi_2; s). \quad (3.9)$$

$g_2(\xi_1, \xi_2; s)$ голоморфна по ξ_1, ξ_2 при $\xi_1 - \xi_2 \in \mathfrak{M}$ и является обобщенной функцией s в области $s \neq 0$. Переходя от s к регулярным переменным $|s|$ и $\arg s$ находим из (3.9):

$$g_2(\xi_1,\xi_2;s)=|s|^{2(c_2-1)-k_-}e^{i(\arg s)(k_1+k_2)}\,g_3\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{|s|^2},\frac{\xi_1+\xi_2}{|s|^2}\right),$$

где $g_3(\xi_1,\xi_2)$ голоморфна в области $\mathcal{M}\times C_1$.

Полагая теперь $g_3(\xi_1,\xi_2)=h_{++}(\xi_1,\frac{\xi_2}{\xi_1})$, приходим к представлению (3.1).

Аналогичным образом доказывается представление для $H(\underset{\sim}{\xi};z,w)$ при других знаках c_- и k_-.

3.2. Продолжение решений п. 3.1 во всю область $\mathcal{T}\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2$

Рассмотрим теперь, при каких дополнительных ограничениях решения, даваемые Предложением 3.1, продолжаются (как обобщенные функции) в область $T\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2$ с сохранением свойств (1.7) - (1.9).

Предложение 3.2[x/]. Для того, чтобы обобщенная функция $H(\underset{\sim}{\xi};z,w)$, определенная в области (2.7) формулой (3.1) (при $c_-\equiv c_1-c_2\geq 0, k_-\equiv k_1-k_2\geq 0$), допускала продолжение в область $T\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2$ с сохранением свойств (1.7)- (1.9), необходимо и достаточно, чтобы $h_{++}(t,\varkappa)$ была полиномом по $\varkappa$ вида

$$h_{++}(t,\varkappa)=\sum_{\ell=0}^{N}\frac{a_\ell(t)}{\Gamma(c_2-\ell-\min\{k_1,-k_2\})}\varkappa^{\ell}, \tag{3.10}$$

где $a_\ell(t)$ - голоморфные функции $t\in\mathcal{M}$. Множитель $\frac{1}{\Gamma(c_2-\ell-\min\{k_1,-k_2\})}$ введен в (3.10) для того, чтобы подчеркнуть исчезновение коэффициента

[x/] Для определенности мы ограничились случаем целых неотрицательных c_- и k_-, когда справедливо представление (3.1). Другие возможности для знаков c_- и k_- приводят к аналогичным выводам.

при $\varkappa^{\ell}$, если $\ell+\min\{k_1,-k_2\}-c_2$ есть целое неотрицательное число). При этом общий вид продолжения представления (3.1) в область $T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2$ задается формулой:

$$H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=H_0(\underset{\sim}{\zeta};z,w)+H_1(\underset{\sim}{\zeta};z,w), \tag{3.11}$$

где

$$H_0(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{c_-}(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w})^{k_-}\sum_{\ell=0}^{N}a_\ell(\zeta^2)\times$$

$$\times\left(\frac{z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}+z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}}{\zeta^2}\right)^{\ell}\cdot\frac{|z\varepsilon w|^{2(c_2-1)-k_-}e^{i(\arg z\varepsilon w)(k_1+k_2)}}{\Gamma(c_2-\ell-\min\{k_1,-k_2\})}, \tag{3.12}$$

а $H_1(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ – произвольная обобщенная функция в $T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2$, удовлетворяющая условиям (1.7) – (1.9) и сосредоточенная на множестве $z\varepsilon w=0$ (общий вид $H_1(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ см. в п. 3.3)[x/].

<u>Доказательство.</u> Достаточность условия (3.10) фактически следует из формул (3.11) – (3.12), если положить в них $H_1=0$. Для доказательства необходимости (3.10) предполагаем, что существует продолжение правой части (3.1) в область $T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2$, удовлетворяющее условиям (1.7) – (1.9). Удобно вместо $T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2$ взять подобласть

$$\mathfrak{B}=\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2:\ z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\neq 0,\ z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\neq 0\right\}, \tag{3.13}$$

[x/] Относительно определения однородной обобщенной функции в комплексной плоскости

$$\mathcal{F}_{n,c}=\frac{|s|^c e^{in(\arg s)}}{\Gamma\left(\frac{c+|n|+2}{2}\right)}$$

см. [/5/], добавление. Отметим, что (3.12) действительно определяет обобщенную функцию в $T\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2$, так как там всегда можно переменную $z\varepsilon w$ выбрать в качестве локальной комплексной координаты.

а вместо $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ рассматривать

$$A(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{-c_-}(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w})^{-k_-}\,H(\underset{\sim}{\zeta}.z,w). \tag{3.14}$$

Из (3.1), (3.14) следует, что при $z\varepsilon w\neq 0$

$$A(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=|z\varepsilon w|^{c}\,e^{in(\arg z\varepsilon w)}h_{++}\Big(\zeta^2;\,+2\frac{z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}}{\zeta^2\cdot|z\varepsilon w|^2}\Big), \tag{3.15}$$

где $c=2(c_2-1)-k_-$, $n=k_1+k_2$ - целое число, $h_{++}(t,\varkappa)$ — голоморфная функция в $\mathcal{M}\times C_1$.

С помощью регулярной замены переменной в некоторой области $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$, содержащей точки с $z\varepsilon w=0$, перейдем от $(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ к новым переменным так, чтобы правая часть (3.15) имела достаточно простой вид. В качестве $\mathcal{B}_1$ возьмем

$$\mathcal{B}_1=\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w):\ z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\neq 0,\ z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\neq 0,\ \zeta^{11}\neq 0,\ \zeta^{11}\bar{z}_1+\zeta^{12}\bar{z}_2\neq 0\}. \tag{3.16}$$

Как показано в дополнении А, в $\mathcal{B}_1$ регулярна следующая замена переменных:

$$(\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22};z_1,z_2;w_1,w_2)\longrightarrow(t;s,\lambda,\mu,\mu',\nu,z_1,z_2), \tag{3.17}$$

где

$$t=(\zeta)^2,\quad s=z\varepsilon w,\quad \nu=\zeta^{11}\bar{z}_1+\zeta^{12}\bar{z}_2,$$

$$\lambda=\Big(\zeta^{11}-\frac{|\nu|^2}{u_{11}}-\frac{t|z_2|^2}{\bar{u}_{11}}\Big)\frac{u_{11}\cdot u_{12}}{\bar{\nu}\,z_2},\ \mu=\frac{u_{11}|u_{12}|}{|u_{11}|},\ \mu'=\frac{u_{12}\cdot|u_{11}|}{|u_{12}|}, \tag{3.18}$$

$$\big(\,u_{11}\equiv z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z},\ u_{12}\equiv z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\,\big);$$

кроме того, в новых переменных мы можем рассматривать $A(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ как обобщенную функцию от s, λ, μ, μ', ν, z_1, z_2, зависящую от $t\in\mathcal{M}$ как от параметра:

$$A(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=\mathcal{A}_t(s,\lambda,\mu,\mu',\nu,z_1,z_2). \qquad (3.19)$$

Заметим для дальнейшего, что когда переменные $(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ пробегают сечение $(\zeta)^2=t$ области $\mathcal{B}_1$, переменные $(s,\lambda,\mu,\mu',\nu,z_1,z_2)$ пробегают некоторую область Q, причем проекция Q на плоскость (s,λ,μ) есть $C_1\times C_1\times\widetilde{C}_1$.

В переменных (3.18) равенство (3.15) принимает вид

$$\mathcal{A}_t(s,\lambda,\mu,\mu',\nu,z_1,z_2)=|s|^c e^{in(\arg s)} f_t\left(\frac{\lambda}{\bar{s}}+\frac{\mu^2}{|s|^2}\right) \qquad (3.20)$$

при $s\neq 0$,

где $f_t(u)=h_{++}\left(t,1+\frac{2u}{t}\right)$ – целая функция от $u\in C_1$, а t рассматривается как параметр. (Более точно, (3.20) выполнено в части области Q, где $s\neq 0$). Нетрудно видеть, что существует обобщенная функция $F_t(s,\lambda,\mu)\in\mathcal{D}'(C_1\times C_1\times\widetilde{C}_1)$, совпадающая в $\widetilde{C}_1\times C_1\times\widetilde{C}_1$ с правой частью (3.20). Действительно, правая часть (3.20) задает обобщенную функцию $F_t(s,\lambda,\mu)\in\mathcal{D}'(\widetilde{C}_1\times C_1\times\widetilde{C}_1)$; так как $\mathcal{A}_t(s,\lambda,\mu,\mu',\nu,z_1,z_2)$ имеет конечный порядок в любой подобласти $\mathcal{K}\Subset Q$, то $F_t(s,\lambda,t)$ имеет конечный порядок в любой подобласти вида

$$\sigma_1\times\sigma_2\times\sigma_3,$$

где $\sigma_1=\{s:\ 0<|s|<R_1\}$, $\sigma_2=\{\lambda:\ |\lambda|<R_2\}$, $\sigma_3=\{\mu: R_3'<|\mu|<R_3'', R_3'>0\}$, и по теореме Хана-Банаха допускает продолжение до обобщенной функции из $\mathcal{D}'(C_1\times C_1\times\widetilde{C}_1)$. Теперь тот факт, что $f_t(u)$ – полином по u, следует из вспомогательной леммы, приведенной в дополнении Б.

Мы показали, что $h_{++}(t,\varkappa)$ в (3.1) является полиномом по $\varkappa$:

$$h_{++}(t,\varkappa)=\sum_{\ell=0}^{N} b_\ell(t)\,\varkappa^\ell \qquad ; \qquad (3.21)$$

в таком случае в качестве одного из возможных продолжений представления (3.1) в область $T\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2$ можно взять

$$H_0(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{c_-}(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w})^{k_-}\sum_{l=0}^{N} b_l(\zeta^2)\times \tag{3.22}$$

$$\times\left(\frac{z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}\cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}+z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w}\cdot w\underset{\sim}{\zeta}\bar{z}}{\zeta^2}\right)^l\cdot|z\varepsilon w|^{2(c_2-l-1)\cdot k_-}e^{i(\arg z\varepsilon w)(k_1+k_2)}$$

Обобщенная функция (3.22) удовлетворяет условиям голоморфности (1.7) и ковариантности (1.8). Если ни для одного l в (3.22) не выполняется условие: $l+\min\{k_1,-k_2\}-c_2+1$ есть целое неотрицательное число (3.23), то (3.22) удовлетворяет также условию однородности (1.9). Осталось рассмотреть случаи, когда l удовлетворяет (3.23), т.е.

$$l-k_2-c_2+1=m_l,\; l+k_1-c_2+1=n_l,\text{ где } m_l, n_l \text{ - натуральные числа.} \tag{3.24}$$

При натуральных m,n обобщенная функция $F_{mn}(s)=(s)^{-m}(\bar{s})^{-n}$ является присоединенной однородной обобщенной функцией первого порядка степени $(-m,-n)$:

$$F_{mn}(\lambda s)=(\lambda)^{-m}(\bar{\lambda})^{-n}\left[F_{mn}(s)+\ln|\lambda|\frac{2\pi\cdot(-1)^{m+n}}{(m-1)!(n-1)!}\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial s^{m-1}\partial\bar{s}^{n-1}}\delta(s)\right],\ (\lambda\neq 0)$$

(см. [5], добавление), поэтому при выполнении (3.24) правая часть (3.22) при подстановке в условие однородности (1.9) ведет себя следующим образом:

$$H_0(\underset{\sim}{\zeta};\sqrt{\rho_1}e^{i\alpha_1/2}z,\sqrt{\rho_2}e^{i\alpha_2/2}w)=\rho_1^{c_1-1}\rho_2^{c_2-1}e^{i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)}\times$$

$$\times\left(H_0(\underset{\sim}{\zeta};z,w)+\ln\sqrt{\rho_1\rho_2}\cdot V(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\right),$$

где

$$V(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=:(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{z})^{c_-}(z\underset{\sim}{\zeta}\bar{w})^{k_-}\sum_{\ell}a_\ell(\zeta^2)\times$$

$$\times\frac{2\pi(-1)^{m_\ell+n_\ell}}{(m_\ell-1)!\,(n_\ell-1)!}\cdot\frac{\partial^{m_\ell+n_\ell-2}}{\partial s^{m_\ell-1}\,\partial\bar{s}^{n_\ell-1}}\delta(s)\Big|_{s=z\varepsilon w}\quad ; \tag{3.26}$$

суммирование в (3.26) распространяется лишь по ℓ, удовлетворяюшим (3.24).

Следовательно, если $b_\ell(t)\not\equiv 0$ при ℓ, удовлетворяющих (3.24), то для (3.22) не выполнено условие (1.9). Но в таком случае не существует никакого другого продолжения $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ правой части (3.1) в $T\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2$, удовлетворяющего (1.7) - (1.9). Действительно, предполагая противное, получим, что разность $H_1(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)-H_0(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ I) сосредоточена на множестве $z\varepsilon w=0$, II) удовлетворяет условиям (1.7) - (1.8), III) удовлетворяет уравнению, получаемому из (3.25) заменой H_0 на H_1, $\ln\sqrt{\rho_1\rho_2}$ на $-\ln\sqrt{\rho_1\rho_2}$. Из I – II следует, что в области (2.17) для $H_1(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ справедливо представление (2.35), а оно несовместимо с условием III, если $b_\ell(t)\not\equiv 0$ при ℓ, удовлетворяющих (3.24). Это видно, например, из того, что при $\rho_1=\rho_2=\rho>0$, $\alpha_1=\alpha_2=0$ условие III, записанное в переменных (2.20), приводит к следующему условию для $g_{mn}(t,v;q)$ и $V_{mn}(t,v;q)$, связанных соответственно с $H_1(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ и $V(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ формулой (2.35): $g_{mn}(t,\rho v;q)=$ $=\rho^{c_1+c_2}[g(t,v;q)-\ln\rho\cdot V_{mn}(t,v;q)]$, причем $g_{mn}(t,v;q)$ и $V_{mn}(t,v;q)$ голоморфны по $v\in\tilde{C}_1$; ясно, что это возможно лишь в случае, когда все $V_{mn}(t,v;q)\equiv 0$, т.е. когда $V(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=0$.

Тем самым предложение 3.2 полностью доказано.

3.3. Условие однородности для $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ с носителем на множестве $z\varepsilon w=0$

Условие однородности (1.9), примененное к обобщенным функциям $H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$, описанным в теореме 2.2, приводит к следующему условию для $g_{mn}(t,v;q)$ в представлении (2.35):

$$g_{mn}\left(t, \rho_1 v; \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}\, e^{i(\alpha_2-\alpha_1)/2} q\right) = \rho_1^{c_1-\frac{m+n}{2}} \rho_2^{c_2+\frac{m+n}{2}} \times$$

$$\times e^{i\left(k_1+\frac{m-n}{2}\right)\alpha_1} e^{i\left(k_2+\frac{m-n}{2}\right)} g_{mn}(t, v; q). \qquad (3.27)$$

Полагая здесь $\rho_1=\rho_2=1$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, получаем, что $g_{mn}\not\equiv 0$ лишь в случае, если

$$k_+ \equiv k_1+k_2 = n-m. \qquad (3.28)$$

При $\rho_1=\rho_2=\rho$, $\alpha_1=\alpha_2=0$ (3.27) принимает вид

$$g_{mn}(t, \rho v; q) = \rho^{c_1+c_2} g_{mn}(t, v; q); \qquad (3.29)$$

так как $g_{mn}(t,v;q)$ голоморфна по $v \in \widetilde{C}_1$, то $g_{mn}\not\equiv 0$ только при условии:

$$c_+ \equiv c_1+c_2 \quad \text{— целое число.} \qquad (3.30)$$

Наконец, при $\rho_1=1$, $\rho_2=\rho^2$, $-\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ (3.27) приводит к условию

$$g_{mn}(t, v; \rho e^{i\alpha} q) = \rho^{2c_2+m+n} e^{-ik_-\alpha} g_{mn}(t, v; q),$$

что вместе с (3.29) дает:

$$g_{mn}(t, v; q) = b_{mn}(t)\, v^{c_+} |q|^{2c_2+m+n} e^{-ik_-(\arg q)} \qquad (3.31)$$

Подставляя (3.31) в (2.35), находим вид обобшенных функций в области (2.17) (где $Z\underset{\sim}{\xi}\bar{Z}\neq 0$), удовлетворяющих (1.7) – (1.9) и сосредоточенных на множестве $Z\varepsilon W=0$:

$$H(\underset{\sim}{\zeta}; z,w) = \sum_{\substack{m,n=0,1,\dots\\ n-m=k_+}} b_{mn}(\zeta^2)\,(z\zeta\bar z)^{c_+}\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\zeta}\bar z\right)^m \times \tag{3.32}$$

$$\times\left(z\underset{\sim}{\zeta}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar v}\right)^n\left[(q)^{c_2+k_2+m}\,(\bar q)^{c_2+k_1+m}\,\delta(z\varepsilon w)\right];$$

здесь $b_{mn}(t)$ – функции, голоморфные в $\mathfrak{M}$, причем лишь конечное число их отлично от нуля; q определено в (2.35).

Интересующая нас проблема, связанная с представлением (3.32), состоит в нахождении условий, при которых (3.32) допускает продолжение во всю область $T\times\tilde C_2\times\tilde C_2$ с соблюдением условий (1.7)–(1.9). Перепишем (3.32) с помощью формулы Лейбница:

$$H(\underset{\sim}{\zeta}; z,w) = \sum_{m\geq Max\{0,-k_+\}}\ \sum_{\substack{0\leq l\leq m\\ 0\leq r\leq m+k_+}} b_{m,m+k_+}(\zeta^2)\times \tag{3.33}$$

$$\times\,(z\underset{\sim}{\zeta}\bar z)^{c_++l+r}\cdot\binom{m}{l}\cdot\binom{m+k_+}{r}\,\frac{\partial^{l+r}}{\partial s^l\,\partial\bar s^r}\,\delta(s)\times$$

$$\times\left[\left(-\frac{\partial}{\partial w}\varepsilon\underset{\sim}{\zeta}\bar z\right)^{m-l}\left(z\underset{\sim}{\zeta}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\bar w}\right)^{m+k_+-l}(q)^{c_2+k_2+m}\,(\bar q)^{c_2+k_1+m}\right].$$

Для дальнейшего достаточно ограничиться областью

$$\mathfrak{D} = \left\{(\underset{\sim}{\zeta}; z,w)\in T\times\tilde C_2\times\tilde C_2 :\ z_2\neq 0,\ \zeta^{11}z_1+\zeta^{21}z_2\neq 0\right\}, \tag{3.34}$$

поскольку $T\times\tilde C_2\times\tilde C_2$ порождается действием группы $SL(2,C)$ на область $\mathfrak{D}$. В области $\mathfrak{D}$ можно произвести замену переменных (2.20), (2.22). Учитывая, что

$$\left(-\frac{\partial}{\partial w}\,\varepsilon\,\underset{\sim}{\xi}\,\bar{z}\right)q = \frac{1}{z_2}\left(\zeta^{11}\bar{z}_1 + \zeta^{12}\bar{z}_2\right) = \frac{v\zeta^{11} - t z_2 \bar{z}_2}{\xi\, z_2},$$

$$\left(z\,\underset{\sim}{\xi}\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right)\bar{q} = \frac{\zeta^{11}z_1 + \zeta^{21}z_2}{\bar{z}_2} = \frac{\xi}{\bar{z}_2},$$

получаем вместо (3.33):

$$G(t, v, \zeta^{11}, \xi; z_1, z_2; s, q) = \sum_{l, l', r = 0, 1, \dots} v^{c_+ + l + l' + r}\,(-t)^{-(l+r)} \times$$

$$\times \left(\frac{\zeta^{11}}{z_2\bar{z}_2}\right)^{l'} \left(\frac{\xi}{\bar{z}_2}\right)^{k_+ + l - r} (q)^{c_2 + k_2 + l}\,(\bar{q})^{c_2 - k_2 + r}\,\frac{\partial^{l+r}}{\partial s^l\,\partial \bar{s}^r}\,\delta(s) \times \tag{3.35}$$

$$\times \left[\sum_{m \geq \mathrm{Max}\{l + l', r - k_+\}} \binom{m}{l}\cdot\binom{m-l}{l'}\cdot\binom{m+k_+}{r}\cdot\frac{\Gamma(c_2 + k_2 + m + 1)}{\Gamma(c_2 + k_2 + l + 1)} \times \right.$$

$$\left. \times\,\frac{\Gamma(c_2 + k_1 + m + 1)}{\Gamma(c_2 - k_2 + r + 1)}\cdot B_m(t)\right],$$

где

$$B_m(t) = (-t)^m\, b_{m, m+k_+}(t). \tag{3.36}$$

Обобщенная функция G должна удовлетворять системе уравнений (2.23) - (2.28) во всей области $\mathfrak{D}$ (2.34). В частности, одно из уравнений (2.23) есть $\frac{\partial}{\partial \bar{v}} G = 0$; G удовлетворяет ему в том и только в том случае, когда правая часть (3.35) является полиномом по v . Мы приходим к следующим ограничениям на $B_m(t)$ в (3.35):

$$\sum_{m \geq \mathrm{Max}\{l+l', r-k_+\}} \binom{m}{l} \cdot \binom{m-l}{l'} \cdot \binom{m+k_+}{r} \cdot \frac{\Gamma(c_2+k_2+m+1)}{\Gamma(c_2+k_2+l+1)} \times \tag{3.37'}$$

$$\times \frac{\Gamma(c_2+k_1+m+1)}{\Gamma(c_2-k_2+r+1)} \cdot B_m(t) = 0$$

при всех целых неотрицательных l, l', r, таких, что

$$c_+ + l + l' + r < 0. \tag{3.37''}$$

Условия (3.37) гарантируют, что $G(t, v, \zeta'', \xi; z_1, z_2; s, q)$ зависит от V полиномиально; в таком случае из того, что (3.35) удовлетворяет системе (2.23) - (2.28) в области $V \neq 0$ (теорема 2.2), следует, что (3.35) удовлетворяет этой системе во всей области (3.34). Тем самым доказано следующее утверждение.

Предложение 3.3. Обобщенные функции $H(\underset{\sim}{\zeta}; z, w) \in \mathcal{D}'(T \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$, удовлетворяющие условиям (1.7) - (1.9) и обладающие носителем на множестве $z \varepsilon w = 0$, нетривиальны (т.е. отличны от нуля) только при целых $c_+ \equiv c_1 + c_2$ и $k_+ \equiv k_1 + k_2$. В области $T \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2$ они однозначно определяются с помощью аналитического продолжения по $\underset{\sim}{\zeta}$ формулы (3.32), справедливой при $z \underset{\sim}{\zeta} \bar{z} \neq 0$. Для существования этого продолжения необходимо и достаточно, чтобы функции $B_m(t)$ (3.36) удовлетворяли системе соотношений (3.37).

Докажем теперь, что обобщенные функции $H(\underset{\sim}{\zeta}; z, w)$ из предложения 3.3 допускают представление вида [x/]

$$H(\underset{\sim}{\zeta}; z, w) = \sum_n \zeta_{\mu_1} \cdots \zeta_{\mu_n} \cdot H_n^{\mu_1 \ldots \mu_n}(\zeta^2; z, w), \tag{3.38}$$

[x/] По дважды повторяющимся верхним и нижним индексам μ_j мы подразумеваем суммирование от 0 до 3.

где $H_n^{\mu_1\dots\mu_n}(t;z,w)\in\mathcal{D}'(\mathcal{M}\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$, симметричны по $\mu_1,\dots,\mu_n$ и голоморфны по t, причем лишь конечное число $H_n^{\mu_1\dots\mu_n}$ не равно нулю.

Воспользуемся тем обстоятельством, что в области (3.34) согласно (3.35) функция $\left(\zeta^{11}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{21}\right)^N H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ при достаточно большом N допускает представление типа (3.38):

$$\left(\zeta^{11}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{21}\right)^N\cdot H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)= \tag{3.39}$$

$$=P\left(\zeta^{11},\zeta^{12}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{22},\zeta^{11}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{21}\,\middle|\,\zeta^2;z,w\right),$$

где $P(\xi_1,\xi_2,\xi_3|t;z,w)$ – полином по ξ_1,ξ_2,ξ_3 и голоморфная функция $t\in\mathcal{M}$. Так как обе части равенства (3.39) голоморфны по $\underset{\sim}{\zeta}\in T$, то (3.39) справедливо в области

$$\left\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in T\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2:\quad z_2\neq 0\right\}.$$

Представим P в виде:

$$P(\xi_1,\xi_2,\xi_3|t;z,w)= \tag{3.40}$$

$$=P'(\xi_1,\xi_2,\xi_3|t;z,w)+(\xi_3)^N P''(\xi_1,\xi_2,\xi_3|t;z,w),$$

где P' и P'' обладают теми же свойствами, что и P, но степень P' по ξ_3 не больше N; т.е.

$$P'(\xi_1,\xi_2,\xi_3|t;z,w)=\sum_{k=0}^{N}(\xi_3)^k\,Q_k(\xi_1,\xi_2|t;z,w). \tag{3.41}$$

Из (3.39) - (3.40) следует, что достаточно доказать возможность представления вида (3.38) для $H'(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$, определяемой формулой

$$H'(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=H(\underset{\sim}{\zeta};z,w)-P''\left(\zeta^{11},\zeta^{12}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{22},\zeta^{11}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{21}\,\middle|\,\zeta^2;z,w\right) \tag{3.42}$$

и удовлетворяющей соотношению

$$\left(\zeta^{11}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{21}\right)^N H'(\underset{\sim}{\zeta};z,w)=\sum_{k=0}^{N}\left(\zeta^{11}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{21}\right)^k Q_k(\zeta^{11},\zeta^{12}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{22}|\zeta^2;z,w). \qquad (3.43)$$

Для этого в области $\{(\underset{\sim}{\zeta};z,w)\in T\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2:\ z_2\neq 0,\ \zeta^{12}\neq 0\}$ с помощью регулярной замены перейдем в равенстве (3.43) к переменным $(\eta_1=\zeta^{11},\ \eta_2=\zeta^{12}\frac{z_1}{z_2}+\zeta^{22},\ \eta_3=\zeta^{12};\ t=\det\underset{\sim}{\zeta}\ ;\ z,w)$:

$$H'(\underset{\sim}{\zeta};z,w) = \mathcal{H}'(\eta_1,\eta_2,\eta_3\,|\,t;z,w), \qquad (3.44)$$

$$\mathcal{H}'(\eta_1,\eta_2,\eta_3|t;z,w)=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\eta_3}{\eta_1\cdot\eta_2-t}\right)^{N-k} Q_k(\eta_1,\eta_2|t;z,w). \qquad (3.45)$$

Согласно (3.42), $H'(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ голоморфна по $\zeta\in T$, и, следовательно, $\mathcal{H}'(\eta_1,\eta_2,\eta_3|t;z,w)$ голоморфна по $(\eta_1,\eta_2,\eta_3,t)\in C_1\times C_1\times\tilde{C}_1\times\mathcal{M}$. В таком случае при любом $k=0,1,\dots,N$ функции $R_k(\eta_1,\eta_2|t;z,w)=$ $=(\eta_1\cdot\eta_2-t)^{k-N}Q_k(\eta_1,\eta_2|t;z,w)$ голоморфны по η_1,η_2,t ; и так как Q_k – полиномы по η_1,η_2, то (по теореме Лиувилля) $R_k(\eta_1,\eta_2|t;z,w)$ – полиномы по η_1,η_2. Теперь из (3.44) – (3.45) следует, что $H'(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ допускает представление типа (3.38).

В представлении (3.38) функции $H_n^{\mu_1\dots\mu_n}(\zeta^2;z,w)$ можно выбрать $SL(2,C)$–ковариантными, т.е. такими, что

$$\Lambda(A)^{\mu_1}_{\nu_1}\dots\Lambda(A)^{\mu_n}_{\nu_n}\ H_n^{\nu_1\dots\nu_n}(\zeta^2;zA,wA)=H_n^{\mu_1\dots\mu_n}(\zeta^2;z,w). \qquad (3.46)$$

Чтобы убедиться в этом, будем рассматривать (3.38) как полином по $\zeta\in C_4$ на комплексных гиперболоидах $\mathcal{N}_t=\{\zeta\in C_4:\ (\zeta)^2=t\}$ при $t\in\mathcal{M}$. Произвольный полином на гиперболоиде $\mathcal{N}_t$ однозначно разлагается, по "псевдогармоническим" полиномам (мы называем полином $\mathcal{P}(\not p, \vec{\xi})$ в C_4 псевдогармоническим, если $\mathcal{P}(\xi_1, i\vec{\xi})$ - гармонический полином). Переразлагая (3.38) по псевдогармоническим полиномам, мы приходим к разложению типа (3.38), которое, во-первых, однозначно, и, во-вторых, $g_{\mu_1\mu_2}\ H_n^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(\xi^2; z, w)$.

Условие однозначности разложения по псевдогармоническим полиномам вместе с условием $SL(2,C)$ -инвариантности $H(\xi; z, w)$ обеспечивает условие ковариантности (3.46).

Из формулы (3.35) видно также, что $H_n^{\mu_1\ldots\mu_n}(\xi^2; z, w)$ в (3.38) в действительности суть линейные комбинации произведений голоморфных функций от $\xi^2 \in \mathcal{M}$ на обобщенные функции от z, w, т.е.

$$H(\xi; z, w) = \sum_n \sum_\alpha \xi_{\mu_1} \cdots \xi_{\mu_n} \cdot \Gamma_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_n}(z, w) \cdot A_{n,\alpha}(\xi^2). \quad (3.47)$$

Предложения 3.1 - 3.3, доказанные в п.3, вместе дают полное описание обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathcal{T} \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$, удовлетворяющих условиям (1.7) - (1.9). Мы объединим их в следующую теорему.

<u>Теорема 3.1.</u> Каждая обобщенная функция $H(\xi; z, w) \in \mathcal{D}'(\mathcal{T} \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$, удовлетворяющая условиям (1.7) - (1.9), представима в виде

$$H(\xi; z, w) = H_{I}(\xi; z, w) + H_{II}(\xi; z, w), \quad (3.48)$$

где $H_{I}(\xi; z, w)$ и $H_{II}(\xi; z, w)$ - обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathcal{T} \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$, также удовлетворяющие условиям (1.7) - (1.9), причем H_I отлична от нуля лишь при целых $c_- \equiv c_1 - c_2$ и $k_- \equiv k_1 - k_2$ и задается формулой (3.12) при целых неотрицательных c_- и k_- и аналогами формулы (3.12) при других знаках c_- и k_- (ср. формулы (3.1) -(3.3)); H_{II} - обобщенная функция с носителем на множестве $z \& w = 0$, описанная в предложении 3.3; H_{II} нетривиальна лишь при целых $c_+ \equiv c_1 + c_2$ и $k_+ \equiv k_1 + k_2$.

4. Свойства двухточечных функций локальных полей, преобразующихся по неприводимым представлениям $L_+^\uparrow$. Теорема Гродского-Стритера

4.1. Ковариантное представление

Обратимся к изучению двухточечных функций $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$, удовлетворяющих условиям (1.1), (1.3) – (1.5). Как указывалось во введении, $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ можно поставить в соответствие обобщенную функцию $H(\zeta;z,w)$ со свойствами (1.7) – (1.9). Из общего вида $H(\zeta;z,w)$ (теорема 3.1) следует возможность представления $H(\zeta;z,w)$ в следующей единообразной форме[x/]:

$$H(\zeta;z,w)=:\sum_{n=0,1,\dots}\sum_{\alpha} H_{n,\alpha}(\zeta;z,w), \tag{4.1}$$

$$H_{n,\alpha}(\zeta;z,w)=\zeta_{\mu_1}\cdots\zeta_{\mu_n}\cdot\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}(z,w)\cdot A_{n,\alpha}(\zeta^2), \tag{4.2}$$

где $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}(z,w)\in\mathcal{D}'(\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2)$ – ядра $SL(2,C)$ – ковариантных тензорнозначных билинейных функционалов $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}(f,g)$ над $(f,g)\in\mathfrak{D}_{-\chi_1}\times\mathfrak{D}_{-\chi_2}$; индекс α служит для нумерации линейно-независимых форм Γ_α; $A_{n,\alpha}(t)$ – голоморфные функции в $\mathfrak{M}$, причем только конечное число их отлично от нуля. Количество тензоров в (4.1) – (4.2) можно свести к минимуму, потребовав, чтобы $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}(f,g)$ принадлежали пространству $\mathcal{G}_n^{(\chi_1,\chi_2)}$ $SL(2,C)$–ковариантных тензорозначных функционалов $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}(f,g)$ над $\mathfrak{D}_{-\chi_1}\times\mathfrak{D}_{-\chi_2}$, удовлетворяющих следующим условиям (выделяющим в пространстве 4-тензоров n-ой степени подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[0,n+1]$ группы Лоренца):

[x/] Возможность записать (3.12) в виде (4.1) – (4.2) очевидна; для (3.32) это было показано в конце п. 3.3.

$\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}(f,g)$ – симметричный по $\mu_1,\ldots,\mu_n$ тензор, (4.3)

$$g_{\mu_1\mu_2}\,\Gamma^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(f,g)=0. \tag{4.4}$$

<u>Замечание 1.</u> Явный вид для ядер $\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}(z,w)$ ковариантных функционалов $\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}(f,g)$ из $\mathcal{G}_n^{(x_1,x_2)}$ может быть получен из теоремы 3.1. Для этого достаточно в (3.39) ограничиться обобщенными функциями вида $H(\zeta;z,w)=\zeta_{\mu_1}\ldots\zeta_{\mu_n}\cdot\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}(z,w)$, которые являются однородными "псевдогармоническими" полиномами степени n по ζ; ("псевдогармоничность" H означает, что $\Box_\zeta H(\zeta;z,w)$).

Удобно переписать выражение (4.2) для $H_{n,\alpha}(\zeta;z,w)$ в следующей эквивалентной форме:

$$H_{n,\alpha}(\zeta;z,w)=\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}(z,w)\,\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}\,B_{n,\alpha}(\zeta^2), \tag{4.5}$$

где $B_{n,\alpha}(t)$ обладают теми же свойствами, что и $A_{n,\alpha}(t)$ в (4.2). Для доказательства достаточно в качестве $B_{n,\alpha}(t)$ взять n-ю первообразную от $2^{-n}A_{n,\alpha}(t)$ и воспользоваться тождеством

$$\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}\,\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}\,B(\zeta^2)=2^n\cdot\zeta_{\mu_1}\ldots\zeta_{\mu_n}\,\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}\left(\frac{d}{d\zeta^2}\right)^n B(\zeta^2), \tag{4.6}$$

справедливым для любого тензора $\Gamma^{\mu_1\ldots\mu_n}$, удовлетворяющего условиям (4.3), (4.4).

Наложим теперь на обобщенные функции $H(\zeta;z,w)$ дополнительное условие (1.6), осуществляющее связь между $H(\zeta;z,w)$ и двухточечными функциями $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$. Найдем соответствующие ограничения на каждое слагаемое $H_{n,\alpha}$ в (4.1) (и соответственно на функции $B_{n,\alpha}(t)$ в (4.5)), следующие из этого дополнительного условия. При этом мы будем считать, что $\Gamma_\alpha^{\mu_1\ldots\mu_n}$ образуют фиксированный базис в $\mathcal{G}_n^{(x_1,x_2)}$.

Предложение 4.1. Если при $\zeta\in\mathcal{T}_+=R_4+iV_+$ $H(\zeta;z,w)$ в (4.1) является преобразованием Лапласа по переменной p от обобщенной функции $\widetilde{F}(p;z,w)\in S'(R_4\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2)$ с носителем в $\overline{V}_+\times\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2$, то таким же свойством обладает каждое слагаемое $H_{n,\alpha}(\zeta;z,w)$ в (4.1).

Доказательство. Чтобы показать, что слагаемое $H_{m,\beta}(\zeta;z,w)$ из (4.1) обладает требуемыми свойствами, достаточно убедиться, что ими обладает любая функция

$$h^{(\beta)}_{\nu_1\dots\nu_m}(\zeta)=\zeta_{\nu_1}\dots\zeta_{\nu_m}\cdot A_{n,\alpha}(\zeta^2). \tag{4.7}$$

Пусть $\mathcal{F}$ – подпространство в $D(\widetilde{C}_2\times\widetilde{C}_2)$ основных функций $F(z,w)$, таких, что для всех $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha$, входящих в (4.2) с $A_{n,\alpha}\not\equiv0$, кроме $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha$ при $n=m$, $\alpha=\beta$, $\{\mu_1,\dots,\mu_n\}=\{\nu_1,\dots,\nu_m\}$, выполнено условие

$$(\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha(z,w)\ ,\ F(z,w))=0$$

(как отмечалось выше, в (4.2) входит конечное число $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha$ с $A_{n,\alpha}\not\equiv0$). На подпространстве $\mathcal{F}$ $(\Gamma^{\nu_1\dots\nu_m}_\beta(z,w),F(z,w))$ не может быть тождественным нулю. В противном случае функционал $\Gamma^{\nu_1\dots\nu_m}_\beta$ является линейной комбинацией функционалов $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha\neq\Gamma^{\nu_1\dots\nu_m}_\beta$, т.е. существует нетривиальное соотнощение $\sum\limits_n\sum\limits_\alpha C^{(\alpha)}_{\mu_1\dots\mu_n}\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha(z,w)=0$, где $C^{(\beta)}_{\nu_1\dots\nu_m}\neq0$. Из $SL(2,C)$ - ковариентности $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha(z,w)$ следует тогда

$$\sum_n\sum_\alpha C^{(\alpha)}_{\lambda_1\dots\lambda_n}(\Lambda^{\lambda_1}_{\mu_1}\dots\Lambda^{\lambda_n}_{\mu_n}\ \Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha(z,w))=0,\quad \Lambda\in L^\uparrow_+;$$

так как различные $\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha$ с одинаковым n преобразуются по индексам $\mu_1,\dots,\mu_n$ по одному и тому же представлению $[0,n+1]$ группы Лоренца, то последнее равенство эквивалентно системе

$$\sum_\alpha C^{(\alpha)}_n\,\Gamma^{\mu_1\dots\mu_n}_\alpha(z,w)=0,\qquad \text{причем}\quad C^{(\beta)}_m\neq0.$$

Но это противоречит линейной независимости $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}$ с различными α.

Мы показали, что существует функция $F = F^{(\beta)}_{\nu_1\dots\nu_m}(z,w) \in \mathcal{D}(\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$, такая, что для всех $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}$, входящих в (4.1) – (4.2), $\left(\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}(z,w), F^{(\beta)}_{\nu_1\dots\nu_m}(z,w)\right)$ равно 1 при $n=m$, $\alpha=\beta$, $\{\mu_1,\dots,\mu_n\} = \{\nu_1,\dots,\nu_m\}$ и равно 0 в остальных случаях. Это с помощью (4.1), (4.2) позволяет записать (4.7) в виде

$$h^{(\beta)}_{\nu_1\dots\nu_m}(\zeta) = \int H(\zeta;z,w)\, F^{(\beta)}_{\nu_1\dots\nu_m}(z,w)\, \left|d^2z\, d^2\bar{z}\, d^2w\, d^2\bar{w}\right|, \quad (4.8)$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Заметим, что из формулы (4.8) следует также единственность представления $H(\zeta;z,w)$ в форме (4.1) – (4.2) (точнее, однозначная определенность функций $A_{n,\alpha}(t)$ в (4.2) при заданной $H(\zeta;z,w)$; с другой стороны, согласно (4.6), функции $B_{n,\alpha}(t)$ в (4.5) определяются с помощью $H(\zeta;z,w)$ с точностью до полинома степени $n-1$ по t).

Фактически мы имеем теперь решение поставленной в п.1 задачи описания двухточечных функций $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ локальных полей φ и ψ, преобразующихся по неприводимым представлениям χ_1 и χ_2 группы Лоренца. Соответствие (1.6) между $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ и $H_{\varphi\psi}(\zeta;z,w)$ и представления (4.1), (4.5) вместе с предложением 4. приводят к искомому ковариантному представлению для двухточечных функций. Результат сформулируем в виде теоремы.

<u>Теорема 4.1.</u> Для того, чтобы двухточечные функции $F_{\varphi\psi}(x;z,w) \in S'(R_4\times\tilde{C}_2\times\tilde{C}_2)$ удовлетворяли условиям лоренц-ковариантности (1.3), *спектральности* (1.4), *локальности* (1.5) и *однородности* (1.1), необходимо и достаточно[x/], чтобы они имели вид

$$\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w) = \sum_n \sum_\alpha \Gamma_{\alpha}^{\mu_1\dots\mu_n}(z,w)\, p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_n}\, \tilde{F}_{n,\alpha}(p). \quad (4.9)$$

[x/] "Достаточность" тривиальна и приведена для полноты.

$$F_{\varphi\psi}(x;z,w) =: \sum_{n}\sum_{\alpha}(-i)^{n}\cdot\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\ldots\mu_n}(z,w)\,\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}F_{n,\alpha}(x), \tag{4.10}$$

$$F_{\psi\varphi}(x;w,z) =: \sum_{n}\sum_{\alpha}\sigma\cdot(i)^{n}\cdot\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\ldots\mu_n}(z,w)\,\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}F_{n,\alpha}(x), \tag{4.11}$$

где $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w)$ - фурье-преобразование от $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ по переменной x ; $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\ldots\mu_n}(z,w)$ - ядра $SL(2,C)$ - ковариантных билинейных функционалов $\Gamma_{\alpha}^{\mu_1\ldots\mu_n}(f,g)$ над $\mathfrak{D}_{-\chi_1}\times\mathfrak{D}_{-\chi_2}$, удовлетворяющих условиям (4.3) - (4.4); $F_{n,\alpha}(x)$ - положительно-частотные скалярные лоренц-инвариантные обобщенные функции из $S'(R_4)$ (их фурье-преобразования $\tilde{F}_{n,\alpha}(p)$ имеют носитель в $\bar{V}_+$), причем только конечное число $F_{n,\alpha}$ отлично от нуля.

Замечание 2. Сравним представления (4.10) - (4.11) с условием TCP-инвариантности в терминах двухточечных функций для (бесконечнокомпонентных) полей, образующихся по неприводимым представлениям собственной группы Лоренца, предполагая, что в совокупности $\{\varphi,\varphi^*\}$ всех полей никакие два различные поля не преобразуются по одному и тому же представлению $L_+^\uparrow$ (/11/, формула (6))x/:

$$F_{\varphi\psi}(x;z,w) = \eta(\varphi)\cdot\eta(\psi)\cdot F_{\psi\varphi}(x;w,z), \tag{4.12}$$

x/ Фактически именно к этому случаю имелось в виду применять условие TCP-инвариантности в виде уравнения (5) в /11/ (хотя в /11/, п.2, не делалось никаких предположений о лоренц-инвариантности полей). В общем случае, когда имеется произвольная система полей, преобразующихся по (не) приводимым представлениям $L_+^\uparrow$, условие TCP-инвариантности соответственно усложнится. (Уместно напомнить /12/, что если дополнительно имеются внутренние дискретные симметрии, например, C-инвариантность, то операция TCP-преобразования полей определена неоднозначно).

где $\eta(\varphi)$ и $\eta(\psi)$ – фазы TCP-преобразования полей φ и ψ. Мы приходим к следующему ограничению, накладываемому TCP-инвариантностью: в (4.10) дают вклад либо только чётные, либо только нечётные n; следовательно, $H_{\varphi\psi}(\zeta;z,w)$, связанная с $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ формулой (1.6), либо четна, либо нечетна по $\zeta\in\mathcal{T}$:

$$H_{\varphi\psi}(-\zeta;z,w)=\lambda\, H_{\varphi\psi}(\zeta;z,w),\quad \text{где}\quad \lambda=\pm 1. \tag{4.13}$$

В соответствии с формулой (8) из [11] в нетривиальном случае $F_{\varphi\psi}\neq 0$ получается следующая связь между σ ("статистикой"), фазами $\eta(\varphi)$, $\eta(\psi)$ и чётностью или нечётностью аналитического продолжения двухточечной функции $F_{\varphi\psi}$ в расширенную трубу:

$$\eta(\varphi)\cdot\eta(\psi)=\sigma\cdot\lambda\ . \tag{4.14}$$

<u>Замечание 3.</u> Теорема 4.1 допускает обобщение на случай неперенормируемых теорий; при этом необходимо переформулировать условие локальности, так как прежняя форма (1.5) становится непригодной. Пусть $\tilde F_{\varphi\psi}(p;f,g)$ – двухточечная функция полей φ и ψ в импульсных переменных $\left(\tilde F_{\varphi\psi}(p;f,g)\in D'(R_4),\ \operatorname{supp}\tilde F_{\varphi\psi}(p;f,g)\subset\overline{V}_+\right)$. Мы ограничимся неперенормируемыми теориями 1-го рода [12] x/, в которых при любом $\eta\in V_+$ $e^{-p\eta}\tilde F_{\varphi\psi}(p;f,g)\in S'(R_4)$, и, следовательно, существуют преобразования Лапласа $H_{\varphi\psi}(\zeta;f,g)$ от $\tilde F_{\varphi\psi}(p;f,g)$, голоморфные по ζ в верхней трубе $\mathcal{T}_+=R_4+iV_+$. В таком случае условие локальности для двухточечных функций полей φ и ψ следует формулировать в следующем виде: $H_{\varphi\psi}(\zeta;f,g)$ и $\sigma\cdot H_{\psi\varphi}(-\zeta;g,f)$ допускают аналитическое продолжение в область вещественных пространственноподобных ζ и совпадают там. Тогда по теореме Стритера [14]

---

x/ Примером таких теорий могут служить поля Джаффе [13].

где $\eta(\varphi)$ и $\eta(\psi)$ – фазы TCP-преобразования полей φ и ψ. Мы приходим к следующему ограничению, накладываемому TCP-инвариантностью: в (4.10) дают вклад либо только чётные, либо только нечётные n; следовательно, $H_{\varphi\psi}(\zeta;z,w)$, связанная с $F_{\varphi\psi}(x;z,w)$ формулой (1.6), либо четна, либо нечетна по $\zeta\in\mathcal{T}$:

$$H_{\varphi\psi}(-\zeta;z,w)=\lambda\, H_{\varphi\psi}(\zeta;z,w),\quad \text{где}\quad \lambda=\pm 1. \tag{4.13}$$

В соответствии с формулой (8) из [11] в нетривиальном случае $F_{\varphi\psi}\neq 0$ получается следующая связь между σ ("статистикой") фазами $\eta(\varphi)$, $\eta(\psi)$ и чётностью или нечётностью аналитического проложения двухточечной функции $F_{\varphi\psi}$ в расширенную трубу:

$$\eta(\varphi)\cdot\eta(\psi)=\sigma\cdot\lambda\ . \tag{4.14}$$

<u>Замечание 3.</u> Теорема 4.1 допускает обобщение на случай неперенормируемых теорий; при этом необходимо переформулировать условие локальности, так как прежняя форма (1.5) становится непригодной. Пусть $\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p;f,g)$ – двухточечная функция полей φ и ψ в импульсных переменных $\left(\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p;f,g)\in \mathcal{D}'(R_4),\ \operatorname{supp}\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p;f,g)\subset\overline{V}_+\right)$. Мы ограничимся неперенормируемыми теориями 1-го рода[12] x/, в которых при любом $\eta\in V_+$ $e^{-p\eta}\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p;f,g)\in S'(R_4)$, и, следовательно, существуют преобразования Лапласа $H_{\varphi\psi}(\zeta;f,g)$ от $\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p;f,g)$, голоморфные по ζ в верхней трубе $\mathcal{T}_+=R_4+iV_+$. В таком случае условие локальности для двухточечных функций полей φ и ψ следует формулировать в следующем виде: $H_{\varphi\psi}(\zeta;f,g)$ и $\sigma\cdot H_{\psi\varphi}(-\zeta;g,f)$ допускают аналитическое продолжение в область вещественных пространственноподобных ζ и совпадают там. Тогда по теореме Стритера[14]

x/ Примером таких теорий могут служить поля Джаффе[13].

$H_{\varphi\psi}(\zeta; f, g)$ аналитически продолжается по ζ в область $\mathcal{T}$. Ядро $H_{\varphi\psi}(\zeta; z, w) \in \mathcal{D}'(\mathcal{T} \times \widetilde{C}_2 \times \widetilde{C}_2)$ функционала $H_{\varphi\psi}(\zeta; f, g)$ над $(f; g) \in \mathcal{D}_{-\chi_1} \times \mathcal{D}_{-\chi_2}$ удовлетворяет условиям (1.7) - (1.9), и, следовательно, для него справедливо представление (4.1), (4.5). Таким образом, для $\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p; z, w)$ по-прежнему имеет место представление (4.9) с той лишь разницей, что $\widetilde{F}_{n,\alpha}(p) \in \mathcal{D}'(R_4)$.

4.2. Теорема Гродского-Стритера

В заключение приведем теорему Гродского-Стритера [8] без дополнительных ("технических") допущений. Как и выше, мы не делаем предположения об унитарности представлений χ_1 и χ_2, по которым преобразуются поля φ и ψ.

Применим к двухточечной функции (4.9) в области $p \in V_+$ формулу разложения по спину ([3], уравнения (4.14), (4.13)):

$$\widetilde{F}_{\varphi\psi}(p; z, w) = \sum_{S = k_1, k_1+1, \dots} (z\underset{\sim}{p}\bar{z})^{c_1-k_1-1} (w\underset{\sim}{p}\bar{w})^{c_2-k_2-1} (z\underset{\sim}{p}\bar{w})^{k_1-k_2} \times$$

$$\times (z\varepsilon w)^{k_1+k_2} P_{S-k_1}^{(k_1+k_2, k_1-k_2)}\left(1 - 2\frac{(p)^2 |z\varepsilon w|^2}{z\underset{\sim}{p}\bar{z} \cdot w\underset{\sim}{p}\bar{w}}\right) \cdot \sigma_S(p^2), \tag{4.15}$$

где $\sigma_S(\tau)$ - меры на $(0, \infty)$, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ - полиномы Якоби; при этом для определенности мы взяли случай $k_1 \geqslant |k_2|$; другие возможности совершенно аналогичны.

Предположим, что в области

$$\{p: \; p^0 > 0, \; a < (p)^2 < b\}, \text{ где } 0 < a < b, \tag{4.16}$$

в разложении (4.15) отлично от нуля конечное ненулевое число функций $\sigma_S(\tau)$. Пусть S_0 - величина наибольшего спина S в (4.15), такого, что $\sigma_S(\tau) \not\equiv 0$ на (a, b). Покажем, что $(c_1 - k_1)$ и $(c_2 - |k_2|)$- натуральные числа и $k_1 \leq S_0 \leq \min\{c_1 - 1, c_2 - 1\}$.

В области (3.49) произведем замену вектора p по формуле $p=\sqrt{\tau}\cdot\vartheta$, где $\tau=(p)^2$, а ϑ пробегает гиперболоид

$$\{\vartheta\in R_4:\ \vartheta^0>0,\ (\vartheta)^2=1\}. \tag{4.17}$$

В переменных $(\tau,\vartheta;z,w)$ (4.9) приводится к виду

$$\widetilde{F}_{\psi\psi}(p;z,w)=\sum_n \vartheta_{\mu_1}\ldots\vartheta_{\mu_n}\, f_n^{\mu_1\ldots\mu_n}(\tau;z,w),$$

откуда следует, что $\widetilde{F}_{\psi\psi}(p;z,w)$ является голоморфной функцией по ϑ на комплексном подмногообразии $\mathcal{N}$ в C_4:

$$\mathcal{N}=\{\vartheta\in C_4:\ (\vartheta)^2=1\}. \tag{4.18}$$

При $S\equiv z\varepsilon w\neq 0$ точку ϑ на $\mathcal{N}$ можно характеризовать четверкой комплексных чисел

$$\Pi_{11}=\frac{1}{|S|}\,z\underset{\sim}{\vartheta}\bar{z},\ \Pi_{12}=\frac{1}{|S|}\,z\underset{\sim}{\vartheta}\bar{w},\ \Pi_{21}=\frac{1}{|S|}\,w\underset{\sim}{\vartheta}\bar{z},\ \Pi_{22}=\frac{1}{|S|}\,w\underset{\sim}{\vartheta}\bar{w},$$

связанных соотношением $\Pi_{11}\cdot\Pi_{22}-\Pi_{12}\cdot\Pi_{21}=1$, откуда следует, что при $\Pi_{12}\neq 0$ в качестве комплексных координат на $\mathcal{N}$ можно взять $(\Pi_{11},\Pi_{12},\Pi_{22})\in C_1\times\tilde{C}_1\times C_1$. В переменных $(\tau,\Pi_{11},\Pi_{12},\Pi_{22},S)$ видно, что (4.15) допускает голоморфное продолжение по ϑ в $\mathcal{N}$, равное

$$\sum_{k_1\le S\le S_0}(\Pi_{11})^{c_1-k_1-1}(\Pi_{22})^{c_2-k_1-1}(\Pi_{12})^{k_1-k_2}\,P_{S-k_1}^{(k_1+k_2,\,k_1-k_2)}\left(1-\frac{2}{\Pi_{11}\Pi_{22}}\right)\cdot g_S(\tau,s),$$

тогда и только тогда, когда c_1-k_1 и c_2-k_1 – натуральные числа, превосходящие степень S_0-k_1 полинома $P_{S_0-k_1}^{(k_1+k_2,\,k_1-k_2)}$.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w)$ является двухточечной функцией (в импульсном пространстве) локальных полей φ и ψ, преобразующихся соответственно по представлениям $\chi_1=[k_1,c_1]$ и $\chi_2=[k_2,c_2]$ группы Лоренца, в теории поля с условием спектральности. Если в области (4.16) выполнены условия : $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w)\not\equiv 0$ и в разложении $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w)$ по спину (/3/, формула (4.14)) дает вклад лишь конечное число слагаемых, то $c_1-|k_1|$ и $c_2-|k_2|$ являются натуральными числами и, следовательно,/5/ пространства представлений χ_1 и χ_2 содержат инвариантные подпространства однородных полиномов. В двухточечной функции $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w)$ в области (4.16) присутствует только "конечнокомпонентная часть", т.е. $\tilde{F}_{\varphi\psi}(p;z,w)$ является в (4.16) полиномом по z,w и для нее справедлива формула типа (3.9) из/3/.

Теорема 4.2 справедлива как для перенормируемых, так и для неперенормируемых (1-го рода) теорий; для последних должно быть выполнено условие локальности в том виде, как указано в замечании 3.

Авторы выражают глубокую признательность М.К.Поливанову за постоянный интерес к работе и ценные замечания.

Дополнение А

Регулярность отображения (3.17) в области (3.16)

Представим переход (3.17) к новым переменным как результат последовательности пяти регулярных отображений, причем первые четыре из них линейны по переменным, подвергающимся замене :

1) $$(\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21},\zeta^{22};z_1,z_2;w_1,w_2)\to(t;\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21};z_1,z_2;w_1,w_2),$$

где
$$t=\zeta^{11}\zeta^{22}-\zeta^{12}\zeta^{21}\;;\qquad J_1=\left|\frac{\partial t}{\partial\zeta^{22}}\right|^2=|\zeta^{11}|^2\neq 0.$$

Пусть $A(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ – обобщенная функция в области (3.16), голоморфная по $\underset{\sim}{\zeta}$; в таком случае мы можем фиксировать значение переменной t и рассматривать $A(\underset{\sim}{\zeta};z,w)$ как обобщенную функцию $\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21};z_1,z_2;w_1,w_2$, зависящую от $t\in\mathfrak{M}$, как от параметра.

2) $$(t;\zeta^{11},\zeta^{12},\zeta^{21};z_1,z_2;w_1,w_2)\longrightarrow(t,\zeta^{11},\nu,\nu';z_1,z_2;s,w_2),$$

где $\nu=\zeta^{11}\bar z_1+\zeta^{12}\bar z_2,\ \nu'=\zeta^{11}z_1+\zeta^{21}z_2,\quad s=z_1w_2-z_2w_1;$

$$J_2=\left|\frac{\partial(\nu,\nu',s)}{\partial(\zeta^{12},\zeta^{21},w_1)}\right|^2=|z_2|^6\neq 0;$$

3) $$(t;\zeta^{11},\nu,\nu';z_1,z_2;s,w_2)\longrightarrow(t;\zeta^{11},\nu,u_{11},z_1,z_2,s,\omega),$$

где $$u_{11}=\frac{\nu\nu'+tz_2\bar z_2}{\zeta^{11}}\ \left(\equiv z\underset{\sim}{\zeta}\bar z\right),\ \omega=\frac{\nu\bar w_2-\zeta^{11}\bar s}{\bar z_2}\left(\equiv\zeta^{11}\bar w_1+\zeta^{12}\bar w_2\right),$$

$$J_3=\left|\frac{\partial(u_{11},\omega)}{\partial(\nu',w_2)}\right|^2=\left|\frac{\nu\bar\nu}{\zeta^{11}z_2}\right|^2\neq 0;$$

4) $$(t;\zeta^{11},\nu,u_{11},z_1,z_2,s,\omega)\longrightarrow(t;\zeta^{11},\nu,u_{11},z_1,z_2,s,u_{12}),$$

где $$u_{12}=\frac{u_{11}\omega+t\bar s z_2}{\nu}\left(\equiv z\underset{\sim}{\zeta}\bar w\right);\ J_4=\left|\frac{\partial u_{12}}{\partial\omega}\right|^2=\left|\frac{u_{11}}{\nu}\right|^2\neq 0.$$

В переменных $(t;\zeta^{11},\nu,u_{11},z_1,z_2,s,u_{12})$ инвариант $u_{12}\cdot u_{21}$, входящий в правую часть (3.15), имеет вид:

$$u_{12}\cdot u_{21}=\left(\frac{u_{11}\cdot|u_{12}|}{|u_{11}|}\right)^2+s\left(\zeta^{11}-\frac{|\nu|^2}{u_{11}}-\frac{t|z_2|^2}{\bar u_{11}}\right)\cdot\frac{u_{11}\cdot u_{12}}{\bar\nu z_2};$$

чтобы упростить это выражение, сделаем последнюю (также регулярную) замену переменных, которая приводит к нужному результату:

5) $$(t;s,\zeta^{11},u_{11},u_{12},\nu,z_1,z_2)\longrightarrow(t;s,\lambda,\mu,\mu',\nu,z_1,z_2),$$

где

$$\lambda = \left(\zeta^{11} - \frac{|y|^2}{u_{11}} - \frac{t|z_2|^2}{\bar{u}_{11}}\right)\cdot\frac{u_{11}\cdot u_{12}}{\bar{y}\, z_2}\,,\quad \mu = \frac{u_{11}\cdot|u_{12}|}{|u_{11}|}\,,\quad \mu' = \frac{u_{12}\cdot|u_{11}|}{|u_{12}|}\,;$$

$$J_5 = \frac{\partial(\lambda, \bar\lambda, \mu, \bar\mu, \mu', \bar\mu')}{\partial(\zeta^{11}, \bar\zeta^{11}, u_{11}, \bar u_{11}, u_{12}, \bar u_{12})} = -\left|\frac{u_{11}\cdot u_{12}}{\bar y\, z_2}\right|^2 \neq 0\,.$$

Дополнение Б (к п. 3.2)

Критерий полиномиальности целой функции

Лемма. Пусть $f(u)$ – целая функция в C_1. Для того чтобы существовала обобщенная функция $F(s,\lambda,\mu)$ из $\mathcal{D}'(C_3)$ (или из $\mathcal{D}'(C_1\times C_1\times\tilde{C}_1)$), такая, что

$$F(s,\lambda,\mu) = |s|^c e^{in(\arg s)}\cdot f\left(\frac{\lambda}{\bar{s}} + \frac{\mu^2}{|s|^2}\right) \quad \text{при} \quad s\neq 0 \qquad (\text{Б.1})$$

(здесь c – комплексное, n – целое число), необходимо и достаточно, чтобы $f(u)$ была полиномом.

Достаточность условия следует из того, что функция, равная $|s|^{c'}e^{in'(\arg s)}$ при $s\neq 0$ (c' – комплексное, n' – целое число), допускает как обобщенная функция продолжение во всю комплексную плоскость s (работа /5/, добавление).

Для доказательства необходимости условия предположим, что $F(s,\lambda,\mu)$, определенная в (Б.1) при $s\neq 0$, допускает продолжение в C_3 (или в $C_1\times C_1\times\tilde{C}_1$). В таком случае $F(s,\lambda,\mu)$ в ограниченной области $Q=\{(s,\lambda,\mu):\ |s|<1,\ |\lambda|<1,\ 1/2<|\mu|<1\}\subset C_3$ имеет конечный порядок:

$$\left|\left(F(s,\lambda,\mu)\ \ \Phi(s,\lambda,\mu)\right)\right| < C\cdot q_N(\Phi) \qquad (\text{Б.2})$$

для любой $\Phi\in\mathcal{D}(C_3)$ с носителем в Q; здесь

$$q_N(\Phi) = \max_{\alpha_i\le N}\ \sup_{s,\lambda,\mu}\left|\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial\bar s}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{\alpha_3}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\right)^{\alpha_4}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{\alpha_5}\left(\frac{\partial}{\partial\bar\mu}\right)^{\alpha_6}\Phi(s,\lambda,\mu)\right|.$$

Пусть $\varphi(s,\lambda,\mu)$ – функция из $D(C_3)$ с носителем в $\{(s,\lambda,\mu):$ $1/4<|s|<1/2,\ |\lambda|<1/2,\ 1/2<|\mu|<1\}$, удовлетворяющая условиям: $\varphi(s,e^{i\theta_1}\lambda,e^{i\theta_2}\mu)=$ $=\varphi(s,\lambda,\mu)$ при любых вещественных θ_1,θ_2; $\int\varphi(s,\lambda,\mu)\,|ds\,d\bar{s}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\,d\mu\,d\bar{\mu}|=1$.
С помощью формулы о среднем для целой функции $f(u)$:

$$\int f(u+\lambda)\,\chi(\lambda)\,|d\lambda\,d\bar{\lambda}| = f(u)\int\chi(\lambda)\,|d\lambda\,d\bar{\lambda}|,$$

где $\chi\in D(C_1)$ и $\chi(e^{i\theta}\lambda)=\chi(\lambda)$ при любом $\theta\in R_1$, получаем:

$$f(u)=\int f(u+\lambda+\mu^2)\,\varphi(s,\lambda,\mu)\,|ds\,d\bar{s}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\,d\mu\,d\bar{\mu}|. \tag{Б.3}$$

При $u\neq 0$ равенство (Б.3) не нарушится, если вместо $\varphi(s,\lambda,\mu)$ подставить $|u|^2\cdot|s|^4\cdot\varphi(\bar{u}s,\bar{s}\lambda,|s|\mu)$:

$$f(u)=\int f(u+\lambda+\mu^2)\,|u|^2|s|^4\varphi(\bar{u}s,\bar{s}\lambda,|s|\mu)\,|ds\,d\bar{s}\,d\mu\,d\bar{\mu}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}|\equiv$$

$$\equiv\int f\Big(\frac{\lambda}{\bar{s}}+\frac{\mu^2}{|s|^2}\Big)\,|u|^2\varphi(\bar{u}s,\lambda-u\bar{s},\mu)\,|ds\,d\bar{s}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\,d\mu\,d\bar{\mu}|,$$

а это эквивалентно следующему:

$$f(u)=\int|s|^c e^{in(\arg s)}\,f\Big(\frac{\lambda}{\bar{s}}+\frac{\mu^2}{|s|^2}\Big)\,\Phi_u(s,\lambda,\mu)\,|ds\,d\bar{s}\,d\lambda\,d\bar{\lambda}\,d\mu\,d\bar{\mu}|, \tag{Б.4}$$

где

$$\Phi_u(s,\lambda,\mu)=|u|^{c+2}\,e^{-in(\arg u)}\,\Phi(\bar{u}s,\lambda,\mu), \tag{Б.5}$$

и

$$\Phi(s,\lambda,\mu)=|s|^{-c}\,e^{-in(\arg s)}\,\varphi(s,\lambda-\bar{s},\mu).$$

С помощью (Б.1) перепишем (Б.4) в виде

$$f(u)=\big(F(s,\lambda,\mu),\ \Phi_u(s,\lambda,\mu)\big). \tag{Б.6}$$

Будем считать Φ фиксированной. Так как при $|u| \geq 1$ носитель Φ_u содержится в Q, то из (Б.6), (Б.5), (Б.2) следует

$$|f(u)| \leq C \cdot q_N(\Phi_u) \leq C' |u|^{\operatorname{Re} c + 2(N+1)} \quad \text{при} \quad |u| \geq 1 .$$

Это доказывает, что f - полином.

Литература

1. S. Kamefuchi, H. Umezawa. Prog.Theor.Phys., 6, 543 (1951); G. Källén. Helv.Phys.Acta, 25, 417 (1952); H. Lehmann. Nuovo Cim., 11, 342 (1954).
2. I.T. Todorov, R.P. Zaikov. Spectral representation of the covariant two-point function and infinite-component fields with arbitrary mass spectrum, ICTP Internal report IC/68/50 (1968).
3. A.I. Oksak, I.T. Todorov. Commun.Math.Phys., 14, 271 (1969); А.И.Оксак, И.Т.Тодоров. Препринт ОИЯИ, Р2-4115, Дубна, 1968.
4. М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца, Физматгиз., М., 1958.
5. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. (Обобщенные функции, вып. 5), М., 1962.
6. Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров. Науч. докл. высшей школы, №3, 26 (1958).
7. В.С.Владимиров. Методы теории функций многих комплексных переменных, "Наука", М., 1964.
8. I.T. Grodsky, R.F. Streater. Phys.Rev.Lett., 20, 695 (1968).
9. H.D.I. Abarbanel, Y. Frishman. Phys.Rev., 171, 1442 (1968).
10. W. Bierter, K.M. Bitar. Nuovo Cim., A60, 330 (1969).
11. A.I. Oksak, I.T. Todorov. Commun.Math.Phys., 11, 125 (1968).
12. G. Grawert, G.Lüders, H. Rollnik. Fortschr.Phys., 7, 291 (1959); УФН, 71, 289 (1960).

13. B. Schroer. J. Math.Phys., 5, 1361 (1964).
14. A. Jaffe. Phys.Rev., 158, 1454 (1967).
15. R.F. Streater. J. Math.Phys., 3, 256 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 ноября 1969 года.