ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4805

Д.И. Блохинцев, Р.П. Зайков

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ СОСТАВНЫЕ ЧАСТИЦЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4805

Д.И. Блохинцев, Р.П. Зайков

СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛЕЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ СОСТАВНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Направлено в журнал ТМФ

1. Теория бесконечно-компонентных полей в последнее время интенсивно разрабатывается [1,2,3]. Наряду с некоторыми достоинствами ее (например, одно поле описывает частицы как с целыми, так и полуцелыми значениями спина) в этой теории имеются и существенные трудности. В качестве примера можно указать на тот факт, что аксиоме о локальной коммутативности [4] для свободного поля можно удовлетворить только в том случае, если спектр масс частиц имеет бесконечное вырождение по спину [5,6,7]. Помимо этого из лоренцовской инвариантности и локальной коммутативности этой теории не следует ее CPT инвариантность [8].

Бесконечно-компонентное поле, которое преобразуется по заданному бесконечномерному неприводимому представлению некоторой некомпактной группы (например $SL(2,C)$), можно рассматривать либо как фундаментальное поле, либо как составное. В качестве примера можно указать на такие системы, как атом водорода и элементарные частицы в модели кварков. Пример составной системы с возрастающим массовым спектром был приведен в работе [9,11]. В работе [10] было показано, что связанная система из двух скалярных частиц преобразуется по унитарным представлениям группы Лоренца. В работе [12] аналогичное рассмотрение проведено для функций Вайтмана, а в [13] развит лагранжев формализм для релятивистских составных систем. Помимо[9,10], существует большое количество работ, в которых относительные координаты связанной системы рассматриваются как ее спиновые переменные. Детально этот вопрос исследован в работе[14]. С другой стороны, оказывается удобным реализовать неприводимые представления группы $SL(2,C)$ в пространстве D_χ однородных функций от комплексного $SL(2,C)$ спинора $z=(z_1,z_2)$[15]. В теории бесконечно-компонентных полей такая реализация была предложена в работах[2,3].

В работе[7] были получены, а в[16] строго обоснованы спектральные представления двухточечной функции для широкого класса полей. В настоящей работе показано, что можно связать эти спектральные представления для полей, которые преобразуются по основной серии унитарных представлений группы Лоренца, с четырехточечной функцией скалярного поля, либо с "двухточечной функцией" билокального поля[9,12]. При этом нужно предполагать, что каждая пара скалярных полей описывает составную систему. Однако волновая функция такой связанной системы преобразуется по приводимому представлению группы Лоренца. Разложение на неприводимые представления этой группы осуществляется посредством интегрального преобразования Гельфанда-Граева, связывающего функцию $f(x)$, заданную на гиперболоиде $x^2=-1$, с функциями, заданными на верхней поле конуса $\xi^2=0$, $\xi_0>0$ и на изотропной прямой (см.[15], гл. VI). Здесь изотропный вектор ξ_μ можно связать с комплексным спинором z[3]. Это разложение дает интересующую нас связь между связанными состояниями двух скалярных частиц и бесконечно-компонентными полями.

2. Рассмотрим четырехточечную функцию

$$F(x_1,y_1,x_2,y_2)=\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(y_1)\,\phi_3(x_2)\phi_4(y_2)|0\rangle \qquad (1)$$

при условии, что

$$(x_\alpha - y_\alpha)^2 < 0 \qquad (\alpha = 1,2). \tag{2}$$

Скалярные поля $\phi_j(x)$ $(j = 1,..,4)$ в (1) при преобразовании из группы Пуанкаре преобразуются как

$$U(a,\Lambda)\phi_j(x)U(a,\Lambda)^{-1} = \phi_j(\Lambda x + a) \tag{3}$$

и удовлетворяют аксиоме о локальной коммутативности, т.е.

$$[\phi_j(x), \phi_k(y)] = 0, \qquad \text{если } (x-y)^2 < 0, (j,k = 1,..,4). \tag{4}$$

Условие релятивистской инвариантности накладывает на функцию F требование

$$F(\Lambda x_1 + a, \Lambda y_1 + a, \Lambda x_2 + a, \Lambda y_2 + a) = F(x_1, y_1, x_2, y_2). \tag{5}$$

Условие трансляционной инвариантности выполняется, если функция F имеет вид

$$F = F(X_1 - X_2, Y_1, Y_2),$$

где ради удобства введены новые координаты

$$X_\alpha = 1/2(x_\alpha + y_\alpha), \qquad (\alpha = 1,2). \tag{6}$$
$$Y_\alpha = 1/2(x_\alpha - y_\alpha)$$

Здесь X_α можно интерпретировать как координаты центра системы $\phi(x_\alpha)$ и $\phi(y_\alpha)$, а Y_α - их относительные координаты. Согласно условию (2),

$$Y_\alpha^2 < 0 \quad (\alpha = 1, 2). \tag{2'}$$

Удобно заменить Y_α на нормированные четырех-векторы

$$n_\alpha = Y_\alpha / \sqrt{-Y_\alpha^2}, \quad n_\alpha^2 = -1 \quad (\alpha = 1, 2). \tag{7}$$

Проинтегрировав (1) по Y_α^2, получим

$$\tilde{\tilde{F}}(X_1 - X_2; n_1, n_2) = \int f_1(Y_1^2) F(X_1 - X_2, Y_1, Y_2) f(Y_2^2) dY_1^2 \, dY_2^2 . \tag{8}$$

Здесь $f_\alpha(Y_\alpha^2)(\alpha = 1, 2)$ - финитные функции, отличные от нуля только при $0 > Y_\alpha^2 \geqslant -R^2$, где R - конечное число. Тогда можно говорить, что поле

$$\Phi(X; n) = \int dY^2 f(Y^2) \phi_1(X + Y) \phi_2(X - Y)$$

описывает составную частицу, а n есть ее спиновая переменная. В системе центра масс этих частиц (предполагаем, что ϕ_1 и ϕ_2 описывают частицы с одинаковыми массами) $\sqrt{-Y^2}$ есть расстояние между ними.

Переходя к фурье-образу $\tilde{\tilde{F}}$, имеем,

$$\tilde{\tilde{F}}(X_1-X_2;n_1,n_2)=\int d^4P\,\theta(P)\,e^{-iP(X_1-X_2)}K(P;n_1,n_2), \tag{9}$$

где $\theta(P)=\Theta(P^0)\Theta(P^2)$ обеспечивает выполнение условия спектральности.

Для ядра K потребуем квадратичную интегрируемость по переменным n_α.

$$\int |K(P;n_1,n_2)|^2\,dn_\alpha<\infty \quad (\alpha=1,2). \tag{10}$$

В таком случае /15/ четырехточечная функция (1) при преобразованиях из группы Лоренца преобразуется по ее приводимым представлениям относительно переменных n_α.

Чтобы разложить ядро K на ядра, которые преобразуются по неприводимым представлениям группы Лоренца, произведем интегральные преобразования Гельфанда-Граева:

$$K(P;n_1,n_2)=$$

$$=1/(64)^2\pi^6\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^2\,d\rho\int_{\rho'=0}^{\infty}\rho'^2\,d\rho'\int_{\Gamma}d\Omega\int_{\Gamma'}d\Omega'(n_1\xi)^{-1-i\rho/2}(n_2\xi')^{-1-i\rho'/2}K^{[\tau,\tau']}(P;\xi,\xi')+$$

$$+1/16\pi^5\sum_{m=1}^{\infty}m\int_{\rho=0}^{\infty}\rho^2\,d\rho\int_{\Gamma}d\Omega\int_{\Gamma'}d\Omega'\{(n_1\xi)^{-1-i\rho/2},\ e^{2im\Theta}\,\delta(n_2\xi')\times$$

$$\times K^{[r,\chi]}(P;\xi,w)+(n_2\xi')^{-1-i\rho/2}e^{2im\Theta}\delta(n_1\xi)K^{[\chi,r]}(P;z,\xi')\}+ \tag{11}$$

$$+16/\pi^4\sum_{m,m'=1}^{\infty}mm'\int_{\Gamma}d\Omega\int_{\Gamma'}d\Omega' e^{2im\Theta}e^{2im'\Theta'}\delta(n_1\xi)\delta(n_2\xi')K^{[\chi,\chi']}(P;z,w).$$

Здесь пары чисел $r=[0,i\rho]$ и $\chi=[2m,-2m]$ обозначают неприводимые представления группы Лоренца[13], ξ и ξ' – изотропные векторы $\xi^2=\xi'^2=0$, а z и w – комплексные $SL(2,C)$ спиноры (каждый изотропный вектор можно представить в следующем виде: $\xi^\mu=z\sigma^\mu\bar{z}$, $\xi'^\mu=w\sigma^\mu\bar{w}$, где σ_j $(j=1,2,3)$ – матрицы Паули, а σ_0 – единичная 2×2 -матрица): Γ и Γ' есть произвольные поверхности на конусах $\xi^2=0,\xi^0>0$ и $\xi'^2=0,\xi'^0>0$, а $d\Omega$ и $d\Omega'$ – -инвариантные меры на поверхностях Γ и Γ' ($d\xi=dq\,d\Omega$ – -где $d\xi$ инвариантная мера на конусе $\xi^2=0$, а $q(\xi)=1$ – уравнение поверхности Γ); Θ – связано с расстоянием от прямой $y=b+t\xi$ до точки n, где b – фиксированный вектор $b^2=-1$.

Представления $\chi=[2m,-2m]$, где m – целое, эквивалентны основной серии унитарных представлений группы Лоренца[15].

Таким образом, мы разложили четырехточечную функцию (1) по неприводимым представлениям группы Лоренца. Из (10) следует, что в этом разложении присутствуют только представления из основной серии унитарных представлений группы Лоренца.

Ядра $K^{[\lambda,\lambda']}(P;\xi,\xi')$ можем рассматривать как ядра двухточечной функции

$$<0\,|\,\Psi\left(\frac{x}{2};z\right)\Phi\left(-\frac{x}{2};w\right)|\,0> = \int d^4P\,\theta(P)e^{-ipx}K^{[\lambda,\lambda']}(P;z,w), \tag{12}$$

где поля Ψ и Φ преобразуются соответственно по представлениям λ и λ' группы Лоренца[7]. Эти ядра $K^{[\lambda,\lambda']}$, следуя[7], можно разложить далее по собственным функциям оператора спина $\hat{S}^2 = -\frac{1}{p^2} w_\mu w^\mu$, где $w_\mu = 1/2\, \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} M^{\nu\sigma} P^\rho$ есть вектор Паули–Любарского.

Используя преобразование, обратное преобразованию (11) (см.[15] гл. VI), имеем

$$K^{[r,r']}(P;\xi,\xi') = \iint K(P;n_1,n_2)|(n_1\xi)|^{i\rho/2-1} |(n_2,\xi')|^{i\rho'/2-1} dn_1 dn_2, \quad (13)$$

$$K^{[r,\chi]}(P;\xi,w) = \iint K(P;n_1,n_2)|(n\,\xi)|^{i\rho/2-1} e^{-2im\Theta}\delta(n_2\xi')dn_1 dn_2, \quad (14)$$

$$K^{[\chi,\chi']}(P;z,w) = \iint K(P;n_1,n_2)\, e^{-2im\Theta} e^{-2im'\Theta'}\delta(n_1\xi)\delta(n_2\xi')dn_1 dn_2. \quad (15)$$

Преобразования (13), (14) и (15) связывают ядра двухточечной функции (12) с ядром четырехточечной функции скалярных полей (1).

Из (1), (4) и (8) следует, что двухточечная функция (12) в этом случае является нелокальной с радиусом нелокальности $2R$.

В заключение отметим, что аналогичным образом можно рассматривать случаи, когда вместо скалярного поля имеются поля со спином. Тогда вместо преобразования Гельфанда–Граева нужно использовать их обобщения[17,18].

Один из авторов (Р.З.) весьма признателен Х.Я.Христову за полезные обсуждения.

Литература

1. G. Feldman and P.T. Matthews. Ann.Phys., 40, 19 (1966). Phys.Rev., 151, 1176 (1966); 154, 1241 (1967), C. Fronsdal, Phys.Rev., 156, 1653 (1967); Abers, I.T. Grodsky and R.E. Norton. Phys.Rev., 159, 1222 (1967).
2. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. Яд. физика 6, 1862 (1967).
3. D.Tz. Stoyanov and I.T. Todorov.. Journ.Math.Phys., 9, 2146(1968).
4. Р.Стритер, А.С.Вайтман. РСТ, спин и статистика и все такое, "Наука", Москва (1966).
5. I.T. Grodsky and R.F. Streater. Phys.Rev.Lett., 20, 695 (1968).
6. H.D.I. Abarbanel and Y. Frischman. Phys.Rev., 171, 1442 (1968).
7. I.T. Todorov and R.P. Zaikov. "Spectral Representation of the Covariant Two Point Function and Infinite Component Fields, with Arbitrary Mass Spectrum", ICPT Trieste, Internal report IC/68/50 (1968);

   а также И.Т.Тодоров в "Вопросах теории элементарных частиц" Дубна, Р2-4050, 1968 и I.T. Todorov. Proceedings of Nobel Symposium 8 N. Svartholm ed., John Wiley & Sons, New York (1968).
8. A. Oksak and I.T. Todorov. Comm. Math.Phys., 11, 125 (1968).
9. Д.И.Блохинцев. ЖЭТФ 17, 545 (147);

   D. Blokhintsev. On the Simple Relativistic Models of the Hadrons, in Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy. Gordon and Breach, New York (1969).
10. В.Л.Гинзбург, И.Е.Тамм. ЖЭТФ 17, 227 (1947).
11. Ю.М.Широков. ЖЭТФ 21, 748 (1951).
12. R.F. Streater. Proc. Phys.Soc., 83, 549 (1964); Ann. Phys. 30, 1 (1964).
13. C. Fronsdal. "Two Particle Systems and Infinite Component, Fields", в "Вопросы теории элементарных частиц", Дубна Р2-4050 (1968).

14. T. Takabayashi. in "Proceedins of Nobel Symposium", N. Svartholm, ed., John Wiley & Sons, New York (1968).
15. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теорий представлений, Физматгиз, Москва, 1962.
16. A. Oksak and I.T. Todorov. Commun. math. Phys., 14, 271 (1969).
17. Чжоу Гуан-чжао, Л.Г.Заставенко, ЖЭТФ 35, 1417 (1958).
18. В.С.Попов. ЖЭТФ 37, 1116 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 ноября 1969 года.