СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

P2 - 4798

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

О ВЕРХНЕМ И НИЖНЕМ ПРЕДЕЛАХ РАДИУСА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

1969

P2 - 4798

Дао Вонг Дык,* Нгуен Ван Хьеу*

О ВЕРХНЕМ И НИЖНЕМ ПРЕДЕЛАХ РАДИУСА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

* Институт физики Государственного комитета по науке и технике Демократической Республики Вьетнам (Ханой).

§1. Введение

Экспериментально проверяемые следствия общих аналитических свойств формфактора были изучены во многих работах [1-6]. Было показано, что в силу аналитичности формфактора в комплексной плоскости t с разрезом его поведение в физической области канала рассеяния ($t \le 0$) связано с поведением его модуля на разрезе (см. [2-6]). В частности, если задан максимум модуля некоторого формфактора на разрезе, то можно получить верхний предел соответствующего радиуса. Различные пределы такого рода были получены в работах [2,5,6]. Если предположить, что формфактор π-мезона достигает максимума в резонансной точке, соответствующей ρ-мезону, то из экспериментальных данных по сечению процесса аннигиляции [7,8]

$$e^+ + e^- \to \pi^+ + \pi^-$$

можно получить для радиуса π-мезона верхние пределы в интервале 2,1 - 2,8 ферми.

На опыте мы можем определить, в принципе, не только максимум модуля формфактора π-мезона в физической области аннигиляционного канала ($t > 4m_\pi^2$), но и значения модуля во всех точках этой области. Пользуясь всей этой информацией, мы можем получить более точный результат. Кроме того, верхние пределы, полученные в работах [2,5,6], могут быть весьма завышенными. Может случиться, что эти верхние пределы намного превышают верхнюю границу возможных значений радиуса, соответствующих данному значению максимума модуля формфактора на разрезе.

В настоящей работе мы улучшаем результаты работ [2,5,6]. Мы получаем выражение для верхнего предела радиуса, содержащее явно значения модуля формфактора на всем разрезе вместо его максимума. Наш результат нельзя усилить, поскольку существует экстремальный случай, когда радиус достигает этого верхнего предела. Наряду с верхним пределом мы получаем также нижний предел.

Если модуль формфактора π -мезона в области $t \geq 4m_\pi^2$ выражается резонансной формулой вида Брейта-Вигнера, соответствующей ρ -мезону [7,8], то в пределах экспериментальных ошибок верхний предел радиуса π -мезона совпадает с нижним и мы предсказываем для этого радиуса значение

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0{,}62 \pm 0{,}12\ \phi\ .$$

Согласно данным опыта по электророждению π -мезона [9]

$$e^- + p \to e^- + n + \pi^+$$

эта величина оказывается равной 0,8 ± 0,1 ферми.

§2. Формулировка и решение экстремальной задачи

Напомним, что среднеквадратичный радиус связан с производным формфактора $F(t)$ в точке $t=0$ следующим образом: $\langle r^2 \rangle = 6F'(0)$. Мы предположим, что функция $F(t)$ аналитична по t в комплексной плоскости с разрезом $t \geq 4m_\pi^2$. Она удовлетворяет условию вещественности

$$F(t^*) = F(t)^*. \tag{1}$$

Наша задача заключается в нахождении максимального и минимального значения $F'(0)$ среди возможных его значений при заданном распределении значений модуля $F(t)$ в области $t > 4m_\pi^2$.

Посредством конформного отображения

$$z = \frac{1-\sqrt{1-t/4m_\pi^2}}{1+\sqrt{1-t/4m_\pi^2}} \tag{2}$$

мы преобразуем плоскость t с разрезом в единичный круг, причём точка $t=0$ переходит в центр, а разрез $t \geq 4m_\pi^2$ преобразуется в единичную окружность. Положим $F(t) = f(z)$. Новая функция $f(z)$ аналитична в единичном круге и в силу условия (1) обладает следующим свойством:

$$f(z^*) = f(z)^*. \tag{3}$$

Далее мы предположим, что интеграл $\int_0^{2\pi} \ell n |f(re^{i\phi})| d\phi$ является непрерывной функцией от r вплоть до точки $r=1$, т.е.

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \ell n\, |f(re^{i\phi})| d\phi = \int_0^{2\pi} \ell n |f(e^{i\phi})| d\phi. \tag{4}$$

Так как

$$F'(0) = \frac{1}{16 m_\pi^2} f'(0), \tag{5}$$

то для нашей цели достаточно решить следующую экстремальную задачу.

Рассмотрим класс E_ρ аналитических в единичном круге функций $f(z)$, обладающих следующими свойствами:

1) $f(0) = 1$;

2) $f(z)$ принимает вещественные значения на вещественной оси и, следовательно, $f(z^*) = f(z)^*$;

3) $\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \ell n\, |f(re^{i\phi})| d\phi = \int_0^{2\pi} \ell n\, |f(e^{i\phi})| d\phi$;

4) на единичной окружности её модуль принимает заданные значения

$$|f(e^{i\phi})| = \rho(\phi).$$

Требуется найти верхнюю и нижнюю границы

$$\sup_{f\in E_\rho} |f'(0)| \quad \text{и} \quad \inf_{f\in E_\rho} |f'(0)|.$$

Обозначим через a_i нули функции $f(z)$, а через $B(z)$ соответствующее произведение Бляшке /10/

$$B(z) = \prod_i \frac{a_i^*}{|a_i|} \cdot \frac{a_i - z}{1 - a_i^* z}, \tag{6}$$

и положим

$$g(z) = \frac{f(z)}{B(z)}. \tag{7}$$

Функция $g(z)$ аналитична в единичном круге и не имеет нулей. Поэтому $\ln|g(z)|$ является гармонической функцией и мы можем пользоваться формулой Пуассона

$$\ln|g(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(\phi-\theta)} \ln|g(r'e^{i\phi})|d\phi .$$

Так как $g(z)$ также принимает вещественные значения на вещественной оси, $|B(re^{i\phi})| \to 1$ при $r \to 1$, а интеграл от $\ln|f(r'e^{i\phi})|$ непрерывен по r' (условие (4)), то отсюда следует, что

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{i\phi})|d\phi , \tag{8}$$

$$\frac{g'(0)}{g(0)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi \ \ln|f(e^{i\phi})|d\phi . \tag{9}$$

Пользуясь теперь свойствами 1) и 4) функции $f(z)$, мы получаем

$$\ln\frac{1}{B(0)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\phi)d\phi, \tag{10}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi \ \ln\rho(\phi)d\phi + \frac{B'(0)}{B(0)} . \tag{11}$$

Последние соотношения показывают, что для определения $\sup f'(0)$ и $\inf f'(0)$ достаточно определить верхнюю и нижнюю границы $B'(0)$ при заданном $B(0)$.

Пользуясь выражением (6) для произведения Бляшке, нетрудно показать, что при заданном $B(0)$ максимальное значение $B'(0)$ равно $1-B^2(0)$, а его минимальное значение равно $B^2(0)-1$, причём существуют функции, для которых $B'(0)$ достигает этих экстремальных значений. Мы имеем, таким образом, следующее решение сформулированной задачи:

$$\sup_{f \in E_\rho} f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi \quad \ln\rho(\phi)\,d\phi + 2\,\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\phi)\,d\phi\right], \tag{12}$$

$$\inf_{f \in E_\rho} f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\phi \cdot \ln\rho(\phi)\,d\phi - 2\,\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\rho(\phi)\,d\phi\right]. \tag{13}$$

§3. Радиус π -мезона

Полученный результат можно применить для нахождения верхнего и нижнего пределов радиуса π -мезона, так как в этом случае модуль формфактора на разрезе $t > 4m_\pi^2$ можно определить из экспериментальных данных по сечению процесса аннигиляции

$$e^+ + e^- \to \pi^+ + \pi^- .$$

С другой стороны, радиус π -мезона можно определить непосредственно на опыте по πe -рассеянию.

Из соотношений (12) и (13) мы получим

$$\sup F'(0) = \frac{1}{16\,m_\pi^2}(M_1 + M_2), \tag{14}$$

$$\inf F'(0) = \frac{1}{16\,m_\pi^2}(M_1 - M_2), \tag{15}$$

где

$$M_1 = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{2-\omega}{\omega^2\sqrt{\omega-1}}\ln\,|F(4m_\pi^2\omega)|\,d\omega, \tag{16}$$

$$M_2 = 2\,\mathrm{sh}\,\left\{ \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{\omega\sqrt{\omega-1}}\, \ell n\, |F(4m_\pi^2\omega)|\, d\omega \right. . \qquad (17)$$

Значение модуля формфактора π -мезона вблизи пика, соответствующего ρ -мезону, было измерено на опытах с встречными пучками /7,8/. Оно хорошо аппроксимируется резонансной формулой вида Брейта-Вигнера. Допустим, что эта формула справедлива во всей области $t \geq 4m_\pi$. Тогда в пределах экспериментальных ошибок M_2 равно нулю и формулы (14) и (15) определяют непосредственно значение радиуса π -мезона:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0{,}62 \pm 0{,}12 \text{ ферми.}$$

Литература

1. Б.В.Гешкенбейн, Б.Л.Иоффе. ЖЭТФ, 46, 903 (1964).
2. Нгуен Ван Хьеу. ЯФ, 7, 1111 (1968).
3. T.N.Tran, R.Vinh Mau, P.X.Yem. Phys.Rev., 172, 1645 (1968).
4. Нгуен Ван Хьеу. ДАН СССР, 182, 1303 (1968).
5. В.Балуни, Нгуен Ван Хьеу, В.А.Сулейманов. ЯФ, 9, 635 (1969).
6. Б.В.Гешкенбейн. ЯФ, 9, 1232 (1969).
7. V.L.Auslander, G.I.Budker, Ju.N.Pestov, V.A.Sidorov, A.N.Skrinsky, A.G.Khabakhpashev. Phys.Lett., 25B, 433 (1967).
8. F.Rumpf. Thesis, Paris, 1969.
9. C.W.Akerlof, W.W.Ash, K.Berkelman, C.A.Lishtenstein, A.Ramanauskas, R.H.Siemann. Phys.Rev., 163, 1482 (1967).
10. И.И.Привалов. Граничные свойства аналитических функций, ГИТТЛ, 1950.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 ноября 1969 года.