ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4779

Р.Н. Фаустов

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4779

Р.Н. Фаустов

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

Направлено в ЖТМФ

§1. Введение

В основе квазипотенциального метода в теории поля, предложенного Логуновым и Тавхелидзе /1/, лежит использование двухвременной функции Грина системы частиц. Связанные состояния такой системы при этом описываются одновременной волновой функцией, удовлетворяющей квазипотенциальному уравнению типа Шредингера с комплексным, зависящим от энергии и, вообще говоря, нелокальным потенциалом. Основным достоинством этого уравнения является его трехмерный характер, что проявляется в отсутствии нефизического параметра относительного времени (или соответственно относительной энергии). Это обстоятельство позволяет найти интерпретацию физического смысла волновой функции /2/. Зависимость ядра уравнения (квазипотенциала) от энергии приводит, однако, как будет показано ниже, к более сложному условию нормировки, хорошо известному для многовременной волновой функции Бете-Солпитера /3/. Квазипотенциальное уравнение может быть получено для системы любого числа /4/ частиц с произвольными спинами. Оно с успехом было применено для вычисления поправок к уровням энергии водородоподобных систем в рамках квантовой электродинамики /5/. Была рассмотрена также проблема нахождения локальных токов составных частиц [6]. В последнее время использование квазипотенциального уравнения типа Липпмана-Швингера с гауссовским потенциалом позволило объяснить ряд свойств амплитуды рассеяния при высоких энергиях [7].

В §2 получен общий вид квазипотенциального уравнения для системы N частиц с произвольными спинами и условие нормировки для волновой функции такой системы.

В §3 дано определение матричного элемента локального оператора для связанных состояний и рассмотрена его связь с условиями нормировки и ортогональности квазипотенциальных волновых функций. Для системы в слабом внешнем векторном поле получено обычное мультипольное разложение.

2. Некоторые общие свойства квазипотенциального уравнения

Рассмотрим Фурье-преобразование двухвременной функции Грина в импульсном пространстве. Пусть

$$\vec{p} = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N) \qquad \text{и} \qquad \vec{q} = (\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N)$$

обозначают совокупность импульсов конечного и начального состояний, а

$$\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) \qquad \text{и} \qquad \vec{y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_N)$$

– соответствующие координаты. Введем далее величину E – полную энергию системы и полные импульсы конечного и начального состояний

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i, \quad \vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} \vec{q}_i .$$

Тогда по определению и с учётом трансляционной инвариантности

$$i(2\pi)^3 \delta(\vec{P}-\vec{Q}) G_N(\vec{p},\vec{q};E) = \int dt\, d^N\vec{x}\, d^N\vec{y} \exp\Big[iEt - i\sum_{k=1}^{N}(\vec{p}_k \vec{x}_k) + i\sum_{k=1}^{N}(\vec{q}_k \vec{y}_k)\Big] \times \tag{2.1}$$
$$\times \tilde{\tilde{G}}_N(\vec{x},\vec{y};t),$$

где $d^N\vec{x} = d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_N$ и аналогично $d^N\vec{y}$

$$\tilde{\tilde{G}}_N(\vec{x},\vec{y};t) = \langle 0 | T\{ \phi_1(t,\vec{x}_1) \dots \phi_N(t,\vec{x}_N) \overset{+}{\phi}_N(0,\vec{y}_N) \dots \overset{+}{\phi}_1(0,\vec{y}_1) \} | 0 \rangle .$$

Используя определение T-произведения через θ – функции, легко получить [1] спектральное представление для функции G_N

$$G_N(\vec{p},\vec{q};E) = \int_0^\infty dE' \Big[\frac{\tilde{\tilde{I}}_N(\vec{p},\vec{q};E')}{E-E'+i\epsilon} \mp \frac{\tilde{\tilde{I}}_N(\vec{p},\vec{q};E')}{E+E'-i\epsilon} \Big], \quad \vec{P}=\vec{Q}, \tag{2.2}$$

где

$$I_N(\vec{p},\vec{q};E) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(E-E_n)\delta_n(\vec{P}-\vec{K}_n)\chi_{0n}(\vec{p}) \otimes \overset{*}{\chi}_{0n}(\vec{q})$$

$$\tilde{\tilde{I}}_N(\vec{p},\vec{q};E) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(E-E_n)\delta(\vec{P}+\vec{K}_n)\chi_{n0}(\vec{p}) \otimes \overset{*}{\chi}_{n0}(\vec{q})$$

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{P}-\vec{K}_n)\chi_{0n}(\vec{p}) = \int d^N\vec{x} \exp\Big[-i\sum_{k=1}^{N}(\vec{p}_k \vec{x}_k)\Big] \langle 0 | \phi_1(0,\vec{x}_1) \dots \phi_N(0,\vec{x}_N) | n \rangle .$$

Выбор знака $(\mp)$ в спектральном представлении (2) зависит от свойств коммутации операторов ϕ (см. ниже). Гейзенберговские операторы $\phi(0,\vec{x})$ можно отождествить с независящими от времени шредингеровскими операторами. Определим теперь волновую функцию релятивистской системы в импульсном пространстве

$$\Psi_n(\vec{p}) = \sqrt{2E_n}\,\chi_{0n}(\vec{p}), \quad \vec{K}_n = \vec{P}, \tag{2.3}$$

которая является фурье-преобразованием одновременной волновой функции. Эту волновую функцию можно интерпретировать как амплитуду вероятности нахождения в состоянии $|n>$ частиц, описываемых операторами $\phi_1, \ldots, \phi_N$.

Допустим теперь, что среди полного набора стационарных состояний $|n>$ имеется связанное состояние $|B>$ с энергией

$$E_B = \sqrt{K_B^2 + M_B^2}, \quad M_B < \sum_{i=1}^{N} m_i .$$

В этом случае, как следует из спектрального представления (2.1), функция Грина имеет полюс в точке $E = E_B$ и вблизи полюса

$$G_N(\vec{p}, \vec{q}; E) \cong \frac{\Psi_B(\vec{p}) \otimes \Psi_B(\vec{q})}{2E_B(E - E_B)}, \; \vec{K}_B = \vec{P} = \vec{Q} . \tag{2.4}$$

Введем теперь оператор квазипотенциала V

$$G^{-1} = G_0^{-1} - V , \tag{2.5}$$

где G_0 -двухвременная функция Грина свободных невзаимодействующих частиц. Обычно бывает удобнее выражать оператор квазипотенциала через амплитуду рассеяния T вне массовой поверхности, определенную следующим образом:

$$G - G_0 = G_0 T G_0 .$$

Тогда вместо равенства (2.5) мы получим эквивалентное определение

$$V = T(1 + G_0 T)^{-1} , \tag{2.5a}$$

где умножение понимается в операторном смысле как интегрирование по пространству трехмерных импульсов. Из очевидных тождеств

$$G^{-1} G = G G^{-1} = 1 \tag{2.6}$$

и представления (2.4) следует, что волновая функция Ψ_B удовлетворяет уравнениям

$$G_0^{-1} \Psi_B = V \Psi_B , \quad \overset{*}{\Psi}_B G_0^{-1} = \overset{*}{\Psi}_B V . \tag{2.7}$$

Умножая тождества (2.6) на G и используя определение (2.5), приходим к соотношению

$$G(G^{-1} - V)G = G . \tag{2.8}$$

Приравнивая вычеты в полюсе при $E = E_B$ в обеих частях равенства (2.8) с учётом представления (2.4) и уравнений (2.7), мы получим условие нормировки для волновой функции /6,8/

$$\overset{*}{\Psi}_B \left[\frac{\partial}{\partial E}(G_0^{-1} - V)\right]_{E=E_B} \Psi_B = 2 E_B$$

или в более подробной записи

$$\int d^N\vec{p}\, d^N\vec{q}\, \overset{*}{\Psi}_B(\vec{p}) \cdot \frac{\partial}{\partial E}[G^{-1}_{0N}(\vec{p},\vec{q};E) - V_N(\vec{p},\vec{q};E)]_{E=E_B} \Psi_B(\vec{q}) = 2E_B, \qquad (2.9)$$

где $d^N\vec{p} = (2\pi)^{-3N} d\vec{p}_1\, d\vec{p}_2 \ldots d\vec{p}_N (2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{K}_B)$ и аналогично $d^N\vec{q}$.

Выбор вектора $\vec{K}_B$ определяет систему отсчёта. В частности, $\vec{K}_B = 0$ фиксирует систему центра масс (или что то же самое – систему покоя связанного состояния).

Займемся теперь более подробным исследованием структуры оператора G_0 , характеризующего распространение свободных невзаимодействующих частиц. При этом удобно непосредственно воспользоваться спектральными представлением (2.2). Пусть $|0>$ и $|n>$ – векторы состояний голых невзаимодействующих частиц. Тогда, очевидно, отличный от нуля вклад дают только состояния с $n = N$ и мы получаем, используя обычные коммутационные соотношения

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{K}_N)\chi_{0N}(\vec{p}) = \prod_{i=1}^{N} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i - \vec{k}_i) \frac{u_i(p_i)}{\sqrt{2\epsilon_i(p_i)}},$$

где

$$\epsilon_i(p_i) = \sqrt{p_i^2 + m_i^2},$$

$u(p)$ – волновые функции свободных частиц с положительной энергией (спиновые индексы опущены), нормированные условием

$$\overset{*}{u}(p)\, u(p) = \begin{cases} 2\epsilon(p) & \text{для фермионов} \\ 1 & \text{для бозонов} \end{cases} .$$

Аналогично,

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{K}_N)\chi_{N0}(\vec{p}) = \prod_{i=1}^{N} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i - \vec{k}_i) \frac{v_i(p_i)}{\sqrt{2\epsilon_i(p_i)}},$$

где $v(p)$ – волновая функция свободной частицы с отрицательным значением энергии. Тогда спектральные функции $I(\vec{p},\vec{q};E)$ в представлении (2.2) принимают вид:

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{Q}) I(\vec{p},\vec{q};E) = \delta(E - \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j(p_j)) \prod_{i=1}^{N} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i - \vec{q}_i) \frac{u_i(p_i) \otimes \overset{*}{u}_i(p_i)}{2\epsilon_i(p_i)}$$

(2.10)

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{Q}) \bar{I}(\vec{p},\vec{q};E) = \delta(E - \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j(p_j)) \prod_{i=1}^{N} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i - \vec{q}_i) \frac{v_i(p_i) \otimes \overset{*}{v}_i(p_i)}{2\epsilon_i(p_i)}$$

и мы получаем выражение для функции Грина невзаимодействующих частиц

$$(2\pi)^3 \delta(\vec{P} - \vec{Q}) G_{0N}(\vec{p},\vec{q};E) = \prod_{k=1}^{N} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_k - \vec{q}_k) \left\{ \frac{\prod_{i=1}^{N} \Lambda_i^{(+)}(p_i)}{E - \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j(p_j)} \mp \frac{\prod_{i=1}^{N} \Lambda_i^{(-)}(p_i)}{E + \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j(p_j)} \right\}, \qquad (2.11)$$

где

$$\Lambda^{(+)}(p) = \frac{u(p) \otimes \overset{*}{u}(p)}{2\epsilon(p)}, \qquad \Lambda^{(-)}(p) = \frac{v(p) \otimes \overset{*}{v}(p)}{2\epsilon(p)} .$$

обычные проекционные операторы Казимира на состояния с положительной и отрицательной энергией (для упрощения записи сумма по поляризационным индексам опущена) со свойствами (для фермионов):

$$\Lambda^{(+)}(p)\,u(p)=u(p),\quad \Lambda^{(+)}(p)\,v(p)=0;\quad \Lambda^{(-)}(p)\,u(p)=0,\quad \Lambda^{(-)}(p)\,v(p)=v(p).$$

Знак перед вторым слагаемым зависит от свойств коммутации операторов ϕ. Для бозонов нужно брать всегда знак минус. Для фермионов мы получим минус в случае чётного числа частиц и знак плюс – в случае нечётного.

Рассмотрим теперь несколько примеров. В случае нерелятивистского уравнения Шредингера мы, очевидно, имеем

$$(2\pi)^3\delta(\vec P-\vec Q)\,G^{-1}_{0N}(\vec p,\vec q;E)=\prod_{j=1}^{N}(2\pi)^3\delta(\vec p_j-\vec q_j)\left\{E-\sum_{i=1}^{N}m_i-\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m_i}\right\} \qquad (2.12)$$

и, если потенциал не зависит от энергии, условие нормировки (2.9) принимает обычную форму

$$\int d^N\vec p\,|\Psi_B(p)|^2=2E_B. \qquad (2.13)$$

Переходим теперь к релятивистским системам и начнем с простейшего случая (псевдо) скалярных частиц. Тогда, очевидно,

$$\Lambda^{(+)}(p)=\Lambda^{(-)}(p)=\frac{1}{2\epsilon(p)}$$

и мы приходим к формуле

$$(2\pi)^3\delta(\vec P-\vec Q)\,G^{-1}_{0N}(\vec p,\vec q;E)=\frac{\prod_{k=1}^{N}(2\pi)^3\delta(\vec p_k-\vec q_k)\,2\epsilon_k(p_k)}{2\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(p_i)}\left\{E^2-\Big[\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(p_i)\Big]^2\right\}. \qquad (2.14)$$

Квазипотенциальное уравнение (7) принимает вид

$$\left\{E^2-\Big[\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(p_i)\Big]^2\right\}\Psi_B(\vec p)=\frac{2\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(p_i)}{\prod_{k=1}^{N}2\epsilon_k(p_k)}\int d^N\vec q\;V_N(\vec p,\vec q;E)\,\Psi_B(\vec q),$$

а условие нормировки (9) волновой функции выглядит как

$$\int d^N\vec p\;\Psi^*_B(\vec p)\,\frac{\prod_{k=1}^{N}2\epsilon_k(p_k)}{2\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(p_i)}\,\Psi_B(\vec p)-\frac{1}{2E_B}\int d^N\vec q\,d^N\vec p\;\Psi^*_B(\vec p)\Big[\frac{\partial}{\partial E}V(\vec p,\vec q;E)\Big]_{E=E_B}\times\Psi_B(\vec q)=1$$

В частности, при $N=2$ в системе центра масс ($\vec P=\vec Q=0$; $\vec p_1=-\vec p_2=\vec p$; $\vec q_1=-\vec q_2=\vec q$) имеем

$$\left\{E^2-[\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)]^2\right\}\Psi_B(\vec p)=\frac{\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)}{2\epsilon_1(p)\epsilon_2(p)}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec q\;V(\vec p,\vec q;E)\,\Psi_B(\vec q). \qquad (2.16)$$

В случае частиц с высшими спинами положение несколько осложняется тем, что оператор G_0, вообще говоря, не имеет обратного, т.е.

$$\mathrm{Det}\,G_0=0. \qquad (2.17)$$

Это свойство следует непосредственно из явного выражения (2.11) для G_0. В самом деле, система проекционных операторов, стоящих в знаменателях этого выражения, не является полной, так как отсутствуют операторы, проектирующие на "смешанные" (по знаку энергии) состояния. Эту трудность можно обойти различными путями /5,9/, и, в частности, можно спроектировать полную двухвременную функцию Грина G и волновую функцию Ψ на различные подпространства состояний, где оператор G_0 уже будет обладать обратным.

С физической точки зрения эта операция связана с тем, что волновые функции u и v реализуют неприводимые представления группы Пуанкаре четырехмерного пространства времени. После исключения параметров относительного времени (или соответственно относительной энергии) мы переходим в трехмерное пространство координат (импульсов) и поэтому естественно перейти к волновым функциям, реализующим неприводимые представления группы движений этого пространства.

Например, для частиц со спином 1/2 это означает переход от четырехкомпонентных спинорных волновых функций Дирака к двухкомпонентным функциям Паули.

Рассмотрим подробнее случай, когда проекция осуществляется на состояния с одними только положительными значениями энергии частиц /5/

$$\begin{aligned}
\Psi_B^{(+)}(\vec{p}) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{\overset{*}{u}_i(p_i)}{\sqrt{2\epsilon_i(p_i)}} \Psi_B(\vec{p}) \\
\overset{*(+)}{\Psi}_B(\vec{p}) &= \overset{*}{\Psi}_B(\vec{p}) \prod_{i=1}^{N} \frac{u_i(p_i)}{\sqrt{2\epsilon_i(p_i)}} \qquad (2.18) \\
G_N^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{\overset{*}{u}_i(p_i)}{\sqrt{2\epsilon_i(p_i)}} G(\vec{p},\vec{q};E) \prod_{j=1}^{N} \frac{u_j(q_j)}{\sqrt{2\epsilon_j(q_j)}} .
\end{aligned}$$

В частности, используя выражение (2.11), получим

$$(2\pi)^3\,\delta(\vec{P}-\vec{Q})\,[G_{0N}^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)]^{-1} = \prod_{i=1}^{N}(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}_i-\vec{q}_i)\{E-\sum_{j=1}^{N}\epsilon_j(p_j)\}. \qquad (2.19)$$

Таким образом, квазипотенциальное уравнение (2.7) принимает вид:

$$\{E-\sum_{i=1}^{N}\epsilon_i(p_i)\}\Psi_B^{(+)}(\vec{p}) = \int d^N\vec{q}\, V_N^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)\,\Psi_B^{(+)}(\vec{q}), \qquad (2.20)$$

где оператор квазипотенциала $V^{(+)}$ определяется из соотношения, аналогичного (2.5)

$$V^{(+)} = [G_0^{(+)}]^{-1} - [G^{(+)}]^{-1}$$

или (2.5а)

$$V^{(+)} = T^{(+)}(1+G^{(+)}T^{(+)})^{-1}, \qquad (2.21)$$

где

$$G^{(+)} - G_0^{(+)} = G_0^{(+)}T^{(+)}G_0^{(+)} .$$

Условие нормировки (9) при этом приобретает форму

$$\int d^N\vec{p}\,|\Psi_B^{(+)}(\vec{p})|^2 - \int d^N\vec{p}\,d^N\vec{p}\;\overset{*(+)}{\Psi}_B(\vec{p})\,[\frac{\partial}{\partial E}V_N^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)]_{E=E_B}\Psi_B^{(+)}(\vec{q}) = 2E_B. \qquad (2.22)$$

Рассмотрим более подробно уравнение для связанной системы двух частиц со спинами 1/2. В системе центра масс $\vec{P} = \vec{Q} = 0$ и $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, $\vec{q}_1 = -\vec{q}_2 = \vec{q}$, и уравнение (20) переходит в

$$(E - \sqrt{p^2 + m_1^2} - \sqrt{p^2 + m_2^2})\,\Psi_B^{(+)}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\; V^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)\,\Psi_B^{(+)}(\vec{q}). \qquad (2.23)$$

Поскольку в этом случае функция Грина обычно выражается через операторы $\bar{\phi} = \phi^{+}\gamma_0$, то определение (18) для $G^{(+)}$ нужно модифицировать следующим образом:

$$G_2^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E) = \frac{u_1^{*}(p)\,u_2^{*}(-p)}{\sqrt{2\epsilon_1(p)2\epsilon_2(p)}}\, G_2(\vec{p},\vec{q};E)\,\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\, \frac{u_1(q)\,u_2(-q)}{\sqrt{2\epsilon_1(q)2\epsilon_2(q)}}. \qquad (2.24)$$

3. Матричные элементы локальных операторов между связанными состояниями

Рассмотрим функцию [10]

$$R_N(\vec{p},\vec{q};E,W) = \int dt\,d\tau\,d^N\vec{x}\,d^N\vec{y}\;\tilde{\tilde{R}}_N(t,\tau;\vec{x},\vec{y})\exp\{iEt - iW\tau - i\sum_{k=1}^{N}(\vec{p}_k\vec{x}_k) + i\sum_{k=1}^{N}(\vec{q}_k\vec{y}_k)\}, \qquad (3.1)$$

где

$$\tilde{\tilde{R}}_N(t,\tau;\vec{x},\vec{y}) = \langle 0|\,T\{\phi_1(t,\vec{x}_1)\ldots\phi_N(t,\vec{x}_N)\,J(0)\,\phi_N^{+}(\tau,\vec{y}_N)\ldots\phi_1^{+}(\tau,\vec{y}_1)\}\,|0\rangle$$

E – и W – полные энергии частиц в конечном и начальном состояниях, $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$ и $\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N}\vec{q}_i$ – полные импульсы, $J(z)$ – произвольный локальный оператор. Введем также переменные (Рис. 1)

$$\omega = E - W \quad \text{и} \quad \Delta = \vec{P} - \vec{Q}.$$

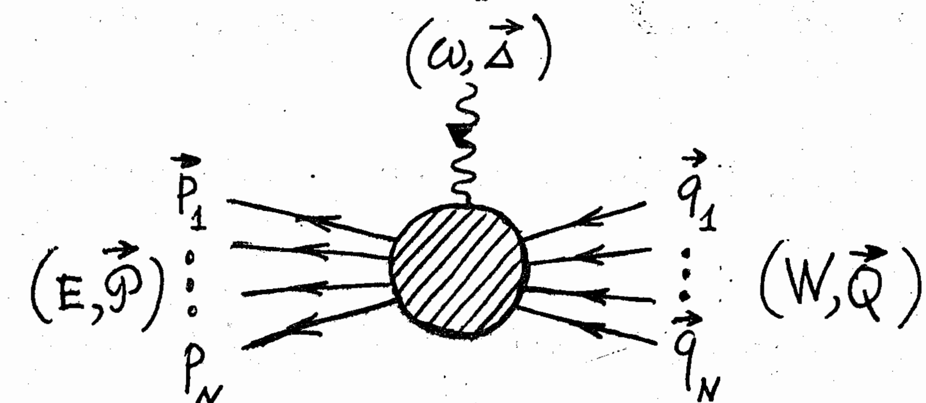

Рис. 1.

Представляя T – произведение в (2.1) через θ – функции, получим следующее двумерное спектральное представление для R:

$$\begin{aligned} R(\vec{p},\vec{q};E,W) = {} & \iint_0^{\infty} dE'\,dW'\left\{\frac{L(\vec{p},\vec{q};E',W')}{(E-E')(W-W')} + \frac{\tilde{L}(\vec{p},\vec{q};W',E')}{(W+W')(E+E')}\right\} + \\ & + \iint_0^{\infty} dE'\,d\omega'\left\{\frac{M(\vec{p},\vec{q};E',\omega')}{(E-E')(\omega-\omega')} + \frac{\tilde{M}(\vec{p},\vec{q};\omega',E')}{(\omega+\omega')(E+E')}\right\} - \\ & - \iint_0^{\infty} dW'\,d\omega'\left\{\frac{N(\vec{p},\vec{q};W',\omega')}{(W+W')(\omega-\omega')} + \frac{\tilde{N}(\vec{p},\vec{q};\omega',W')}{(\omega+\omega')(W-W')}\right\}, \end{aligned} \qquad (3.2)$$

где

$$L(\vec{p},\vec{q};E,W)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta(E-E_m)\delta(W-E_n)\delta(\vec{P}-\vec{K}_m)\delta(\vec{Q}-\vec{K}_n)\ \chi_{0m}(\vec{p})<m|J(0)|n>\overset{*}{\chi}_{0n}(\vec{q}),$$

$$\tilde{\tilde{L}}(\vec{p},\vec{q};E,W)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta(W-E_m)\delta(E-E_n)\delta(\vec{Q}+\vec{K}_m)\delta(\vec{P}+\vec{K}_n)\ \chi_{n0}(\vec{p})<m|J(0)|n>\overset{*}{\chi}_{m0}(\vec{q}),$$

$$M(\vec{p},\vec{q};E,\omega)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta(E-E_m)\delta(\omega-E_n)\delta(\vec{P}-\vec{K}_m)\delta(\vec{\Delta}-\vec{K}_n)\ \chi_{0m}(\vec{p})\overset{*}{\chi}_{nm}(\vec{q})<n|J(0)|0>,$$

$$\tilde{\tilde{M}}(\vec{p},\vec{q};E,\omega)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta(\omega-E_m)\delta(E-E_n)\delta(\vec{\Delta}+\vec{K}_m)\delta(\vec{P}+\vec{K}_n)\ <0|J(0)|m>\chi_{n0}(\vec{p})\overset{*}{\chi}_{nm}(\vec{q}),$$

$$N(\vec{p},\vec{q};W,\omega)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta(W-E_m)\delta(\omega-E_n)\delta(\vec{Q}+\vec{K}_m)\delta(\vec{\Delta}-\vec{K}_n)\ \chi_{mn}(\vec{p})\overset{*}{\chi}_{m0}(\vec{q})<n|J(0)|0>,$$

$$\tilde{\tilde{N}}(\vec{p},\vec{q};\omega,W)=(2\pi)^6\sum_{m,n}\delta(\omega-E_m)\delta(W-E_n)\delta(\vec{\Delta}+\vec{K}_m)\delta(\vec{Q}-\vec{K}_n)\ <0|J(0)|m>\chi_{mn}(\vec{p})\overset{*}{\chi}_{0n}(\vec{q}),$$

$$(2\pi)^3\delta(\vec{P}+\vec{K}_m-\vec{K}_n)\chi_{mn}(\vec{p})=\int d^N\vec{x}<m|\phi_1(0,\vec{x}_1)\ldots\phi_N(0,\vec{x}_N)|n>\exp\{-i\sum_{j=1}^{N}(\vec{p}_j\vec{x}_j)\}.$$

Пусть среди полного набора состояний $|m>$ и $|n>$ имеются связанные состояния $|A>$ и $|B>$ с энергиями E_A и E_B. Тогда из спектрального представления (3.2) видно, что функция R имеет полюса при $E=E_A$ и $W=E_B$ и вблизи этих полюсов может быть представлена в виде

$$R(\vec{p},\vec{q};E,W)\cong\frac{\Psi_A(\vec{p})<A|J(0)|B>\overset{*}{\Psi}_B(\vec{q})}{2\sqrt{E_AE_B}(E-E_A)(W-E_B)}, \tag{3.3}$$

$$\vec{K}_A=\vec{P};\ \vec{K}_B=\vec{Q},\quad E_A=\sqrt{K_A^2+M_A^2},\ E_B=\sqrt{K_B^2+M_B^2},$$

где $\Psi_B(\vec{p})$ – волновая функция связанного состояния, определенная в (2.3). С другой стороны, мы определим вершинный оператор Γ как

$$R=G\,\Gamma\,G\ . \tag{3.4}$$

Умножение здесь, как и раньше, понимается в операторном смысле (см. (2.5)). Используя представление (2.4) для функции Грина G и определение (3.4) вблизи этих же полюсов, мы получим для функции R выражение

$$R_N(\vec{p},\vec{q};E,W)\cong\frac{\Psi_A(\vec{p})}{2E_A(E-E_A)}\otimes\int d^N\vec{p}\,'d^N\vec{q}\,'\overset{*}{\Psi}_A(\vec{p}\,')\Gamma_N(\vec{p}\,',\vec{q}\,';E_A,E_B)\Psi_B(\vec{q}\,')\otimes\frac{\overset{*}{\Psi}_B(\vec{q})}{2E_B(W-E_B)}. \tag{3.5}$$

Сравнивая выражения (3.3) и (3.5), мы приходим к равенству [6,10]

$$<A\,|\,J(0)\,|\,B> = \frac{1}{2\sqrt{E_A E_B}} \int d^N \vec{p}\, d^N \vec{q}\, \overset{*}{\Psi}_A(\vec{p})\, \Gamma_N(\vec{p},\vec{q};E_A,E_B)\, \Psi_B(\vec{q}), \tag{3.6}$$

$$E_B = \sqrt{K_B^2 + M_B^2}\,, \quad E_A = \sqrt{K_A^2 + M_A^2}\,.$$

Тот же самый матричный элемент может быть выражен аналогичным образом через волновые функции Бете-Солпитера [10]. Важно, однако, при этом подчеркнуть, что хотя правая часть равенства (3.6) не имеет явно релятивистски инвариантного вида, матричный элемент в левой части (3.6) является по определению релятивистски инвариантной величиной. Таким образом, знание квазипотенциальных волновых функций позволяет находить релятивистские форм-факторы связанной системы. Из равенства (3.6) легко получить условие нормировки (2.9). Пусть оператор $J(z)$ определяет сохраняющийся оператор типа "заряда"

$$C = \int d\vec{z}\, J(z)$$

с собственными значениями

$$C\,|\,n> = c_n\,|\,n>. \tag{3.7}$$

Используя эти свойства и трансляционную инвариантность, получим

$$<m\,|\,C\,|\,n> = (2\pi)^3\, \delta(\vec{K}_m - \vec{K}_n)\, \delta_{mn}\, c_n =$$

$$= (2\pi)^3\, \delta(\vec{K}_m - \vec{K}_n) <m\,|\,J(0)\,|\,n>\, e^{i(E_m - E_n) z^0}\,.$$

Отсюда получаем условие нормировки матричного элемента оператора J

$$<m\,|\,J(0)\,|\,n> = \delta_{mn}\, c_n\,, \quad \vec{K}_m = \vec{K}_n\,. \tag{3.8}$$

В частности,

$$<0\,|\,J(0)\,|\,n> = 0, \quad \vec{K}_n = 0.$$

Выберем систему отсчёта, в которой

$$\vec{\Delta} = \vec{P} - \vec{Q} = 0.$$

Тогда из формул (3.2) и условия нормировки (3.8), получим:

$$L(\vec{p},\vec{q};E,W) = c\,\delta(E-W)(2\pi)^3 \sum_n \delta(E-E_n)\,\delta(\vec{P}-\vec{K}_n)\,\chi_{0n}(\vec{p}) \otimes \overset{*}{\chi}_{0n}(\vec{q}) =$$

$$= c\,\delta(E-W)\, I(\vec{p},\vec{q};E)$$

$$\tilde{\tilde{L}}(\vec{p},\vec{q};W,E) = -\,c\,\delta(E-W)\, \tilde{\tilde{I}}(\vec{p},\vec{q};E) \tag{3.9}$$

$$M = \tilde{\tilde{M}} = N = \tilde{\tilde{N}} = 0,$$

где функции I и $\tilde{\tilde{I}}$ определены в (2.2). Подставляя (2.4) в представление (3.2), приходим к соотношению

$$R(\vec{p},\vec{q};E,W)=c\int_0^\infty dE'\{\frac{I(\vec{p},\vec{q};E')}{(E-E')(W-E')}-\frac{\tilde{\tilde{I}}(\vec{p},\vec{q};E')}{(W+E')(E+E')}\}=$$

$$=\frac{c}{E-W}\int_0^\infty dE'\{[\frac{I(\vec{p},\vec{q};E')}{W-E'}-\frac{\tilde{\tilde{I}}(\vec{p},\vec{q};E')}{W+E'}]-[\frac{I(\vec{p},\vec{q};E')}{E-E'}-\frac{\tilde{\tilde{I}}(\vec{p},\vec{q};E')}{E+E'}]\}.$$

Вспоминая спектральное представление (2.2) для функции G, мы окончательно имеем

$$(E-W)R_N(\vec{p},\vec{q};E,W)=c[G_N(\vec{p},\vec{q};W)-G_N(\vec{p},\vec{q};E)]. \tag{3.10}$$

В терминах вершинного оператора, определенного в (3.4), соотношение (3.10) приобретает вид

$$(E-W)\Gamma_N(\vec{p},\vec{q};E,W)=c\{G_N^{-1}(\vec{p},\vec{q};E)-G_N^{-1}(\vec{p},\vec{q};W)\}. \quad \vec{P}=\vec{Q} \tag{3.11}$$

Это равенство, очевидно, является аналогом известного в квантовой электродинамике тождества Уорда-Фрадкина-Такахаши. Дифференцируя (3.11) по E и полагая $E=W$, мы придем к полезной формуле

$$\Gamma_N(\vec{p},\vec{q};E,E)=c\frac{\partial}{\partial E}G_N^{-1}(\vec{p},\vec{q};E) \quad \vec{P}=\vec{Q}. \tag{3.12}$$

В качестве примеров оператора $J(z)$ рассмотрим операторы электромагнитного тока $J_\mu(z)$ и плотности гамильтониана. В первом случае сохраняющийся оператор C определяется через $J_0(z)$ и является оператором электрического заряда, а во втором – полным гамильтонианом системы.

Положим теперь в равенстве (3.6) $E_A=E_B$. Тогда с учётом тождества (3.12) и условия (3.8) мы немедленно приходим к соотношению

$$2E_B=\int d^N\vec{p}\,d^N\vec{q}\,\Psi_B^*(\vec{p})[\frac{\partial}{\partial E}G_N^{-1}(\vec{p},\vec{q};E)]_{E=E_B}\Psi_B(\vec{q});\ \vec{P}=\vec{Q},$$

которое в точности совпадает с условием нормировки (2.9). Из соотношения (3.6) можно получить также условие оротогональности для волновых функций Ψ_B. Используя тождество (3.4) и снова условие (3.8), мы получим

$$\delta_{AB}2\sqrt{E_AE_B}=\int d^N\vec{p}\,d^N\vec{q}\,\Psi_A^*\{\frac{G_N^{-1}(\vec{p},\vec{q};E_A)-G_N^{-1}(\vec{p},\vec{q};E_B)}{E_A-E_B}\}\Psi_B(\vec{q}),\quad \vec{P}=\vec{Q},$$

которое, очевидно, выполняется в силу уравнений (2.7) для волновых функций. Для системы из частиц со спинами $\geq 1/2$ нужно, как и раньше, спроектировать все величины на состояния с положительной энергией

$$R_N^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E,W)=\prod_{i=1}^{N}\frac{\overset{*}{u}_i(p_i)}{\sqrt{2\epsilon_i(p_i)}}R_N(\vec{p},\vec{q};E,W)\prod_{j=1}^{N}\frac{u_j(q_j)}{\sqrt{2\epsilon_j(q_j)}}$$

$$R_N^{(+)}=G_N^{(+)}\Gamma_N^{(+)}G_N^{(+)}, \tag{3.13}$$

где функции $G^{(+)}$ определены в (2.18). Все предыдущие соотношения справедливы и для этих спроектированных величин при условии, что волновые функции Ψ_B будут также заменены на спроектированные функции $\Psi_B^{(+)}$, определенные согласно равенству (2.18).

Рассмотрим более подробно матричный элемент оператора векторного тока, который, согласно равенству (3.11), имеет вид

$$J_\mu^B(\vec{\Delta})\equiv\langle A\,|\,J_\mu(0)\,|\,B\rangle=\frac{1}{2\sqrt{E_AE_B}}\int d^N\vec{p}\,d^N\vec{q}\,\overset{*}{\Psi}_A(\vec{p})\,\Gamma_\mu(\vec{p},\vec{q};E_A,E_B)\,\Psi_B(\vec{q}), \tag{3.14}$$

$$\vec{\Delta}=\vec{K}_A-\vec{K}_B;\quad M_A=M_B,\quad \mu=0,1,2,3.$$

Пусть теперь связанная система частиц находится в слабом внешнем векторном поле, не зависящем от времени. Тогда минимальный гамильтониан взаимодействия с этим полем равен

$$H_I(t)=\int d\vec{x}\;J_\mu(x)\,V^\mu(\vec{x}).$$

Вычислим изменение энергии связанного состояния с массой M_B.

Ввиду предположения о слабости внешнего поля можно произвести разложение по степеням этого поля. В низшем приближении, ограничиваясь линейными по внешнему полю членами, мы получим

$$(2\pi)^3\,\delta(\vec{\Delta})\,\delta E_B=\langle A\,|\,H_I(0)\,|\,B\rangle=$$

$$=\int d\vec{x}\,e^{-i(\vec{\Delta}\vec{x})}\,V^\mu(\vec{x})\langle A\,|\,J_\mu(0)\,|\,B\rangle,$$

$$\delta E_B=\sqrt{(M_B+\delta M_B)^2+K_B^2}-\sqrt{M_B^2+K_B^2}\cong\frac{M_B\delta M_B}{\sqrt{M_B^2+K_B^2}}.$$

Отсюда, интегрируя по $\vec{\Delta}$

$$\delta E_B=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{\Delta}\;J_\mu^B(\vec{\Delta})\tilde{\tilde{V}}^\mu(\vec{\Delta})=$$

$$=\int d\vec{x}\,j_\mu^B(\vec{x})V^\mu(\vec{x}), \tag{3.15}$$

где

$$\tilde{\tilde{V}}_\mu(\vec{\Delta})=\int d\vec{x}\,e^{-i(\vec{\Delta}\vec{x})}\,V_\mu(\vec{x})$$

$$j_\mu^B(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{\Delta}\,e^{-i(\vec{\Delta}\vec{x})}\,J_\mu^B(\vec{\Delta}).$$

Если внешнее поле медленно меняется в пространстве, то можно применить обычное мультипольное разложение

$$\delta E_B = V^{\mu}(0) \int j_{\mu}^{B}(\vec{x})d\vec{x} + \{ \frac{\partial}{\partial x_n} V^{\mu}(\vec{x}) \}_{\vec{x}=0} \int x_n \, j_{\mu}^{B}(\vec{x})d\vec{x} + \ldots \qquad (3.16)$$

$$n = 1,2,3$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда связанная система частиц находится во внешнем однородном электрическом и магнитном поле. Тогда электромагнитный потенциал A_{μ}, как известно, имеет вид

$$\phi(\vec{x}) = A^0(\vec{x}) = -(\vec{E}\vec{x}); \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}[\vec{H}\vec{x}],$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей. Разложение (3.16) при этом можно переписать в виде

$$\delta E_B = Z_B \phi(0) - (\vec{D}_B \vec{E}) - (\vec{\mathfrak{M}}_B \vec{H}), \qquad (3.17)$$

где

$$Z_B = \int j_0^B(\vec{x})d\vec{x} = J_0^B(0),$$

$$\vec{D}_B = \int \vec{x}\, j_0^B(\vec{x})\, d\vec{x} = -i\, \{ \frac{\partial}{\partial \vec{\Delta}} J_0^B(\Delta) \}_{\vec{\Delta}=0}$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_B = \frac{1}{2} \int [\vec{x}\, \vec{j}^{B}(\vec{x})]\, d\vec{x} = -\frac{i}{2} [\frac{\partial}{\partial \vec{\Delta}} \vec{J}^{B}(\vec{\Delta})]_{\vec{\Delta}=0}$$

являются соответственно зарядом, дипольным и магнитным моментом связанной системы частиц.

Рассмотрим теперь построение вершинной функции Γ в рамках теории возмущений (например, в квантовой электродинамике). Согласно определению (3.4),

$$\Gamma = G^{-1} R\, G^{-1} \quad .$$

Разложим все величины в ряд по константе взаимодействия

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots,$$

$$R = R_1 + R_2 + \ldots, \qquad (3.18)$$

$$G^{-1} = G_0^{-1} - V_1 - V_2 - \ldots .$$

В результате имеем

$$\Gamma_1 = G_0^{-1} R_1 G_0^{-1},$$

$$\Gamma_2 = G_0^{-1} R_2 G_0^{-1} - V_1 R_1 G_0^{-1} - G_0^{-1} R_1 V_1 =$$

$$= G_0^{-1} R_2 G_0^{-1} - V_1 G_0 \Gamma_1 - \Gamma_1 G_0 V_1 . \qquad (3.19)$$

В низшем порядке теории возмущений, соответствующем отсутствию взаимодействия между частицами системы, величину R_1 можно представить в виде суммы диаграмм, типа изображенной на рис. 2

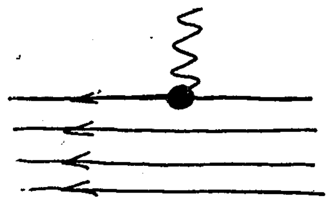

Рис. 2

Проектируя функцию R_1 на состояния с положительной энергией, согласно равенству (3.13), и используя спектральное представление (3.2), мы найдем

$$R^{(+)}_{N1}(\vec{p},\vec{q};E,W) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} < \vec{p}_k |\; J(0)\; | \vec{q}_k > \prod\limits_{i \neq k} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i - \vec{q}_i)}{[E - \sum\limits_{j=1}^{N} \epsilon_j(p_j)][W - \sum\limits_{j=1}^{N} \epsilon_j(q_j)]} \, . \qquad (3.20)$$

Подставляя в равенство (3.19) выражение (3.20) и функцию $[G_0^{(+)}]^{-1}$ в форме (2.19), получим

$$\Gamma^{(+)}_{N1}(\vec{p},\vec{q};E,W) = \sum_{k=1}^{N} < \vec{p}_k \,|\, J(0) \,|\, \vec{q}_k > \prod_{i \neq k} (2\pi)^3 \delta(\vec{p}_i - \vec{q}_i). \qquad (3.21)$$

В этом приближении формула (3.14) принимает вид

$$J^B_\mu(\vec{\Delta}) = \frac{1}{2\sqrt{E_A E_B}} \int d^N\vec{p}\; \overset{*}{\Psi}_A(\vec{p}) \sum_{k=1}^{N} < \vec{p}_k |\; J_\mu(0) \,|\, \vec{q}_k > \Psi_B(\vec{q}),$$

$$\vec{q}_i = \vec{p}_i \,, \quad i \neq k ; \quad \vec{q}_k = \vec{p}_k - \vec{\Delta} ; \qquad (3.22)$$

$$\vec{\Delta} = \vec{K}_A - \vec{K}_B \, .$$

Таким образом, мы можем в принципе вычислить электрические и магнитные мультипольные моменты системы, определенные равенствами типа (3.17).

4. Заключение

Таким образом, мы видим, что квазипотенциальное уравнение может быть естественным образом обобщено на случай системы частиц с произвольными спинами в системе отсчёта, отличной от системы центра масс. Существенное отличие полученных уравнений от релятивистски-ковариантных уравнений, предложенных в работе /4/, состоит в сохранении явно трехмерного характера уравнений в нашем подходе, что значительно упрощает некоторые практические приложения.

Отметим также большую ценность спектрального представления для двухвременной функции Грина, которое оказалось весьма полезным при выделении полюсных особенностей и получении общего вида функции Грина свободных частиц с произвольными спинами.

Проблема вычисления матричных элементов локальных операторов типа тока между связанными состояниями возникает, например, при исследовании атомных систем во внешних электромагнитных полях, при рассмотрении свойств слабых и электромагнитных форм-факторов составных систем и при изучении конкретных реализаций алгебры токов в составных моделях элементарных частиц /6,11/. Структура этих матричных элементов позволяет непосредственно связать условия нормировки и ортогональности волновых функций связанной системы с аналогичными условиями для векторов состояний. При этом важную роль играет тождество типа Уорда, связывающее "вершинную" функцию и двухвременную функцию Грина. Преимуществом проведённого здесь исследования по сравнению с работой /6/ является использование явного выражения для гриноподобной функции R, что позволяет находит вершинную функцию Γ в присутствии взаимодействия между частицами связанной системы и с учётом отдачи этой системы как целого.

Автор выражает глубокую благодарность за плодотворные обсуждения Н.Н.Боголюбову, А.Н.Тавхелидзе, В.Г.Кадышевскому, В.А.Матвееву, Р.М.Мурадяну и И.В.Полубаринову.

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. F.J.Dyson. Phys.Rev., 91, 1543 (1953).
3. R.E.Cutkosky, M.Leon. Phys.Rev., 135, B1445 (1964).
D.Lurie, A.J.Macfarlane, Y.Takahashi. Phys.Rev., 140, B1091 (1965).
K.Nishijima, A.H.Singh. Phys.Rev., 162, 1740 (1967).
C.H.Llewellyn Smith, CERN Preprint TH 946 (1968).

4. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Р2-3900, Дубна 1968.
5. R.N.Faustov. Nucl.Phys., 75, 669 (1966).
6. Н.Н.Боголюбов, В.А.Матвеев, А.Н.Тавхелидзе. Вопросы теории элементарных частиц. Труды международного семинара, Варна, Болгария, стр. 269. Дубна, 1968.
В.А.Матвеев. Препринт ОИЯИ Р2-3847, Дубна, 1968.
7. V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. JINR preprint E2-4251, Dubna 1969.
8. Р.Н.Фаустов, А.А.Хелашвили. Препринт ОИЯИ Р2-4345, Дубна 1969.
9. Г.Десимиров, Д.Стоянов. Препринт ОИЯИ Р-1658, Дубна, 1964.
V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze. JINR preprint E2-3498, Dubna 1967.
V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev. Nuovo Cim., 55A, 275 (1968).
А.А.Хелашвили. Препринт ОИЯИ Р2-4347, Дубна 1969.
10. S.Mandelstam. Proc.Roy.Soc., 233A, 248 (1955).
11. В.П.Шелест, Вопросы теории элементарных частиц, Труды Международного семинара, Варна, Болгария, стр. 280, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1969 года.