ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4778

З. Борелевски

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ S-МАТРИЦЫ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КАДЫШЕВСКОГО

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4778

З. Борелевски*

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ S-МАТРИЦЫ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КАДЫШЕВСКОГО

Направлено в журнал "Acta Physica Polonica"

x/ Ягеллонский университет, Краков, Польша.

1. Введение

Известно, что исходя из общего выражения для S -матрицы

$$S = T \exp\left[\int L(x)\, dx\right] \qquad (1.1)$$

(T - символ хронологического произведения, $L(x)$ - лагранжиан взаимодействия) мы можем сразу перейти к p -представлению и в этом представлении развивать дальше ее теорию. В.Г.Кадышевский/1,2/ дал ковариантную формулировку теории S -матрицы в p -представлении, содержащую условия унитарности и причинности, получил ковариантное "уравнение движения" для матрицы рассеяния, а затем исследовал его по теории возмущений. Оказалось, что для этого нужно было развить специфическую диаграммную технику. В настоящей работе предлагается способ перенормировки некоторых членов S -матрицы для лагранжиана взаимодействия

$$L(x) = e : \phi^4(x) : \qquad (1.2)$$

(e - константа связи, $\phi(x)$ - скалярная функция поля, ": :" - символ нормального произведения) согласно этой технике.

2. Формулировка теории S-матрицы в импульсном представлении Кадышевского

Запишем формулу (1.1) в виде

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, T[L(x_1)\ldots L(x_n)], \tag{2.1}$$

или

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, \Theta[\lambda(x_1 - x_2)] \ldots \Theta[\lambda(x_{n-1} - x_n)] : L(x_1) \ldots L(x_n) : \tag{2.2}$$

$\Theta(s) = 1$ для $s > 0$ и $\Theta(s) = 0$ для $s < 0$, λ – времениподобный вектор ($\lambda^2 = 1$, $\lambda^0 > 0$). Если теперь перейти в (2.2) к импульсному пространству, полагая

$$L(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \, e^{i(xk)} \tilde{\tilde{L}}(k) \tag{2.3}$$

и

$$\Theta(\lambda x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\tau x}}{\tau - i\epsilon} d\tau, \tag{2.4}$$

то получаем выражение для S-матрицы в T-представлении /1,2/:

$$S = 1 + iR(\lambda\tau)\big|_{\tau=0}, \tag{2.5}$$

где $R(\lambda\tau)$ подчиняется следующему уравнению движения S-матрицы:

$$R(\lambda\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} L(\lambda\tau - \lambda\tau') \frac{d\tau'}{\tau' - i\epsilon} R(\lambda\tau'). \tag{2.6}$$

Решение этого уравнения можно записать в виде суммы

$$R(\lambda\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\lambda\tau), \tag{2.7}$$

где

$$R_1(\lambda\tau) = \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau),$$

$$R_2(\lambda\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau - \lambda\tau_1), \tag{2.8}$$

$$R_3(\lambda\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau_2 - \lambda\tau_1) \frac{d\tau_2}{\tau - \tau_2 - i\epsilon} \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau - \lambda\tau_2), \tag{2.9}$$

$$R_n(\lambda\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau_2 - \lambda\tau_1) \ldots \frac{d\tau_{n-1}}{\tau - \tau_{n-1} - i\epsilon} \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau - \lambda\tau_{n-1}). \tag{2.10}$$

Из (2.5) (2.6) (2.7) и (2.10) следует, что S-матрица подчиняется условию причинности и унитарности /1,2/. Очевидно, выражение (2.10) надо привести к нормальной форме. Поскольку это выражение является обычным произведением операторов типа нормальных произведений фурье-трансформированных функций поля, входящих в лагранжиан $L(x)$, то в процессе его N-упорядочивания необходимо использовать только обычные спаривания. Рассмотрим теперь общее выражение матрицы рассеяния S , а именно:

$$S = T \exp [\int L(x,g) \, dx] , \tag{2.11}$$

где

$$L(x,g) = L(x) \; g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n (x, x_1 \dots x_n) g(x_1) \dots g(x_n) dx_1 \dots dx_n , \tag{2.12}$$

$g(x)$ – функция включения взаимодействия ($g(x) \equiv 1$), $\Lambda_n(x, x_1 \dots x_n)$ – квазилокальный контрчлен n -го порядка.

$$\Lambda_n (x, x_1 \dots x_n) = W\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots - \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \delta(x - x_1) \dots \delta(x - x_n) . \tag{2.13}$$

Здесь $\partial(x - x_1)$ – функция (обобщенная) Дирака, $W\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ – симметричный многочлен частных производных $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}$ произвольного порядка с постоянными, но любыми коэффициентами. Кадышевский показал, что "уравнение движения" S -матрицы в p -представлении принимает вид

$$R(\lambda\tau) = \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \Lambda_n(\lambda t) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\tau'}{\tau' - i\epsilon} [\tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau - \lambda\tau') + \Sigma \; \Lambda_n(\lambda\tau - \lambda\tau')] R(\lambda\tau') ,$$

где где операторы $\Lambda_n(\lambda\tau)$ для рассматриваемой модели получаются с помощью преобразования фурье соответствующих контрчленов $\Lambda_n(x_1, x_2, \dots x_n)$.

3. Вопрос перенормировки S -матрицы в p -представлении

В дальнейшем будем рассматривать физическую модель с лагранжианом $L(x) = e : \phi^4(x) :$ (см. (1.2)).

Вообще говоря, коэффициентные функции отдельных членов S -матрицы могут расходиться при больших импульсах, и для устранения этой расходимости можно попытаться соответственно подобрать коэффициенты контрчленов. Известно, что в x -представлении для рассматриваемого лагранжиана после интегрирования по $x_1 \dots x_n$ (см. формулы (2.12) и (2.13)) можно получить следующий результат:

$$L(x,g) = e \; g(x) \; Z_1(g) : \phi^4(x) : +$$

$$+ \frac{1}{2} [1 - Z_2(g)] [: \phi(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} : + m^2 : \phi^2(x) :] - \tag{3.1}$$

$$- \delta m^2(g) : \phi^2(x) : + \frac{1}{2} : \phi^2(x) : \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{Z_2(g) - 1}{g(x)} \right] ,$$

где

$$Z_1(g) = 1 + \sum_s \frac{[e g(x)]^{s-1}}{s!} A_s ,$$

$$Z_2(g) = 1 + \sum_s \frac{[e g(x)]^s}{s!} B_s , \tag{3.2}$$

$$\delta m^2(g) = \sum_s \frac{[e g(x)]^s}{s!} C_s .$$

A_s, B_s, C_s – постоянные, A_s, B_s расходятся квадратично, а C_s логарифмически при $M_1^2 \to \infty$.

Например, контрчлен, устраняющий бесконечность диаграммы собственной энергии бозона, имеет следующий вид:

$$\Lambda_1(x, x_1) = -e^2 b : \phi(x) \,]\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \delta(x - x_1) \,]\, \phi(x_1) : \qquad (3.3)$$

Мы пойдем по несколько иному пути, а именно: сразу перейдем к p -представлению. Разлагая функцию поля $\phi(x)$ в интеграл Фурье

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ikx} \tilde{\tilde{\phi}}(k)\, dk \qquad (3.4)$$

(k – 4-вектор импульса, $\tilde{\tilde{\phi}}(k)$ -фурье-преобразованная функция $\phi(x)$), получим на основе (1.2) следующий фурье-образ лагранжиана $L(x)$:

$$\tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau) = \frac{e}{(2\pi)^2} \int dk_1 \ldots \int dk_4 \,\delta[\lambda\tau - \sum_{i=1}^{4} k_i \,] : \tilde{\tilde{\phi}}(k_1) \ldots \tilde{\tilde{\phi}}(k_4) : \qquad (3.5)$$

(k – 4-импульсы).

На основе (3.5) можем переписать (2.10) в виде

$$R_n(\lambda\tau) = \sum_{s=0}^{4n} \int dk_1 \ldots dk_s \,\delta[\lambda\tau - \sum_{i=1}^{s} k_i \,]\, F_s^{(n)}(\tau; k_1 \ldots k_s) : \tilde{\tilde{\phi}}(k_1) \ldots \tilde{\tilde{\phi}}(k_s) : , \qquad (3.6)$$

причём суммирование производится только по чётным значениям индекса s, а каждый член этой суммы соответствует $4n - s$ кратному спариванию функций $\tilde{\tilde{\phi}}(k_1)$. С другой стороны, такой член соответствует "модифицированной" фейнмановской диаграмме с n вершинами, $4n - s$ внутренними и s внешними линиями (точнее – сумме всех диаграмм этого рода). Такая диаграмма отличается от обычной фейнмановской диаграммы тем, что все ее вершины (пронумерованные произвольным образом от 1 до n) нужно соединить первую со второй, вторую с третьей и т.д. добавочными (пунктирными) линиями и, кроме этого, из вершины с номером n вывести свободную пунктирную линию, приписав ей 4-импульс $\lambda\tau = \sum_{i=1}^{s} k_i$. Все внутренние линии (пунктирные и обычные – соответствующие спариваниям $\phi(k_j)\phi(k_l) = \delta(k_l + k_j)\Theta(k_j^0)\delta(k_j^2 - m^2)$) надо ориентировать так, чтобы они выходили из вершины с меньшим номером и входили в вершину с большим номером, а внешние линии (кроме пунктирных) должны быть входящими сплошными. Внешним линиям приписывают импульсы $k_1, \ldots k_s$, внутренним пунктирным линиям – импульсы $\lambda\tau_1, \ldots \lambda\tau_{n-1}$, внутренним обычным (сплошным) линиям – импульсы $q_1, q_2 \cdots$ произвольным образом, но с сохранением суммарного импульса (с учётом импульса пунктирных линий!) в каждой вершине. Чтобы получить коэффициентную функцию $F_s^{(n)}(\tau; k_1 \ldots k_s)$, надо каждой внутренней пунктирной линии с 4-импульсом $\lambda\tau_l$ поставить в соответсвие функцию $G(\tau_l) = (2\pi)^{-1}(\tau - \tau_l - i\epsilon)^{-1}$, каждой сплошной внутренней линии с импульсом q_j – функцию $D^{(+)}(q_j) = \Theta(q_{j_0})\,\delta[q_j^2 - m^2]$ и по всем независимым переменным τ_l и q_j провести интегрирование в бесконечных пределах.

Как видно, существенная разница между обычным фейнмановским подходом и нашим состоит в том, что мы ввели в теорию "новые частицы ("квазичастицы"), а именно частицы, соответствующие внутренним пунктирным линиям диаграммы, – частицы с импульсами $\lambda\tau_1 \ldots \lambda\tau_{n-1}$.

Оказывается, что расходимость этих диаграмм обусловлена тем, что "квазичастицам" "разрешается" переносить слишком большой импульс. Перенормировка этих диаграмм сводится к перенормировке только внутренних пунктирных линий.

Вернемся теперь конкретно к лагранжиану (1.2). Как видно из (2.5) (2.7) и (3.5), $R_1(\lambda\tau) = \tilde{\tilde{L}}(\lambda\tau)$. Соответствующая диаграмма дана на рис. 1.

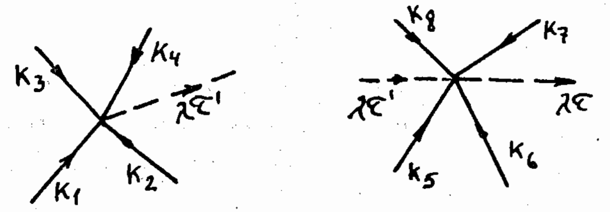

Рис. 1. Коэффициентная функция равна $\frac{e}{(2\pi)^2}$, $\lambda\tau' = \sum_{i=1}^{4} k_i$.

Элементу S – матрицы второго порядка в p –представлении $R_2(\lambda\tau)_{\tau=0}$ будет также соответствовать 5 типов диаграмм с двумя вершинами, а именно:

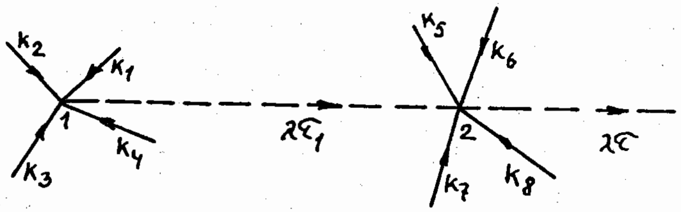

Рис. 2. $s = 8$, нет спариваний, $\lambda\tau = \sum_{i=1}^{8} k_i$.

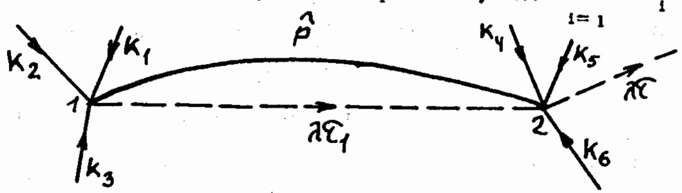

Рис. 3. $\lambda\tau = \sum_{i=1}^{6} k_i$, $\hat{p} = \sum_{i=1}^{3} k_i - \lambda\tau_1$, $s = 6$, одно спаривание.

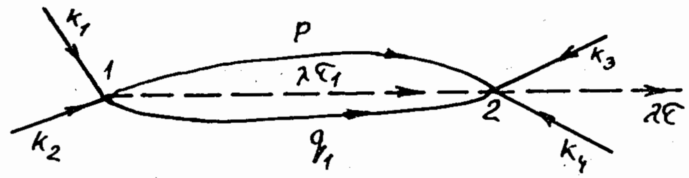

Рис. 4. $p = k_1 + k_2 - \lambda\tau_1 - q_1$, $\lambda\tau = \sum_{i=1}^{4} k_i$, $s = 4$, два спаривания.

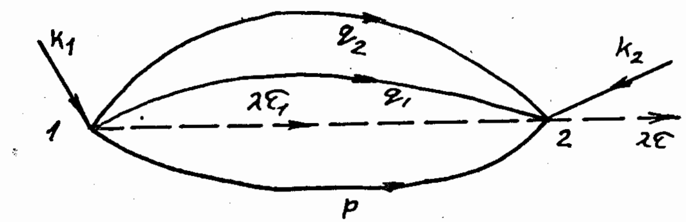

Рис. 5. $p = k_1 - q_1 - q_2 - \lambda\tau_1$, $\lambda\tau = k_1 + k_2$, $s = 2$, три спаривания.

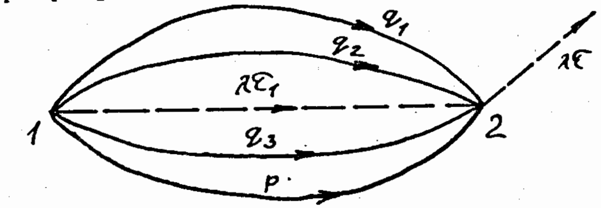

Рис. 6. $p = -\lambda\tau_1 - q_1 - q_2 - q_3$, $\lambda\tau \equiv 0$, $s = 0$, четыре спаривания.

Конечно, к каждой из предыдущих диаграмм (рис. 1-6) надо прибавить такую же вторую диаграмму с заменой вершины №1 на вершину №2 и обратно.

Легко показать, что такой же результат получим исходя из выражения для S –матрицы в x –представлении. Из (2.2) и (1.2) получаем

$$S_2 = S_2^{(0)} + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} + S_2^{(3)} + S_2^{(4)}, \tag{3.7}$$

где $S_2^{(0)} = a_0 \int dx_1 \int dx_2\, \Theta[\lambda(x_1-x_2)] : \phi^4(x_1)\phi^4(x_2) : \quad ,$ (3.8)

$$S_2^{(1)} = a_1 \int dx_1 \int dx_2\, \Theta[\lambda(x_1-x_2)]\, \phi(x_1)\phi(x_2) : \phi^3(x_1)\phi^3(x_2): \tag{3.9}$$

$$S_2^{(2)} = a_2 \int dx_1 \int dx_2\, \Theta[\lambda(x_1-x_2)][\phi(x_1)\phi(x_2)]^2 : \phi^2(x_1)\phi^2(x_2) : \; , \tag{3.10}$$

$$S_2^{(3)} = a_3 \int dx_1 \int dx_2\, \Theta[\lambda(x_1-x_2)][\phi(x_1)\phi(x_2)]^3 : \phi(x_1)\phi(x_2) : , \tag{3.11}$$

$$S_2^{(4)} = a_4 \int dx_1 \int dx_2\, \Theta[\lambda(x_1-x_2)][\phi(x_1)\phi(x_2)]^4 . \tag{3.12}$$

a_v – числовые множители, символ $\phi(x_1)\,\phi(x_2)$ означает обычное спаривание скалярных функций $\phi(x)$. Выражая $\phi(x)$ и $\Theta(\lambda x)$ с помощью формул (2.4) и (3.14) и учитывая равенство

$$\phi(k)\,\phi(q) = \delta(k+q)\,\Theta(q_0)\,\delta(q^2-m^2) \; , \tag{3.13}$$

получаем, что $S_2^{(v)}(v=0,1,2,3,4)$ – это часть матричного элемента $R_2(0)$, соответствующая диаграмме с v спариваниями. Итак, для случая а) и б) получаем соответственно (после интегрирования):

$$(S_2^{(0)}) = a_0 e \int dk_1 \ldots \int dk_8\, \delta\Big(\sum_{i=1}^{8} k_i\Big) : \tilde{\tilde{\phi}}(k_1) \ldots \tilde{\tilde{\phi}}(k_8) : \quad , \tag{3.14}$$

$$(S_2^{(1)})_{r=0} = a_1 e^2 \int dk_1 \ldots \int dk_6\, \delta(\Sigma\, k_i)\, \frac{1}{\sqrt{m^2+R^2}\,(k^0-\sqrt{m^2+R^2})} : \tilde{\tilde{\phi}}(k_1) \ldots \tilde{\tilde{\phi}}(k_6) : , \tag{3.15}$$

$$\hat{k} = \sum_{i=1}^{3} \hat{k}_i \; , \qquad k^0 = \sum_{i=1}^{3} k_i^0 \; .$$

Однако уже для $S_2^{(2)}$ имеем выражение

$$(S_2^{(2)})_{r=0} = a_2 e \int dk_1 \ldots \int dk_4\, \delta\Big(\sum_{i=1}^{4} k_i\Big)\, F_2^{(2)}(0, k_1 \ldots k_4) : \tilde{\tilde{\phi}}(k_1) \ldots \tilde{\tilde{\phi}}(k_4) : , \tag{3.16}$$

в котором

$$F_2^{(2)}(\tau,k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \frac{1}{\tau-\tau_1-i\epsilon}\, \Theta(q_1^0)\,\delta(q_1^2-m^2)\,\Theta(k_1^0+k_2^0-\lambda\tau_1)\; \delta[(k_1+k_2-\lambda\tau_1)^2-m^2] \tag{3.17}$$

и, как видно, $F_2^{(2)}$ расходится.

Таким образом, надо провести перенормировку пунктирной внутренней линии диаграммы на рис. 4. Физически это соответствует перенормировке массы квазичастицы. Эта операция производится стандартным образом, а именно путем следующей замены:

$$\frac{1}{\tau-\tau_1-i\epsilon} \to \frac{1}{\tau-\tau_1-i\epsilon} - \frac{1}{\tau-\tau_1-M-i\epsilon} \tag{3.18}$$

(соответственно $F_2^{(2)} \to F_{2,M}^{(2)}$). Выполнив интегрирование в (3.17), при условии $M \to \infty$ получаем:

$$\lim_{M\to\infty} F_{2,M}^{(2)}(\tau, k_1 \dots k_4) = F_{2,0}^{(2)} + \lim_{M\to\infty} Q_2^{(2)}, \qquad (3.19)$$

где $F_{2,0}^{(2)}$ – конечный член, а

$$Q_2^{(2)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{M}{4m} \right| (k_1^0 + k_2^0 - 2m), \qquad (3.20)$$

$Q_2^{(2)}$ расходится логарифмически. Переходя опять к x–представлению, легко получить контрчлен, устраняющий расходимость диаграммы на рис. 4 (в системе координат, где $\hat{k}_1 + \hat{k}_2 - \lambda\hat{\tau}_1 = 0$):

$$\Lambda_2^{(2)}(x_1, x_2) = \alpha_2 e^2 \int dx_1 \int dx_2 \left[m - \frac{1}{4i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - \frac{\partial}{\partial x_2^0}\right)\right] \delta(x_1 - x_2) : \phi^2(x_1)\phi^2(x_2) : \ln\left|\frac{M}{4m}\right|. \qquad (3.21)$$

Подобным образом можем вычислять матричные элементы $S_2^{(3)}$ и $S_2^{(4)}$. Вычисления будут, конечно, гораздо сложнее, чем для $S_2^{(2)}$. Но всегда перенормируем "$\lambda\tau_1$" – линию. Для $S_2^{(3)}$ надо положить

$$\frac{1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} \to \frac{1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} - \frac{1}{(\tau - \tau_1 - M - i\epsilon)^4}$$

для $S_2^{(4)}$

$$\frac{1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} \to \frac{1}{\tau - \tau_1 - i\epsilon} + \frac{1}{(\tau - \tau_1 - M - i\epsilon)^6}$$

В качестве примера можно показать, что контрчлен $\Lambda_2^{(3)}(x_1, x_2)$ устраняющий бесконечность диаграммы на рис. 5, имеет (в системе координат, где $\hat{k}_1 - \lambda\hat{\tau}_1 = 0$) вид

$$\Lambda_2^{(3)}(x_1, x_2) = \alpha_3 e \int dx_1 \int dx_2 \left[a\left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - \frac{\partial}{\partial x_2^0}\right) + b\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{02}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{02}}\right) + c\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^{03}} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^{03}}\right) + \right. \qquad (3.22)$$

$$\left. + d\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^{04}} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^{04}}\right) + f \right] \delta(x_1 - x_2) : \phi(x_1)\phi(x_2) : ,$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{81}{2} \ln 3 \left|\frac{M}{m}\right| + \frac{343}{2} \ln\left|\frac{M}{m}\right| + \frac{405}{2}\left(\frac{M}{m}\right)^2, \\ b &= \frac{243}{2}\left(\frac{M}{m}\right), \\ c &= -\frac{1}{2}\left(\frac{M}{m}\right)^2, \\ d &= \frac{1}{2}\left(\frac{M}{m}\right), \\ f &= -\left(\frac{M}{m}\right) + \frac{81}{4}\left(\frac{M}{m}\right). \end{aligned} \qquad (3.23)$$

В заключение можно подчеркнуть, что специфика перенормировки S –матрицы в p –представлении Кадышевского, а именно необходимость перенормировки только линий квазичастиц, очень существенна, так как есть основания полагать, что квазичастицы являются в определенном смысле динамическим эквивалентом пространства-времени /2/.

Автор благодарит дирекцию ОИЯИ за гостеприимство во время его пребывания в Дубне, сотрудников ЛТФ и особенно В.Г.Кадышевского за предложение темы этой работы и полезные обсуждения, а также С.М.Елисеева за помощь в подготовке рукописи.

Литература

1. В.Г.Кадышевский. ЖЭТФ, 46, 654 (1964).
2. В.Г.Кадышевский. ЖЭТФ, 46, 872 (1964).
3. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 ноября 1969 года.