ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4767

Е.П.Жидков, В.Г.Кадышевский, Ю.В.Катышев

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ $c \to \infty$ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ УРАВНЕНИИ ШРЁДИНГЕРА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

1969

Р2 - 4767

Е.П.Жидков, В.Г.Кадышевский, Ю.В.Катышев

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ $c \to \infty$ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ УРАВНЕНИИ ШРЁДИНГЕРА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

В работах /I-9/ была развита трехмерная релятивистская формулировка проблемы взаимодействия двух частиц, в основе которой лежат релятивистские уравнения квазипотенциального типа[ж)] для амплитуды рассеяния и волновой функции двухчастичной системы. В частности, одномерное уравнение Шрёдингера для радиальной волновой функции $\psi_{q\ell}(r)$, описывающей относительное движение двух скалярных частиц с импульсом q, моментом ℓ и равными массами m, имеет вид:

$$\left[2c\sqrt{q^2+m^2c^2} - H_0^{rad} - V(r)\right]\psi_{q\ell}(r) = 0, \qquad (I)$$

где релятивистский гамильтониан H_0^{rad} дается выражением

$$H_0^{rad} = 2mc^2 ch\left(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{mr\left(r+\frac{i\hbar}{mc}\right)}\exp\left(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dr}\right),$$

$V(r)$ – квазипотенциал, c – скорость света.

Если в (I) величину c формально устремить к бесконечности, то это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шрёдингера:

$$\left[\hbar^2\frac{d^2}{dr^2} - \hbar^2\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - mV(r) + q^2\right]u_{q\ell}(r) = 0. \qquad (2)$$

Как известно, в аппарате нерелятивистской теории рассеяния уравнение (2) играет исключительно важную роль. Например, рассматривая решения уравнения (2), удовлетворяющие граничным условиям, не содержащим параметров ℓ или q^2, можно на основании известной теоремы Пуанкаре утверждать, что данные решения являются целыми функциями указанных параметров. Последнее позволяет до конца исследовать аналитические свойства амплитуды рассеяния в плоскостях q^2 и ℓ.

====================

ж) Формализм, рассмотренный в /I-9/, примыкает к квазипотенциальному подходу Логунова-Тавхелидзе в квантовой теории поля /I0/.

Ясно, что обобщение этих результатов, и, в первую очередь, самой теоремы Пуанкаре, на случай, когда нерелятивистское уравнение (2) заменено релятивистским уравнением (I), представляется весьма желательным.

Настоящая работа задумана как первый шаг в данном направлении. Именно, мы хотим выяснить с математической точки зрения условия регулярной сходимости /II-I3/ решений релятивистского уравнения Шрёдингера (I) к решениям уравнения (2).

Ограничимся пока краевыми задачами для случая S – волны ($\ell = 0$). Положим в (I) $\hbar = m = 1$ и $c = \frac{1}{\varepsilon}$ (ε – малый параметр задачи). Тогда уравнение (I) имеет вид:

$$\left[q^2 + \frac{2}{\varepsilon^2} + O(\varepsilon^2) - \frac{2}{\varepsilon^2} ch\left(i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) - V(r)\right] \psi_{q0}(r) = 0. \qquad (3)$$

Разлагая $ch\left(i\varepsilon \frac{d}{dr}\right)$ в ряд Тейлора, получим, вместо (3), следующее линейное дифференциальное уравнение бесконечного порядка для релятивистской волновой функции $\psi_{q0}(r)$:

$$\left[q^2 + O(\varepsilon^2) - V(r) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \frac{2\varepsilon^6}{8!}\frac{d^8}{dr^8} + \ldots\right] \psi_{q0}(r) = 0. \qquad (4)$$

Если в уравнении (4) отбросить члены бесконечного ряда, начиная с члена (n+4)-го порядка (n – достаточно большое четное положительное число), то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение (n+2)-го порядка. Для исследования условий регулярного вырождения (предельного перехода) решений такого уравнения (n+2)-го порядка в решения обычного нерелятивистского уравнения (2) при $\ell = 0$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + q^2 - V(r)\right] u_{q0}(r) = 0 \qquad (5)$$

применим общую теорию /II-I3/ обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных для случая краевых задач. Исследуемое уравнение имеет вид:

$$\left[q^2 + O(\varepsilon^2) - V(r) + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} + \ldots + \frac{2(-1)^{\frac{n}{2}}\varepsilon^n}{(n+2)!}\frac{d^{n+2}}{dr^{n+2}}\right] \psi_{q0}(r) = 0. \qquad (6)$$

Для конечного промежутка изменения r

$$0 \le r \le a \qquad (7)$$

вырождение задачи (6) в нерелятивистскую задачу (5) является регулярным (см. работу /II/), если число корней (с отрицательной вещественной частью) характеристических уравнений

$$Q_0(\lambda) = \sum_{\rho=0}^{n} a_{\kappa+\rho,0}\, \lambda^{\rho} = 0 \qquad (\kappa = 2) \qquad (8)$$

(в точке $r = 0$) и

$$Q_a(\mu) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{\kappa+s} a_{\kappa+s}\, \mu^{s} = 0 \qquad (9)$$

(в точке $r = a$) совпадает, соответственно, с n_1 и n_2, то есть с числом дополнительных граничных условий в этих точках, выпадающих при переходе от задачи (6) к задаче (5).

Характеристические уравнения (8) и (9) для (6) имеют вид:

$$\frac{2}{(n+2)!}\lambda^n - \frac{2}{n!}\lambda^{n-2} + \frac{2}{(n-2)!}\lambda^{n-4} - \ldots - \frac{2}{4!}\lambda^2 + 1 = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{2}{(n+2)!}\mu^n - \frac{2}{n!}\mu^{n-2} + \frac{2}{(n-2)!}\mu^{n-4} - \ldots - \frac{2}{4!}\mu^2 + 1 = 0. \qquad (11)$$

Чисто мнимых корней у этих характеристических уравнений быть не может, и число корней этих уравнений с отрицательной вещественной частью равно $n/2$ в точке $r = 0$ и $n/2$ в точке $r = a$, то есть вырождение задачи (6) в нерелятивистскую регулярно при условии задания половины дополнительных граничных условий данной краевой задачи на левом конце промежутка (в точке $r = 0$) и половины граничных условий на правом конце промежутка (в точке $r = a$).

Рассмотрим теперь более важный для нас случай краевых задач на собственные значения и собственные функции. Применим здесь результаты теории /I4/ сингулярного возмущения таких задач для линейных дифференциальных уравнений четного порядка.

В этой теории рассматривались задачи на собственные значения вида

$$(P+\varepsilon' Q)\,u = \lambda u, \tag{I2}$$

где P и Q – дифференциальные операторы четного порядка:

$$Pu=\sum_{k=1}^{2m} p_k(x)u^{(k)}(x)\,;\; Qu=\sum_{k=1}^{2n} q_k(x)u^{(k)}(x)\,;\quad u^{(k)}=\frac{d^k u}{dx^k}. \tag{I3}$$

Независимая переменная x изменяется в замкнутом интервале $a \le x \le b$, а $n>m$.

Граничные условия берутся в виде

$$A_r u = u^{(\alpha_r)}(a) + \sum_{s<\alpha_r} a_{rs}u^{(s)}(a) = 0, \tag{I4}$$

$$(r = 1,2,\dots,n)$$

$$B_r u = u^{(\beta_r)}(b) + \sum_{s<\beta_r} b_{rs}u^{(s)}(b) = 0,$$

где

$$0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 2n;\quad 0 \le \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < 2n. \tag{I5}$$

Задача на собственные значения с краевыми условиями вида (I4) для $\varepsilon' = 0$ определяется

$$\begin{aligned} &Pu = \lambda u, \\ &A_r u = 0, \qquad\qquad (r = 1,2,\dots,m) \\ &B_r u = 0, \end{aligned} \tag{I6}$$

где при $x = a$ и $x = b$ последние $(n-m)$ граничных условий (I4) опускаются.

Мозером /I4/ доказаны следующие теоремы:

<u>Теорема I</u>. Если $\lambda = \lambda_0$ – простое собственное значение задачи (I6) и если

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_r \not\equiv \alpha_s \,(\mathrm{mod}\; 2(n-m)) \\ &\beta_r \not\equiv \beta_s \,(\mathrm{mod}\; 2(n-m)) \end{aligned}\right\} \text{ для } r \ne s;\; r,s = m+1,\dots,n, \tag{I7}$$

то для достаточно малого $\varepsilon' > 0$ существует в окрестности $\lambda = \lambda_0$ однозначно определяемое собственное значение $\lambda = \lambda(\varepsilon')$, принадлежащее задаче на собственные значения (I2), (I4). Это собственное значение может быть записано в виде

$$\lambda = \lambda_0 + \eta\lambda_1 + \dots + \eta^{\sigma}\lambda_{\sigma} + \eta^{\sigma+1}\Lambda_{\sigma}(\eta),\quad |\Lambda_{\sigma}(\eta)| \le c_{\sigma}, \tag{I8}$$

где $\eta = \varepsilon'^{\,1/2(n-m)} \ge 0$ достаточно мало, а c_{σ} не зависит от η. Такое асимптотическое представление справедливо для любого положительного целого σ.

Соответствующее собственное решение $u = U$, принадлежащее $\lambda = \lambda(\varepsilon')$, определяется однозначно с точностью до множителя. После соответствующего выбора этого множителя решение может быть записано в виде

$$U = U_0(x) + \eta U_1(x) + \dots + \eta^{\sigma}U_{\sigma}(x) + \eta^{\sigma+1}R_{\sigma}(x,\eta) \tag{I9}$$

для любого положительного целого σ и для $a+\delta \le x \le b-\delta$, $0 < \delta < \frac{1}{2}(b-a)$.

Здесь

$$\left| \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} R_\sigma(x,\eta) \right| \le C_\sigma(\delta), \tag{20}$$

$$(\ell = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

если $\eta >$ 0 достаточно мало; $C_\sigma(\delta)$ не зависит от η. Функции U, $U_0, \dots, U_\sigma$ бесконечное число раз дифференцируемы по x.

Теорема 2. При общем предположении теоремы I и в самосопряженном случае существует $\lim\limits_{\varepsilon' \to 0} \lambda_n(\varepsilon') = \lambda_n(0)$ для любого $n = 1, 2, \dots$. Величины $\lambda_n(0)$ являются собственными значениями невозмущенной задачи (I6). Для малых положительных ε' поведение всех собственных значений $\lambda_n(\varepsilon')$ задается асимптотическим рядом по степеням $\eta = \varepsilon'^{1/2(n-m)}$.

Для иллюстрации предельного ($\varepsilon \to 0$) перехода релятивистской проблемы (4) в нерелятивистскую для задач на собственные значения и собственные функции рассмотрим простейший пример – случай сферического "потенциального ящика" с потенциалом

$$\left.\begin{aligned} V(r; E_q) &= 0 \quad \text{для} \quad r \le a_0, \\ V(r; E_q) &= \infty \quad \text{для} \quad r > a_0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где a_0 – ширина "потенциального ящика". Ограничимся здесь рассмотрением уравнения четвертого порядка

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon' \cdot \frac{1}{12}\frac{d^4}{dr^4}\right) u = \lambda u, \tag{22}$$

где

$$\lambda = q^2 - \frac{\varepsilon^2 q^4}{4} + \frac{\varepsilon^4 q^6}{8}, \quad r = x,$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} A_1 u &= u(0) = 0, \\ A_2 u &= u'(0) = 0, \\ B_1 u &= u(a_0) = 0, \\ B_2 u &= u'(a_0) = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Собственные функции и собственные значения вырожденной задачи (I6) в этом случае таковы:

$$U_{0n}(r) = \sqrt{\frac{2}{a_0}} \sin \frac{\pi n r}{a_0},$$

$$\lambda_{0n} = \frac{\pi^2 n^2}{a_0^2},$$

где n – любое положительно целое число.

Из теорем Мозера /I4/ следует, что для уравнения четвертого порядка (22) существуют в окрестности $\lambda_n = \lambda_{0n} = \frac{\pi^2 n^2}{a_0^2}$ собственное значение

$$\lambda_n = \lambda_{0n} + \eta \lambda_{1n} + \dots + \eta^\sigma \lambda_{\sigma n} + \eta^{\sigma+1} \Lambda_{\sigma n}(\eta), \quad \eta = \frac{1}{c}$$

и соответствующее собственное решение

$$U_n = U_{0n}(r) + \eta U_{1n}(r) + \dots + \eta^\sigma U_{\sigma n}(r) + \eta^{\sigma+1} R_{\sigma n}(r, \eta),$$

сходящиеся при $\varepsilon \to 0$ к собственному значению и собственному решению нерелятивистского уравнения Шрёдингера данной задачи.

Таким образом, мы видим, что применение метода малого параметра при старшей производной дифференциального уравнения дает возможность пролить свет на проблему регулярной сходимости решений релятивистского уравнения Шрёдингера (I) к решениям уравнения (5). Ясной становится и постановка краевых задач для уравнений типа (I).

ЛИТЕРАТУРА

1. V.G.Kadyshevsky. On an Equation for the Relativistic Scattering Amplitude. Препринт Института теоретической физики АН УССР, ИТФ-67-7, Киев, 1967 г.
2. V.G.Kadyshevsky. Nuclear Physics, B6, № 2, 125-148 (1968).
3. V.G.Kadyshevsky and M.D.Mateev. Nuovo Cimento, 55A, № 2, 275-300 (1968).
4. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov and N.B.Skachkov. Nuovo Cimento, 55A, № 2, 233-257 (1968).
5. V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev and R.M.Mir-Kasimov. On Relativistic Three-Dimensional Equations for the Two-Body Problem in the Unequal Mass Case. JINR Preprint E2-4030, Dubna (1968).
6. M.Freeman, M.D.Mateev and R.M.Mir-Kasimov. Nucl. Physics, B12, № 1, 197-215 (1969).
7. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов и Н.Б.Скачков. Ядерная физика, 9, № 1, 212-223 (1969).
8. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов и Н.Б.Скачков. Ядерная физика, 9, № 2, 462-471 (1969).
9. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, М.Фриман. Ядерная физика, 9, № 3, 646-652 (1969).
10. A.A.Logunov and A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cimento, 29, № 2, 380-399 (1963).

    A.N.Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Bombay, Tata Institute of Fundamental Research, 1964.

11. А.Н.Тихонов. Математический сборник, 31 (73), № 3, 575-586 (1952).
12. М.И.Вишик и Л.А.Люстерник. Успехи математических наук, 12, выпуск 5 (77), 3-122 (1957).
13. А.Б.Васильева. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Пятая летняя математическая школа (Теория обыкновенных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний), г.Ужгород, июнь-июль 1967 г. Институт математики АН УССР, Киев, 1968 г., стр. 65-157.
14. J.Moser. Comm. on Pure and Appl. Mathem., 8, № 2, 251-278 (1955).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 ноября 1969 года.