ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-4747

Р.А. Асанов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПРИМЕР ЗАКРЫТОГО МИРА С ИСТОЧНИКАМИ БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1969

P2-4747

Р.А.Асанов

ПРИМЕР ЗАКРЫТОГО МИРА С ИСТОЧНИКАМИ БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

Abstract

Recently M.A.Markov[1] considered the problem whether it is possible to construct a closed world when some fields interacting with matter are present. It is known, for instance, that electrically charged matter excludes the spherically symmetric closed world. But the situation is quite different in the case of scalar field. First of all, scalar "charge" does not conserve. In addition, the scalar field gives a negative contribution to self mass of the source.

Here we give an example when the closed world exists in the presence of the dust which is a source of massless scalar field. The energy tensor is of the form

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + \frac{1}{4\pi} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{8\pi} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \phi \nabla_\sigma \phi \quad , \rho -$$

is the invariant mass density of the dust, ϕ -scalar field, and the scalar field equation is $\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi = -4\pi j$, j - is the density of the field sources. We assume the homogeneity and isotropy of the metric (see eq. (1) in co-moving coordinates). Then the Bianchi identity $\nabla_\sigma T^\sigma_1 = 0$ gives $j\phi' = 0$, from where $\phi' = 0$, i.e. $\phi = \phi(\tau)$ only.

Assuming $\dot{\phi} = \frac{\dot{a}}{2\sqrt{\kappa}}$ we get the solution of the Einstein eq-s (2), (3) in the form (1), (6), (7) for the closed world (Friedmann world). (Its "synchronous" form is (9)). This solution is nonsingular and density ρ is positive at all acceptable times (when $\eta \epsilon (0, 2\pi)$). The charge density j depends on time in accordance with charge non-conservation.

By analogy one can believe that the closed world may exist in the presence of the scalar field with non-zero mass too.

В последнее время в литературе [1] обсуждается вопрос о возможности построения закрытого мира при наличии различных полей, взаимодействующих с веществом. Известно, например, что присутствие электрического заряда препятствует образованию замкнутой конфигурации. В случае скалярного поля ситуация коренным образом отлична прежде всего из-за отсутствия закона сохранения соответствующего заряда. Кроме того, скалярное поле дает отрицательный вклад в собственную массу источника. Поэтому можно надеяться, что скалярное поле не будет препятствовать образованию замкнутого мира. Ниже построен пример такого замкнутого мира при наличии пылевидного вещества (без давления) и скалярного безмассового поля.

Материальный тензор системы имеет вид:

$$4\pi T_{\mu\nu} = 4\pi\rho\, u_\mu u_\nu + \nabla_\mu \phi\, \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \phi\, \nabla_\sigma \phi ,$$

здесь ρ -инвариантная плотность массы вещества, ϕ -действительное скалярное поле. Уравнение для скалярного поля примем в форме $\nabla_\sigma \nabla^\sigma \phi = -4\pi j$. Здесь j -инвариантная плотность источников поля. Будем считать систему отсчета сопутствующей веществу и искать однородное и изотропное решение уравнений Эйнштейна. Тогда метрика может быть записана в виде [2]

$$ds^2 = -e^{\alpha}\left[dR^2 + a_0^2 \sin^2\frac{R}{a_0}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)\right] + e^{\gamma}\, dr^2,$$

$$\alpha = \alpha(r),\ \gamma = \gamma(r),\ R \in (0, \pi a_0). \tag{1}$$

Тождество Бьянки $\nabla_\sigma T^\sigma_1 = 0$ приводит к соотношению $j\phi' = 0$, из которого следует $\phi' = 0$. Штрих и точка означают производные по R и r.

Уравнения Эйнштейна принимают вид

$$8\pi\kappa\rho + \kappa e^{-\gamma}\dot{\phi}^2 = \frac{3}{a_0^2}e^{-\alpha} + \frac{3}{4}e^{-\gamma}\dot{\alpha}^2, \tag{2}$$

$$-\kappa e^{-\gamma}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{a_0^2}e^{-\alpha} + e^{-\gamma}\left(\ddot{\alpha} + \frac{3}{4}\dot{\alpha}^2 - \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{2}\right), \tag{3}$$

а уравнение для скалярного поля становится

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{3}{2}\dot{\alpha} - \frac{\dot{\gamma}}{2}\right)\dot{\phi} = -4\pi j\, e^{\gamma}. \tag{4}$$

Уравнение (3) может быть проинтегрировано в виде

$$e^{-\gamma} = \frac{\exp\left(-2\kappa\int\frac{\dot{\phi}^2 dr}{\dot{\alpha}}\right)}{\dot{\alpha}^2\exp\left(\frac{3\alpha}{2}\right)}\left[-\frac{2}{a_0^2}\int\dot{\alpha}\, e^{\frac{\alpha}{2}}\exp\left(2\kappa\int\frac{\dot{\phi}^2\, dr}{\dot{\alpha}}\right)dr + C\right]. \tag{5}$$

Примем для функции $\alpha(r)$ выражение такое же, как в случае синхронной формы фридмановского закрытого мира с веществом без давления

$$e^{\alpha} = (1 - \cos\eta)^2,\ r = a_0(\eta - \sin\eta),\ \eta \in (0, 2\pi). \tag{6}$$

Тогда, наложив условие соответствия со случаем Фридмана: $\gamma = 0$ при $\phi = 0$, находим константу интегрирования $C = \frac{8}{a_0^2}$.

Для получения решения остается задать величину ϕ таким образом, чтобы функция e^{γ} не имела особенностей при $\eta \in (0, 2\pi)$, а плотность массы ρ оставалась положительной. Положим, например, $\dot{\phi} = \frac{\dot{a}}{2\sqrt{\kappa}}$. Тогда из (5) и (2) получаем:

$$e^{\gamma} = \frac{2\sin^2\frac{\eta}{2}}{1+\sin^2\frac{\eta}{2}}, \quad 8\pi\kappa\rho = \frac{1+2\sin^4\frac{\eta}{2}}{4a_0^2\sin^8\frac{\eta}{2}}. \tag{7}$$

Тем самым обычные требования удовлетворены. Граничные по времени τ точки ($\eta = 0$ или 2π), как и в случае Фридмана, являются особыми.

Интересно заметить, что получающееся здесь выражение для плотности источников скалярного поля

$$j = (32\pi\sqrt{\kappa}\; a_0^2)^{-1} \; \frac{2\sin^4\frac{\eta}{2} - 1}{\sin^8\frac{\eta}{2}} \tag{8}$$

обращается в нуль в моменты времени, где $\sin^4\frac{\eta}{2} = \frac{1}{2}$, и меняет в эти моменты знак. Такой результат вполне соответствует отсутствию закона сохранения заряда для скалярного поля. Можно думать, что скалярное поле с массой также не будет препятствовать образованию закрытого мира.

Полученное решение (6), (7) может быть приведено к синхронной форме путем перехода к новому времени, $t^2 = 8a_0^2(1-\sin^4\frac{\eta}{2})$. Метрика (1) принимает вид

$$ds^2 = -4\left(1-\frac{t^2}{8a_0^2}\right)\left[dR^2 + a_0^2\sin^2\frac{R}{a_0}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)\right] + dt^2. \tag{9}$$

Приношу благодарность проф. М.А. Маркову за стимулирующие обсуждения.

Литература

1. М.А. Марков. Замкнутость Вселенной и законы сохранения электрического, барионного и лептонных зарядов. Сообщения ОИЯИ Д2-4534, Дубна 1969 г.

M.A.Markov. Closed Universe and Lows of Conservation of Electric, Barion and Lepton Charges, Communications of JINR, D2-4534, Dubna, 1969.

2. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теория поля. "Наука", 1967 г.

L.Landau and E.Lifshitz. Teoriya polya (Field Theory), 5-rd ed, "Nauka", 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1969 года.