

E-28

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

10/X-69



P2 - 4645

И.А.Еганова , М.И.Широков

СКОРОСТЬ СИГНАЛА  
В ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4645

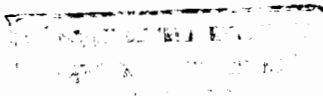
И.А.Еганова\*, М.И.Широков

СКОРОСТЬ СИГНАЛА  
В ТОЧНО РЕШАЕМОЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Направлено в журнал  
"Теоретическая и математическая физика"

---

\*  
Физический институт АН Азербайджанской ССР



8070/2 нр.

## В в е д е н и е

Релятивистская причинность требует, чтобы вероятность передачи возбуждения от одного атома к другому равнялась нулю при  $t < R/c$ . Именно такой результат получили Кикучи<sup>/1/</sup> и Ферми<sup>/2/</sup>. Однако их расчёт первого исчезающего приближения теории возмущений был неточным. Точное вычисление в рамках того же приближения показывает, что  $w(t) \neq 0$  в интервале  $0 < t < R/c$  (см. работу<sup>/3/</sup>, где приводится и обсуждается литература по этому вопросу). Начальное и конечное состояния задачи в указанных работах описывались соответствующими собственными векторами свободного гамильтониана, т.е. "голыми" состояниями. При таком описании вероятность найти второй атом возбужденным при  $0 < t < R/c$  оказывается не равной нулю, даже если вначале первый был невозбужден. Такой результат получается не только по теории возмущений, но и при точном расчёте, который возможен в нашей модели. Поэтому отличие  $w(t)$  от нуля при  $t < R/c$  можно просто рассматривать как еще одно указание на недопустимость употребления "голых" состояний в теории с взаимодействием.

Рассматриваемая модель описывает две заряженные частицы, находящиеся в осцилляторных ямах, разделенных расстоянием  $R$ . Частицы

взаимодействуют с электромагнитным полем, причем только дипольно. Основное содержание настоящей работы заключается во введении вместо "голых" операторов рождения-уничтожения других операторов, названных физическими. От *in*- и *out* - операторов они отличаются тем, что должны описывать физические кванты в любой момент времени, а не только при  $t \rightarrow \pm \infty$ . В работе <sup>/4/</sup> на примере модели с одной заряженной частицей подробно описана процедура их получения. В разделе 2 она кратко повторена с необходимыми модификациями.

Первое и главное следствие описания конечных и начальных состояний с помощью физических операторов заключается в том, что второй электрон может быть найден в возбужденном состоянии при  $t > 0$ , только если вначале первый был возбужден и к тому же, если он к моменту  $t$  уже потерял свое возбуждение. Такой результат соответствует обычной связи следствия с причиной. Численный расчёт  $w(t)$  (см. раздел 4), однако, показывает, что  $w(t) \neq 0$  при  $t < R/c$ , что не соответствует релятивистской причинности.

Задача Кикучи-Ферми охватывает только часть реального процесса передачи сигнала. Эту часть можно описать как стадию рождения обменного фотона, его распространения и поглощения. Мы показали, что усовершенствованное рассмотрение этой стадии не снимает обсуждаемой трудности. Однако прежде чем сделать окончательный вывод о причинности теории, следует исследовать процесс приготовления возбужденного состояния атома 1 и регистрации факта появления возбуждения у атома 2.

## 1. Описание модели

В кулоновской калибровке и в единицах  $\hbar = 1$  и  $c = 1$  гамильтониан модели имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2m} (\vec{p}_1 - e\vec{A})^2 + \frac{1}{2m} (\vec{p}_2 - e\vec{A})^2 + H_{ph} + \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|} + \\
 & + \frac{m \kappa_1^2}{2} (\vec{R}_1 - \vec{d}_1)^2 + \frac{m \kappa_2^2}{2} (\vec{R}_2 + \vec{d}_2)^2, \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$H_{ph} = \frac{1}{8\pi} \int d\vec{x} [E^2(\vec{x}) + (\text{rot } \vec{A}(\vec{x}))^2].$$

Центры осцилляторных потенциалов для электронов расположены в некоторых точках  $+\vec{d}_1$  и  $-\vec{d}_2$ . Будем считать, что расстояние между ними  $|\vec{d}_1 + \vec{d}_2|$  много больше размеров  $\ell = 1/\sqrt{m\kappa}$  электронных осцилляторов.

Модель окажется точно решаемой, если мы отбросим члены, содержащие  $1/|\vec{d}_1 + \vec{d}_2|^4$  (и еще меньшие) в разложении (3) (см. далее) для кулоновского взаимодействия  $e^2/|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|$ .

Это взаимодействие должно несколько смещать средние точки, около которых колеблются электроны. Пусть для первого электрона новая точка равновесия будет  $(\vec{d}_1 + \vec{\rho}_1)$ , для второго  $-(\vec{d}_2 + \vec{\rho}_2)$ ;  $\vec{\rho}_1$  и  $\vec{\rho}_2$  еще надо найти. Вводим новые операторы координат электронов  $\vec{q}_1$  и  $\vec{q}_2$ , отсчитываемые от этих точек:

$$\vec{R}_1 = (\vec{d}_1 + \vec{\rho}_1) + \vec{q}_1; \quad \vec{R}_2 = -(\vec{d}_2 + \vec{\rho}_2) + \vec{q}_2. \quad (2)$$

Введем неоператорный вектор  $\vec{R} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2$ , так что  $\vec{R}_1 - \vec{R}_2 = \vec{R} - (\vec{q}_2 - \vec{q}_1)$ . Направим ось  $z$  по  $\vec{R}$ :  $R_x = R_y = 0$  и  $R_z = R$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|^L} &= \frac{e^2}{R^L} \sum P_L(\cos \alpha) \left| \frac{\vec{q}_2 - \vec{q}_1}{R} \right|^L = \\ &= \frac{e^2}{R} \left\{ 1 + \frac{q_{2z} - q_{1z}}{R} + \frac{1}{2} \left[ 3 \frac{(q_{2z} - q_{1z})^2}{|\vec{q}_2 - \vec{q}_1|^2} - 1 \right] \frac{|\vec{q}_2 - \vec{q}_1|^2}{R^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\cos \alpha = (\vec{R}(\vec{q}_2 - \vec{q}_1)) / R |\vec{q}_2 - \vec{q}_1| = (q_{2z} - q_{1z}) / |\vec{q}_2 - \vec{q}_1|$ . Первый член  $e^2/R$  — с — числовой и является постоянной добавкой к полной энергии (1). Векторы  $\vec{\rho}_1$  и  $\vec{\rho}_2$  можно подобрать так, чтобы сумма второго члена разложения (3) и последних двух членов в (1):

$$e^2 \frac{q_{2z} - q_{1z}}{R^2} + \frac{m\kappa_1^2}{2} (\vec{q}_1 + \vec{\rho}_1)^2 + \frac{m\kappa_2^2}{2} (\vec{q}_2 - \vec{\rho}_2)^2$$

не содержала членов первого порядка по  $\vec{q}_1$  и  $\vec{q}_2$ . Это приводит к равенствам  $\rho_{1x} = \rho_{1y} = \rho_{2x} = \rho_{2y} = 0$  и

$$m\kappa_1^2 \rho_{1z} - \frac{e^2}{R^2} = 0; \quad -m\kappa_2^2 \rho_{2z} + \frac{e^2}{R^2} = 0. \quad (4)$$

Поскольку  $R = R_z = d_{1z} + d_{2z} + \rho_{1z} + \rho_{2z}$ , то (4) есть система двух кубических уравнений для  $\rho_{1z}$  и  $\rho_{2z}$ . Выберем точку начала координат посередине вектора  $\vec{R}$  так, чтобы

$$\vec{d}_1 + \vec{\rho}_1 = \vec{d} \quad \text{и} \quad (-\vec{d}_2 + \vec{\rho}_2) = -\vec{d}, \quad 2\vec{d} = \vec{R}. \quad (5)$$

Конкретные значения  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $d$  нам не нужны<sup>х/</sup>.

Третий член разложения (3) имеет вид:

$$\frac{e^2}{R^3} [3(q_{2z} - q_{1z})^2 - (\vec{q}_2 - \vec{q}_1)^2] = \frac{e^2}{R^3} [2q_{1z}^2 + 2q_{2z}^2 - q_{1x}^2 - q_{1y}^2 - q_{2x}^2 - q_{2y}^2] +$$

(6)

$$+ \frac{e^2}{R^3} [-2q_{1z}q_{2z} + q_{1x}q_{2x} + q_{1y}q_{2y}].$$

Члены вида  $e^2 q_{1x}^2 / R^3$  надо просто объединить с членами  $m\kappa_1^2 q_{1x}^2 / 2$ . Это слегка изменяет константы  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  (причём коэффициент при  $q_x^2$  теперь отличается от коэффициентов при  $-q_x^2$  и  $q_y^2$ ), но мы не будем вводить новых обозначений. Таким образом, если отбросить остальные члены разложения (4) и постоянные с числовыми членами  $e^2/R$ ,  $m\kappa_1^2 \rho_1^2 / 2$  и  $m\kappa_2^2 \rho_2^2 / 2$ , то (1) примет вид:

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p}_1 - e\vec{A}(+\vec{d})]^2 + \frac{1}{2m} [\vec{p}_2 - e\vec{A}(-\vec{d})]^2 + \frac{m\kappa_1^2}{2} \vec{q}_1^2 + \frac{m\kappa_2^2}{2} \vec{q}_2^2 +$$

(1')

$$+ \frac{e^2}{R^3} [-2q_{1z}q_{2z} + q_{1x}q_{2x} + q_{1y}q_{2y}] + H_{ph}.$$

---

<sup>х/</sup> Впрочем, с большой точностью  $\rho_{1z} = \frac{e^2}{m\kappa_1^2 |\vec{d}_1 + \vec{d}_2|^2} = (e^2 \frac{\ell^2}{|\vec{d}_1 + \vec{d}_2|^2}) \frac{1}{\kappa_1}$  и  $\rho_{2z} = \frac{e^2}{m\kappa_2^2 |\vec{d}_1 + \vec{d}_2|^2}$ . Это означает увеличение расстояния между средними точками после включения кулоновского взаимодействия (электроны отталкиваются).

Аргументами  $\vec{A}$  являются не координаты электронов  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$ , но средние точки  $+\vec{d}$  и  $-\vec{d}$ , несколько не совпадающие с центрами осцилляторных потенциалов, см. (5). Эта формулировка дипольного приближения фактически содержит учёт второго члена в (3).

Чтобы явно использовать упрощение, вносимое дипольным приближением, разложим операторы  $\vec{A}$  и  $\vec{E}$  по полной системе векторных соленоидальных (поперечных) двухточечных функций  $\vec{G}_{\Lambda M}^{(\sigma)}(\mathbf{k}, \vec{x})$ , введенных нами в §3 работы /5/:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \int_0^\infty dk k \sqrt{\frac{4\pi}{2k}} \sum_{\Lambda, M, \sigma} \{ \vec{G}_{\Lambda M}^{(\sigma)}(\mathbf{k}, \vec{x}) a_{\Lambda M \sigma}(\mathbf{k}) + \vec{G}_{\Lambda M}^{(\sigma)*}(\mathbf{k}, \vec{x}) a_{\Lambda M \sigma}^+(\mathbf{k}) \}, \quad (7)$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\dot{\vec{A}} = i \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{\frac{4\pi}{2k}} \sum_{\Lambda, M, \sigma} \{ \vec{G}_{\Lambda M}^{(\sigma)}(\mathbf{k}, \vec{x}) a_{\Lambda M \sigma}(\mathbf{k}) - \vec{G}_{\Lambda M}^{(\sigma)*}(\mathbf{k}, \vec{x}) a_{\Lambda M \sigma}^+(\mathbf{k}) \}. \quad (7')$$

Обычные векторные соленоидальные функции с определенным полным моментом  $J$  имеют такое свойство: только три из них (с наименьшим  $J$ , равным 1), не обращаются в нуль в одной точке - начале координат. У  $\vec{G}_{\Lambda M}^{(\sigma)}$  есть аналогичное свойство: в двух точках  $+\vec{d}$  и  $-\vec{d}$  не равны нулю только шесть функций, а именно с индексами  $\sigma = +$ ,  $\Lambda = 1, 2$  и  $M = -1, 0, +1$ . Поэтому в разложении (8) для  $\vec{A}(\pm\vec{d})$  фигурируют операторы  $a$  только с указанными значениями этих индексов. Используя полученные в /5/ значения двухточечных функций в точках  $\pm\vec{d}$ , получаем

Из /5/ можно извлечь выражения этих значений только в виде некоторых бесконечных рядов (см., в частности, (3.16) в /5/). Нам удалось их просуммировать.



$$\vec{A}(\vec{d}) = \int_0^\infty dk \sqrt{k} \{ f_{\Lambda_1}(k, d) \vec{e}_x p_{\Lambda_x}(k) + f_{\Lambda_1}(k, d) \vec{e}_y p_{\Lambda_y}(k) + f_{\Lambda_0}(k, d) \vec{e}_z p_{\Lambda_z}(k) \}. \quad (8)$$

$$f_{\Lambda_1}(k, d) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \left\{ i + \frac{3}{2} \left[ \frac{\sin 2kd}{2kd} + \frac{\cos 2kd}{(2kd)^2} - \frac{\sin 2kd}{(2kd)^3} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$f_{\Lambda_0}(k, d) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \left\{ 1 - 3 \left[ \frac{\cos 2kd}{(2kd)^2} - \frac{\sin 2kd}{(2kd)^3} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В формулах (9) верхний знак соответствует  $\Lambda = 1$ , нижний  $-\Lambda = 2$ . В (8) вместо  $a$  и  $a^\dagger$  использованы эрмитовы операторы  $p_x, p_y, p_z$ , занумерованные декартовыми проекциями  $x, y, z$ :

$$p_{\Lambda_x}(k) = [a_{\Lambda_x}(k) + a_{\Lambda_x}^\dagger(k)] / \sqrt{2}. \quad (10x)$$

Аналогично определяются  $p_{\Lambda_y}(k)$  и  $p_{\Lambda_z}(k)$ . Операторы  $a$  в формулах (10x), (10y), (10z) связаны с операторами уничтожения  $a_{\Lambda_{M+}}(k)$ , занумерованными циклическими проекциями  $M = 0, \pm 1$  (см (7)), следующим образом:

$$a_{\Lambda_z}(k) = a_{\Lambda_{0+}}(k); \quad a_{\Lambda_x} = (a_{\Lambda_{-1+}} - a_{\Lambda_{+1+}}) / \sqrt{2}; \quad a_{\Lambda_y} = -i(a_{\Lambda_{-1+}} + a_{\Lambda_{+1+}}) / \sqrt{2}. \quad (11)$$

Далее нам потребуются операторы  $\vec{q}(k)$ , канонически сопряженные к  $\vec{p}(k)$ :

$$q_{\Lambda_x}(k) = i [a_{\Lambda_x}(k) - a_{\Lambda_x}^\dagger(k)] / \sqrt{2}; \quad [q_{\Lambda_r}(k), p_{\Lambda_{r'}}(k')] = i \delta_{\Lambda_r, \Lambda_{r'}} \delta_{rr'} \delta(k-k'). \quad (12)$$

Выражение для  $\vec{A}(\vec{d})$  получается из (8) заменой  $f_{\Lambda M}(k, d)$  на  $(-i)^{\Lambda+1} f_{\Lambda M}(k, d)$ . Таким образом, с электронами взаимодействуют только "дипольные" фотоны, характеризующиеся индексами  $\sigma = +$ ,  $\Lambda = 1, 2$ ,  $M = 0, \pm 1$  (или  $x, y, z$ ), и в дальнейшем достаточно рассматривать только соответствующую "дипольную" часть от  $H_{ph}$ :

$$H_{ph}^d = \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \sum_{\Lambda=1,2} \epsilon [q_\Lambda^2(k) + p_\Lambda^2(k)], \quad q_\Lambda^2 = q_{\Lambda x}^2 + q_{\Lambda y}^2 + q_{\Lambda z}^2. \quad (13)$$

Наиболее серьезное отличие нашей модели от настоящей электродинамики двух нерелятивистских электронов заключается в дипольном приближении. Следует ожидать, что отличие будет небольшим для эффектов с фотонами малых энергий, если в члены взаимодействия  $e\vec{p}_1 \vec{A}(\vec{d})$  и  $e\vec{p}_2 \vec{A}(-\vec{d})$  (см. (1<sup>1</sup>) и (8)) мы введем вместо  $f_{\Lambda M}(k, d)$  факторы  $g(k) f_{\Lambda M}(k, d)$  с функцией  $g(k)$ , обрезающей большие  $k$ .

Вставим (8) и (13) в (1<sup>1</sup>) и введем вместо электронных операторов  $\vec{q}_i$  и  $\vec{p}_i$ ,  $i = 1, 2$  канонические безразмерные операторы  $q'_i = q_i / \sqrt{m\kappa_i}$  и  $p'_i = p_i / \sqrt{m\kappa_i}$ . Оказывается, что  $H$  разделяется на три коммутирующие друг с другом части:  $H = h_x + h_y + h_z$ . Выпишем одну из них  $-h_r$ ,  $r = x, y, z$ , опуская штрихи у  $q'_{ir}$  и  $p'_{ir}$ :

$$h_r = \frac{\kappa_1}{2} (q_{1r}^2 + p_{1r}^2) + \frac{\kappa_2}{2} (q_{2r}^2 + p_{2r}^2) + \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \sum_{a=1,2} k [q_{ar}^2(k) + p_{ar}^2(k)] + \quad (14)$$

$$+ \frac{S_r}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}} q_{1r} q_{2r} + \sqrt{\kappa_1} p_{1r} (\vec{\epsilon}_1^r \vec{p}_r) + \sqrt{\kappa_2} p_{2r} (\vec{\epsilon}_2^r \vec{p}_r) + \frac{1}{2} (\vec{\epsilon}_1^r \vec{p}_r)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\epsilon}_2^r \vec{p}_r)^2.$$

Введено следующее сокращение ("скалярное произведение"):

$$(\vec{\epsilon}^r, \vec{p}_r) = \int_0^\infty dk \sum_{a=1,2} \epsilon^{ar}(k, d) p_{ar}(k). \quad (15)$$

В (14), (15) и в дальнейшем вместо индекса  $\Delta$  употребляется индекс  $a$ . Остальные обозначения:

$$\epsilon_1^{ar}(k, d) = \begin{cases} -e \sqrt{\frac{k}{m}} g(k) f_{a1}(k, d), & \text{если } r = x, y; \\ -e \sqrt{\frac{k}{m}} g(k) f_{a0}(k, d), & \text{если } r = z. \end{cases} \quad (16)$$

$$\epsilon_2^{ar}(k, d) = (-1)^{a+1} \epsilon_1^{ar}(k, d); \quad S_r = \begin{cases} e^2/R^3 m, & r = x, y; \\ -2e^2/R^3 m, & r = z. \end{cases}$$

Достаточно рассмотреть один из гамильтонианов  $h_r$ . В дальнейшем, говоря о гамильтониане модели, мы будем иметь в виду  $h_r$  и индекс  $r$  будем опускать.

## 2. Введение физических операторов

Для получения физических операторов надо сделать такие канонические преобразования исходных операторов  $q$  и  $p$ , чтобы  $h$  приобрело вид суммы двух одинаковых квадратичных форм, от  $q$  и от  $p$ , см. <sup>/4/</sup>. Как и в случае одного электрона (см. раздел 2 в <sup>/4/</sup>) сначала производим каноническое преобразование

$$\begin{aligned}
q_1 &= q_1', & p_1 &= p_1' + \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} \int_0^\infty dk \sum_a \xi_1^a(k) p_a'(k), \\
q_2 &= q_2', & p_2 &= p_2' + \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} \int_0^\infty dk \sum_a \xi_2^a(k) p_a'(k), \\
q_a(k) &= q_a'(k) - \frac{\xi_1^a(k)}{\sqrt{\kappa_1}} q_1' - \frac{\xi_2^a(k)}{\sqrt{\kappa_2}} q_2', & p_a(k) &= p_a'(k).
\end{aligned} \tag{17}$$

После него в  $h$  появятся члены, содержащие  $q_1' q_a'(k)$  наряду с членами  $p_1' p_a'(k)$ :

$$\begin{aligned}
h &= \frac{\kappa_1}{2} p_1'^2 + \frac{\kappa_2}{2} p_2'^2 + \frac{j}{2} (\kappa_1 + \xi_{11}/\kappa_1) q_1'^2 + \frac{1}{2} (\kappa_2 + \xi_{22}/\kappa_2) q_2'^2 + \frac{S + \xi_{12}}{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}} q_1' q_2' - \\
&- \frac{q_1'}{\sqrt{\kappa_1}} \int_0^\infty dk \sum_a k \xi_1^a(k) p_a'(k) - \frac{q_2'}{\sqrt{\kappa_2}} \int_0^\infty dk \sum_a k \xi_2^a(k) q_a'(k) + \sqrt{\kappa_1} p_1' ((\vec{\xi}_1 + \vec{\epsilon}_1) \vec{p}') + \\
&+ \sqrt{\kappa_2} p_2' ((\vec{\xi}_2 + \vec{\epsilon}_2) \vec{p}') - \frac{1}{2} \int_0^\infty dk \sum_a k [q_a'^2(k) + p_a'^2(k)] + \frac{1}{2} ((\vec{\xi}_1 + \vec{\epsilon}_1) \vec{p}')^2 + \frac{1}{2} ((\vec{\xi}_2 + \vec{\epsilon}_2) \vec{p}')^2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Использовано сокращение (15) и  $\xi_{ij} = \int_0^\infty dk k \sum_a \xi_i^a(k) \xi_j^a(k)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Замечаем, что форма от  $q_a'(k)$  имеет вид интеграла квадратов  $q_a'(k)$ , в то время как форма от  $p_a'(k)$  не является таковой из-за последних двух слагаемых в (18). Но ее можно привести к интегралу квадратов следующим образом. Сначала сделаем матрицу  $q_a'(k)$  - формы единичной матрицей следующим каноническим преобразованием:

$$q_a'(k) \rightarrow q_a'(k) \sqrt{k}, \quad p_a'(k) \rightarrow p_a'(k) \sqrt{k}.$$

После этого  $p'_i(k)$  - форма примет вид

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty dk_0 \int_0^\infty dk'_0 \sum_{a,a'} F_{aa'}(k, k') p'_a(k) p'_{a'}(k'), \quad (19)$$

$$F_{aa'}(k, k') = k^2 \delta(k - k') \delta_{aa'} + \alpha_1^a(k) \alpha_1^{a'}(k') + \alpha_2^a(k) \alpha_2^{a'}(k'),$$

$$\alpha_i^a \equiv \sqrt{k} [\xi_i^a(k) + \epsilon_i^a(k)], \quad i=1,2. \quad (20)$$

В приложении А найдено преобразование  $X$ , приводящее (19) к интегралу квадратов  $\int_0^\infty d\nu \sum_b \nu^2 p_b''^2(\nu)$  и оставляющее  $q'_a(k)$  - форму неизменной (поскольку  $X$  ортогональное) -  $\int_0^\infty d\nu \sum_b q_b''^2(\nu)$ . Коэффициенты этих двух форм от  $p_b''(\nu)$  и  $q_b''(\nu)$  могут быть приравнены преобразованием:

$$p_b''(\nu) = \tilde{q}_b(\nu) \sqrt{\nu}; \quad p_b''(\nu) = \tilde{p}_b(\nu) / \sqrt{\nu}.$$

Таким образом, после преобразования

$$q'_a(k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty d\nu \sum_b X_b^a(k, \nu) \sqrt{\nu} \tilde{q}_b(\nu); \quad p'_a(k) = \sqrt{k} \int_0^\infty d\nu \sum_b X_b^a(k, \nu) \frac{1}{\sqrt{\nu}} \tilde{p}_b(\nu) \quad (21)$$

чисто фотонная часть  $h$  примет вид суммы двух одинаковых интегралов от квадратов  $\tilde{q}_b(\nu)$  и  $\tilde{p}_b(\nu)$ .

Аналогично поступим с чисто электронной частью (см. первую строчку в (18)). После преобразования

$$p'_i \rightarrow p'_i / \sqrt{\kappa_i}, \quad q'_i \rightarrow q'_i \sqrt{\kappa_i} \quad i=1,2 \quad (22)$$

коэффициенты при  $p_1'^2$  и  $p_2'^2$  сравниваются. Далее подбираем угол  $\theta$  в ортогональном преобразовании

$$q_1' = q_1'' \cos \theta - q_2'' \sin \theta, \quad q_2' = q_1'' \sin \theta + q_2'' \cos \theta \quad (23)$$

(аналогично для  $p_1'$  и  $p_2'$ ) так, чтобы член  $q_1'' q_2''$  исчез и квадратичная форма от  $q_1''$ ,  $q_2''$  стала суммой квадратов  $\frac{\omega_1^2}{2} q_1''^2 + \frac{\omega_2^2}{2} q_2''^2$ , в то время как форма от  $p_1''$ ,  $p_2''$  сохранила старые коэффициенты:  $p_1''^2/2 + p_2''^2/2$ .

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(S + \xi_{12})}{\kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \xi_{11} - \xi_{22}},$$

$$\omega_1^2 = (\kappa_1^2 + \xi_{11}) \cos^2 \theta + (\kappa_2^2 + \xi_{22}) \sin^2 \theta + (S + \xi_{12}) \sin 2\theta, \quad (24)$$

$$\omega_2^2 = (\kappa_1^2 + \xi_{11}) \sin^2 \theta + (\kappa_2^2 + \xi_{22}) \cos^2 \theta - (S + \xi_{12}) \sin 2\theta.$$

После канонического преобразования

$$q_i'' = \check{q}_i / \sqrt{\omega_i}; \quad p_i'' = \check{p}_i \sqrt{\omega_i}, \quad i=1,2 \quad (25)$$

коэффициенты при  $\check{q}_i^2$  и  $\check{p}_i^2$  станут одинаковыми.

После преобразований (21) и (22), (23), (25) коэффициенты при  $\check{q}_i, \check{q}_i(\nu)$  и  $\check{p}_i, \check{p}_i(\nu)$  в гамильтониане  $\mathbf{h}$  изменятся по сравнению с теми, которые имеются в средней строке (18). Для полного равенства форм остается только приравнять их:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\nu}{\omega_1}} \left[ -\cos \theta \int_0^\infty dk \sum_a \sqrt{k} \xi_1^a(k) X_b^a(k, \nu) - \sin \theta \int_0^\infty dk \sum_a \sqrt{k} \xi_2^a(k) X_b^a(k, \nu) \right] = \\ & = \sqrt{\frac{\omega_1}{\nu}} \left[ \cos \theta \int_0^\infty dk \sum_a a_1^a(k) X_b^a(k, \nu) + \sin \theta \int_0^\infty dk \sum_a a_2^a(k) X_b^a(k, \nu) \right], \quad (26.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\nu}{\omega_2}} \int_0^\infty dk \sum_a \left[ \sin \theta \sqrt{k} \xi_1^a(k) - \cos \theta \sqrt{k} \xi_2^a(k) \right] X_b^a(k, \nu) = \\ & = \sqrt{\frac{\omega_2}{\nu}} \int_0^\infty dk \sum_a \left[ -\sin \theta a_1^a(k) + \cos \theta a_2^a(k) \right] X_b^a(k, \nu). \quad (26.2) \end{aligned}$$

Вместо  $\xi$  введем  $a$  и  $\epsilon$  по формуле (20) и затем разрешим систему относительно членов  $\int_0^\infty dk \sum_a a_1^a X_b^a$  и  $\int_0^\infty dk \sum_a a_2^a X_b^a$  :

$$\int_0^\infty dk \sum_a \left\{ a_1^a(k) - \nu \sqrt{k} \left[ \left( \frac{\cos^2 \theta}{\nu + \omega_1} + \frac{\sin^2 \theta}{\nu + \omega_2} \right) \epsilon_1^a(k) + \frac{(\omega_2 - \omega_1) \sin \theta \cos \theta}{(\nu + \omega_1)(\nu + \omega_2)} \epsilon_2^a(k) \right] \right\} X_b^a(k) = 0 \quad (27.1)$$

$$\int_0^\infty dk \sum_a \left\{ a_2^a(k) - \nu \sqrt{k} \left[ \frac{(\omega_2 - \omega_1) \sin \theta \cos \theta}{(\nu + \omega_1)(\nu + \omega_2)} \epsilon_1^a(k) + \left( \frac{\sin^2 \theta}{\nu + \omega_1} + \frac{\cos^2 \theta}{\nu + \omega_2} \right) \epsilon_2^a(k) \right] \right\} X_b^a(k) = 0 \quad (27.2)$$

Вставим сюда выражение (A.3) из приложения А для  $X_b^a$  и результат запишем таким образом:

$$\int_0^\infty dk \sum_a \left\{ 1 \right\}_k^a C_b^a(\nu) \delta(k - \nu) = -P \int_0^\infty dk \sum_a \left\{ 1 \right\}_k^a \frac{a_1^a(k) \beta_1^b(\nu) + a_2^a(k) \beta_2^b(\nu)}{\nu^2 - 1}, \quad (28.1)$$

$$\int_0^\infty dk \sum_a \left\{ 2 \right\}_k^a C_b^a(\nu) \delta(k - \nu) = -P \int_0^\infty dk \sum_a \left\{ 2 \right\}_k^a \frac{a_1^a(k) \beta_1^b(\nu) + a_2^a(k) \beta_2^b(\nu)}{\nu^2 - 1}, \quad (28.2)$$

Здесь  $\{1\}$  и  $\{2\}$  обозначают выражения, выписанные в фигурных скобках в (27.1) и (27.2) соответственно. Эти нелинейные интегральные уравнения для  $a$  мы решим приближенно. Попробуем найти решение в виде ряда, первый и наибольший член которого имеет тот же порядок по константе  $e$ , что и  $\epsilon$ , т.е. первый, см. (16).

Если у  $a$  порядок  $\approx e$ , то все члены в левых частях уравнений (28) имеют порядок  $\epsilon$ , потому что порядок  $C_b^a(\nu)$  нулевой (см. формулы (A.5) и (A.9)), в них  $\zeta \approx e^{-1}$  и  $\beta \approx e$ . Правые части имеют порядок  $e^3$ . Заменяя их нулями, получаем уравнения нулевого приближения вида

$$(\{1\}_{k=\nu} \vec{C}_b(\nu)) = 0, (\{2\}_{k=\nu} \vec{C}_b(\nu)) = 0, b=1,2; 0 < \nu < \infty. \quad (29)$$

Можно показать, что векторы  $\vec{C}_1$  и  $\vec{C}_2$  при каждом  $\nu$  не нулевые и не параллельные. Действительно, громоздкое вычисление выражения  $\vec{C}_1 \vec{C}_2^2 - (\vec{C}_1 \vec{C}_2)^2$  с помощью формул приложения А показывает, что оно не может равняться нулю (но близко к единице). Раз проекции двумерных векторов  $\{1\}$  и  $\{2\}$  на два линейно независимых вектора равны нулю, то  $\{1\}_\nu^a = 0$  и  $\{2\}_\nu^a = 0$ . Эти равенства определяют  $a_1^a(\nu)$  и  $a_2^a(\nu)$ ,  $a = 1,2$ , в нулевом приближении через  $\epsilon_1^a$ ,  $\epsilon_2^a$  и неизвестные еще константы  $\theta$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , см. (27). С помощью (20) можно выписать и выражения для искомых  $\xi_1^a$  и  $\xi_2^a$  в нулевом приближении.

В случае модели с одним электроном было показано, что при наличии обрезания в  $\epsilon$  итерация дает действительно малую поправку порядка  $e^3$  к нулевому приближению, см. /4/.



Если в (24) подставить найденные выражения для  $\xi_1^a$  и  $\xi_2^a$ , то получим систему трансцендентных уравнений для  $\theta$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В случае  $\kappa_1 = \kappa_2 \equiv \kappa$  у нее есть простое решение:  $\theta = 45^\circ$ . Действительно, в этом случае можно показать, что  $\int_0^\infty \xi_1^a(\nu) \xi_1^a(\nu) d\nu \equiv \int_0^\infty \xi_1^2(\nu) d\nu$  равно  $\int_0^\infty \xi_2^2(\nu) d\nu$  (заметим, что  $\xi_1^2(\nu) = \xi_2^2(\nu)$ , см. (16)). Ввиду этого знаменатель (24) обращается в нуль, что соответствует  $\text{tg } 90^\circ$ .

При  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$  из (24) сразу следует, что  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с точностью до членов порядка  $e^2$  равны  $\kappa$ , но не равны друг другу точно:

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = 2 \left[ S + \int_0^\infty dk \sum_a \xi_1^a(k) \xi_2^a(k) \right]. \quad (30)$$

Громоздкое вычисление интеграла в (30) при  $g^2(k) = \frac{\mu^2}{\mu^2 + k^2}$ ,

$\mu \gg \kappa$ , и при  $R\kappa \gg 1$  дает

$$\omega_1 - \omega_2 \approx \frac{2}{\omega_1 + \omega_2} \left[ \frac{e^2}{mR^3} - \frac{2e^2}{mR^3} \right] \approx - \frac{e^2}{\kappa m R^3} \quad (31)$$

для случая, когда  $g$  в формулах (14), (16) равно  $\frac{1}{2}$  или  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Окончательный вид гамильтониана  $h$  после введения операторов  $\check{q}_1, \check{p}_1$  и  $\check{q}_b(\nu), \check{p}_b(\nu)$ :

$$h = \frac{\omega_1}{2} (\check{q}_1^2 + \check{p}_1^2) + \frac{\omega_2}{2} (\check{q}_2^2 + \check{p}_2^2) + \frac{1}{2} \int_0^\infty d\nu \sum_{b=1,2} \nu [\check{q}_b^2(\nu) + \check{p}_b^2(\nu)] + \quad (32)$$

$$+ \int_0^\infty d\nu \sum_{b=1,2} E_1^b(\nu) [\check{q}_1 \check{q}_b(\nu) + \check{p}_1 \check{p}_b(\nu)] + \int_0^\infty d\nu \sum_{b=1,2} E_2^b(\nu) [\check{q}_2 \check{q}_b(\nu) + \check{p}_2 \check{p}_b(\nu)],$$

где  $E_1^b(\nu)$  и  $E_2^b(\nu)$  равны правым частям уравнений (26.1) и (26.2) соответственно.

Дальнейшее изложение проводится только для случая  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ . Тогда не только  $\vec{\xi}_1^2(\nu) = \vec{\xi}_2^2(\nu)$ , но и  $\vec{a}_1^2(\nu) = \vec{a}_2^2(\nu) \equiv \vec{a}^2$ , как можно показать. С помощью формул (A.2), (A.9), (A.8) и др. из приложения А получаем:

$$E_1^b(\nu) = \sqrt{\frac{\overline{\omega_1}}{2\nu}} [\beta_1^b(\nu) + \beta_2^b(\nu)] = \delta_{b1} \sqrt{\frac{\overline{\omega_1}}{\nu}} \left[ \frac{\vec{a}^2 + (\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{(1 + \lambda_{11} + \lambda_{12})^2 + (\frac{\pi}{2\nu})^2 [\vec{a}^2 + (\vec{a}_1, \vec{a}_2)]^2} \right]^{1/2}, \quad (33.1)$$

$$E_2^b(\nu) = \sqrt{\frac{\overline{\omega_2}}{2\nu}} [-\beta_1^b(\nu) + \beta_2^b(\nu)] = -\delta_{b2} \sqrt{\frac{\overline{\omega_2}}{\nu}} \left[ \frac{\vec{a}^2 - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{(1 + \lambda_{11} - \lambda_{12})^2 + (\frac{\pi}{2\nu})^2 [\vec{a}^2 - (\vec{a}_1, \vec{a}_2)]^2} \right]^{1/2}. \quad (33.2)$$

Здесь  $\delta_{b1}$ , как обычно, равно 1 при  $b=1$  и нулю при  $b=2$ ;  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$  означает  $\sum_a \vec{a}_1^a(\nu) \vec{a}_2^a(\nu)$ . Поскольку  $\vec{a}_{1,2}$  вычислены только в нулевом приближении, то знаменатели в (33) следует заменить единицей ( $\lambda_{11}$  имеет порядок  $e^2$ , см. (A.6)). Тогда  $(E_1^1)^2 \cong \cong \omega_1 (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)^2 / 2\nu$  и  $(E_2^2)^2 \cong \omega_2 (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 / 2\nu$ . Вставим сюда выражения для  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ , полученные из соотношений  $\{1\} = 0$  и  $\{2\} = 0$ , см. (27) при  $\theta = 45^\circ$ . Используя далее выражения (16) для  $\vec{\epsilon}_1$  и  $\vec{\epsilon}_2$ , получаем окончательно

$$(E_j(\nu))^2 \cong e^2 \frac{\omega}{\pi} - \frac{\nu^3 g^2(\nu)}{(\nu + \omega_j)^2} 2f_{jM}^2(\nu, d), \quad j = 1, 2. \quad (34)$$

Выражения для  $f_M$  и  $f_{2M}$  см. в (9);  $M = 1$  соответствует случаю  $g = x$  или  $y$  в (16), а  $M = 0$  - случаю  $g = z$ .

### 3. Физические операторы для электронов

Для описания электронов мы получили физические операторы  $\check{q}_1$ ,  $\check{p}_1$  и  $\check{q}_2$ ,  $\check{p}_2$ . Им соответствуют  $\check{a}_1$ ,  $\check{a}_1^+$  и  $\check{a}_2$ ,  $\check{a}_2^+$ , см. (10) и (12), которые можно назвать операторами рождения-уничтожения фотонов. Покажем, что их нельзя приписывать отдельным электронам, несмотря на значки 1 и 2, которыми они снабжены. Причины следующие:

(а) Без доказательства укажем, что при распаде состояние  $\check{a}_1^+ \Omega$  не переходит в состояние  $\check{a}_2^+ \Omega$  и наоборот<sup>x/</sup>. Распад происходит только в однофотонные состояния. Наиболее известная в настоящее время аналогия состояниям  $\check{a}_1^+ \Omega$  и  $\check{a}_2^+ \Omega$  —  $K_1^0$ - и  $K_2^0$ -мезоны<sup>/6/</sup>. Следовательно,  $\check{a}_1^+ \Omega$  не описывает возбужденное состояние именно первого электрона: из эксперимента известно, что первый электрон может передавать свое возбуждение другому.

(б) Из (22), (23), (25) в случае  $\kappa_1 = \kappa_2 \equiv \kappa$ , когда  $\theta = 45^\circ$  и  $\omega_1 \cong \omega_2 \cong \kappa$ , вытекает, что оператор координаты первого электрона  $q_1'$  (равный первоначальному  $q_1$  согласно (17)) представляется в виде суперпозиции операторов  $\check{q}_1$  и  $\check{q}_2$  с примерно равными весами. Другими словами,  $\check{q}_1$  отнюдь не является оператором, "близким" к  $q_1$ .

(в) Случай  $\kappa_1 = \kappa_2$  означает, что электроны находятся в одинаковых ямах и с электромагнитным полем они взаимодействуют одинаково. Поэтому их перенормированные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  должны точно совпадать. Но  $\omega_1 - \omega_2 \neq 0$  в этом случае (см. (31)).

<sup>x/</sup> Вычисление амплитуды перехода из  $\check{a}_1^+ \Omega$  в  $\check{a}_2^+ \Omega$  в модели с гамильтонианом (32) производится точно так же, как в разделе 4 вычисляется  $A(t)$  с помощью гамильтониана (37). Оказывается, что  $\sum_c \check{O}_1^c(\omega) \check{O}_2^c(\omega) = 0$ .

Получившуюся ситуацию можно было бы предвидеть, поскольку физические операторы вообще не определяются однозначно только одним требованием совпадения их вакуума с физическим вакуумом  $\Omega$ <sup>14,7/</sup>. Рассмотрим операторы  $\tilde{a}$ , связанные с  $\check{a}$  ортогональными преобразованиями вида

$$\check{a}_1 = \cos \phi \tilde{a}_1 + \sin \phi \tilde{a}_2; \quad \check{a}_2 = -\sin \phi \tilde{a}_1 + \cos \phi \tilde{a}_2 \quad (35)$$

с произвольным действительным  $\phi$ . Такие же формулы имеют место для  $\check{a}_1^+$ ,  $\check{a}_2^+$ , для  $\check{q}_1$ ,  $\check{q}_2$  и для  $\check{p}_1$ ,  $\check{p}_2$ . Операторы  $\tilde{a}_1$  и  $\tilde{a}_2$  имеют тот же вакуум  $\Omega$  и поэтому тоже "физические". Среди операторов  $\tilde{q}_1$  и  $\tilde{q}_2$  есть такие, которые могут быть приписаны соответственно первому и второму электрону с "максимальным основанием" в следующем смысле. Они должны минимально отличаться от первоначальных операторов  $q_1$  и  $q_2$ . Для этого матрица  $Q$  произведения преобразований (22), (23), (25) и (35) должна минимально отличаться от единичной матрицы, не изменяющей совсем  $q_1$ ,  $q_2$ <sup>x/</sup>. Минимальное отличие будем характеризовать минимумом нормы Шмидта<sup>18/</sup>  $\|Q-1\|^2 = \text{Spur}(Q-1)^+(Q-1)$ . Из условия  $\theta = \frac{d}{d\phi} \text{Spur}(Q-1)(Q-1) = \frac{d}{d\phi} \text{Spur}(-Q^T-Q)$  находим угол  $\phi_0$ , при котором достигается минимум:

$$\text{tg } \phi_0 = \text{tg } \theta \frac{\sqrt{\kappa_1 \omega_1} + \sqrt{\kappa_2 \omega_2}}{\sqrt{\kappa_1 \omega_2} + \sqrt{\kappa_2 \omega_1}}. \quad (36)$$

---

<sup>x/</sup> Можно написать вместо (35) более общее каноническое преобразование, сохраняющее вакуум. Но тогда  $\check{q}$  будут выражаться не только через  $\tilde{q}$ , но и через  $\tilde{p}$ . Поэтому  $\tilde{q}_1$  будет отличаться от  $q_1$  не только оператором  $q_2$ , но и оператором импульса, т.е. заведомо не минимальным образом.

В случае  $\kappa_1 = \kappa_2$  получаем  $\theta_0 = \theta = 45^\circ$ , так что (35) будет просто обратным поворотом по сравнению с (23). В этом случае после преобразования (35) гамильтониан  $\mathbf{h}$  принимает вид

$$\mathbf{h} = \frac{\nu}{2}(\tilde{\mathbf{q}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_1^2) + \frac{\nu_2}{2}(\tilde{\mathbf{q}}_2^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2) + E(\tilde{\mathbf{q}}_1 \tilde{\mathbf{q}}_2 + \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{p}}_2) + \mathbf{H}_{\text{ph}} + \quad (37)$$

$$+ \int_0^\infty d\nu \sum_b \{ \tilde{\mathbf{E}}_1^b(\nu) [ \tilde{\mathbf{q}}_1 \tilde{\mathbf{q}}_b(\nu) + \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{p}}_b(\nu) ] + \tilde{\mathbf{E}}_2^b(\nu) [ \tilde{\mathbf{q}}_2 \tilde{\mathbf{q}}_b(\nu) + \tilde{\mathbf{p}}_2 \tilde{\mathbf{p}}_b(\nu) ] \}$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_1^b = (\mathbf{E}_1^b - \mathbf{E}_2^b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \tilde{\mathbf{E}}_2^b = (\mathbf{E}_1^b + \mathbf{E}_2^b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\nu_1 = (\omega_1 + \omega_2) / 2 = \nu_2, \quad E = (\omega_1 - \omega_2) / 2. \quad (38)$$

Можно проверить, что есть три сохраняющиеся оператора суммарного числа фотонов и фотонов сортов  $x$ ,  $y$  и  $z$  (как и в модели с одним электроном<sup>/4/</sup>)

$$\mathbf{n}_r = \tilde{\mathbf{a}}_{r1}^+ \tilde{\mathbf{a}}_{r1} + \tilde{\mathbf{a}}_{r2}^+ \tilde{\mathbf{a}}_{r2} + \int_0^\infty d\nu \sum_b \tilde{\mathbf{a}}_{rb}^+(\nu) \tilde{\mathbf{a}}_{rb}(\nu), \quad r = x, y, z. \quad (39)$$

В приложении Б найдено ортогональное преобразование  $\mathbf{O}$ , приводящее (37) или (32) к "диагональному" виду

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \sum_{c=1,2} \omega [ \hat{\mathbf{q}}_c^2(\omega) + \hat{\mathbf{p}}_c^2(\omega) ] = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega \sum_{c=1,2} \omega [ \hat{\mathbf{a}}_c^+(\omega) \hat{\mathbf{a}}_c(\omega) + \hat{\mathbf{a}}_c(\omega) \hat{\mathbf{a}}_c^+(\omega) ]. \quad (40)$$

#### 4. Расчёт амплитуды передачи возбуждения

Начальное состояние задачи Кикучи-Ферми мы будем описывать вектором  $\tilde{a}_1^+ \Omega$ , так что при  $t=0$  имеется один фотон сорта  $1x$  (или  $1y$ ) (возбужден первый электрон). В силу закона сохранения (39) такое состояние не может перейти к моменту  $t > 0$  в вакуумное состояние  $\Omega$  или в состояние "второй электрон возбужден и есть еще несколько фотонов". Единственное возможное конечное состояние с возбужденным вторым электроном - это состояние  $\tilde{a}_2^+ \Omega$  (один фотон сорта  $2x$ ). Вычислим амплитуду вероятности  $A(t)$  найти систему в этом состоянии к моменту  $t > 0$ .

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \langle \tilde{a}_2^+ \Omega, e^{-iht} \tilde{a}_1^+ \Omega \rangle = \\
 &= \langle \int_0^\infty d\omega \sum_c \mathbf{O}_2^c(\omega) \hat{a}_c^+(\omega) \Omega, \int_0^\infty d\omega' \sum_{c'} \mathbf{O}_1^{c'}(\omega') e^{-i\omega' t} \hat{a}_{c'}^+(\omega') \Omega \rangle = \quad (41) \\
 &= \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} [ \mathbf{O}_2^1(\omega) \mathbf{O}_1^1(\omega) + \mathbf{O}_2^2(\omega) \mathbf{O}_1^2(\omega) ].
 \end{aligned}$$

Подробности вывода этой формулы см. в работе /7/. Подставляя в (41) выражения для  $\mathbf{O}_2^c$  и  $\mathbf{O}_1^c$ , вычисленные в приложении Б для случая  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ , получаем

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} \left[ \frac{\vec{E}_1^2}{(\omega - \omega_1 + \mu_1)^2 + \pi^2 \vec{E}_1^4} - \frac{\vec{E}_2^2}{(\omega - \omega_2 + \mu_2)^2 + \pi^2 \vec{E}_2^4} \right]. \quad (42)$$

Здесь  $\vec{E}_1^2$  и  $\vec{E}_2^2$  определены формулами (34) и (9);  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - фор-

мулой (Б.10). Интеграл (42) вычислялся на счётной машине БЭСМ-6. Принималось  $\nu_1 = (\omega_1 + \omega_2)/2 = m/\mu$  и такое обрезание<sup>x/</sup>:  $g^2(\omega) = \mu^2/(\mu^2 + \omega^2)$ , где  $\mu^2 = \nu_1 m = 10 \nu_1^2$ . Считалось, что  $\omega_1 = \omega_2$ , поскольку учёт разности  $\omega_1 - \omega_2$  (см. (31)) означал бы выход за пределы того приближения, в котором получены  $\vec{E}_1^2$  и  $\vec{E}_2^2$ . На рис. 1 представлен результат для расстояния  $d = R/2 = 10/\nu_1 = 10 \lambda_1$ , где  $\lambda_1$  может быть названа длиной волны излучения испускаемого возбужденным электроном. По оси ординат отложен  $|A(t)|$ , по оси абсцисс - время в единицах  $\lambda_1/c$ :  $\tau = t \frac{c}{\lambda_1}$ . В точке  $\tau = 18$  масштаб сменен. Вычисления проводились одним из авторов (И.Е.) и независимо А.И.Широковой (ЛВТА ОИЯИ)<sup>xx/</sup>. Разница между результатами двух расчётов и оцененная ошибка каждого из них не превышают толщины линии графика.

Чтобы иметь представление о зависимости амплитуды от  $R$  и от константы связи  $e^2$ , был вычислен  $|A(t)|$  еще для  $R = 40$  и для  $e^2 = 1/2 \times 137$ . Некоторые результаты сведены в таблицу 1. В числах таблицы неточна последняя выписанная цифра. Отношения  $\Lambda_{20}/\Lambda_{40}$  для указанных значений  $\tau$  меняются от  $\approx 4$  до 2. Отношения  $\Lambda_{137}/\Lambda_{2 \cdot 137}$  для разных значений  $e^{-2}$  с большой точностью равны 2, что соответствует  $\Lambda = e^2$ .

Напомним, что у нас было два приближения. Во-первых, в кулоновском взаимодействии учитывались только выписанные в (3) члены.

<sup>x/</sup> Напомним, что электроны 1 и 2 локализованы около точек  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  в областях размером  $l \approx 1/\sqrt{m\kappa}$  (далее их волновые функции спадают экспоненциально). Употребленный параметр обрезания  $\mu$  размывает взаимодействие электронов с электромагнитным полем в пределах области того же микроскопически малого размера  $l$ .

<sup>xx/</sup> Пользуемся случаем поблагодарить А.Широкову за проведение этого громоздкого расчёта. Также считаем своим приятным долгом поблагодарить Н.М.Соболевского, А.С.Ильникова и К.К.Лудиму за ценные консультации по вопросам программирования на ФОРТРАНе.

Во-вторых, выражения для  $\vec{E}_1^2$  и  $\vec{E}_2^2$  были получены в нулевом приближении, наинизшем по  $e^2$  (см. раздел 2). Если бы вычисленная амплитуда  $A(t)$  имела такой же порядок, что и отброшенные члены, то мы не могли бы утверждать, что полная вероятность не равна нулю при  $t < R/c$ . Однако вклад отброшенных членов мал хотя бы по следующим причинам. Неучтенный остаток кулоновского взаимодействия гораздо быстрее убывает с ростом  $R$ , чем в таблице, а вклад от членов следующего приближения к  $\vec{E}_1^2$  и  $\vec{E}_2^2$  с уменьшением  $e^2$  вдвое уменьшался бы больше, чем в 2 раза. Более подробное обсуждение расчёта и сравнение с теорией возмущений мы дадим в другой работе.

Из изложенных расчётов следует, таким образом, что полная вероятность  $w(t)$  найти второй электрон возбужденным до момента  $R/c$  не равна нулю.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Приведение формы (19) к "главным осям" ортогональным преобразованием

Надо привести "матрицу"  $F$  формы (19) к диагональному виду  $D$  унитарным и действительным преобразованием:  $X^T F X = D$ .

Как обычно, задача сводится к решению линейного уравнения  $F X = X D$  или

$$\begin{aligned}
 & k^2 X_b^a(k, \nu) + a_1^a(k) \int_0^\infty dk' \sum_{a'} a_1^{a'}(k') X_b^{a'}(k', \nu) + a_2^a(k) \int_0^\infty dk' \sum_{a'} a_2^{a'}(k') X_b^{a'}(k', \nu) = \\
 & = X_b^a(k, \nu) \nu^2
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$



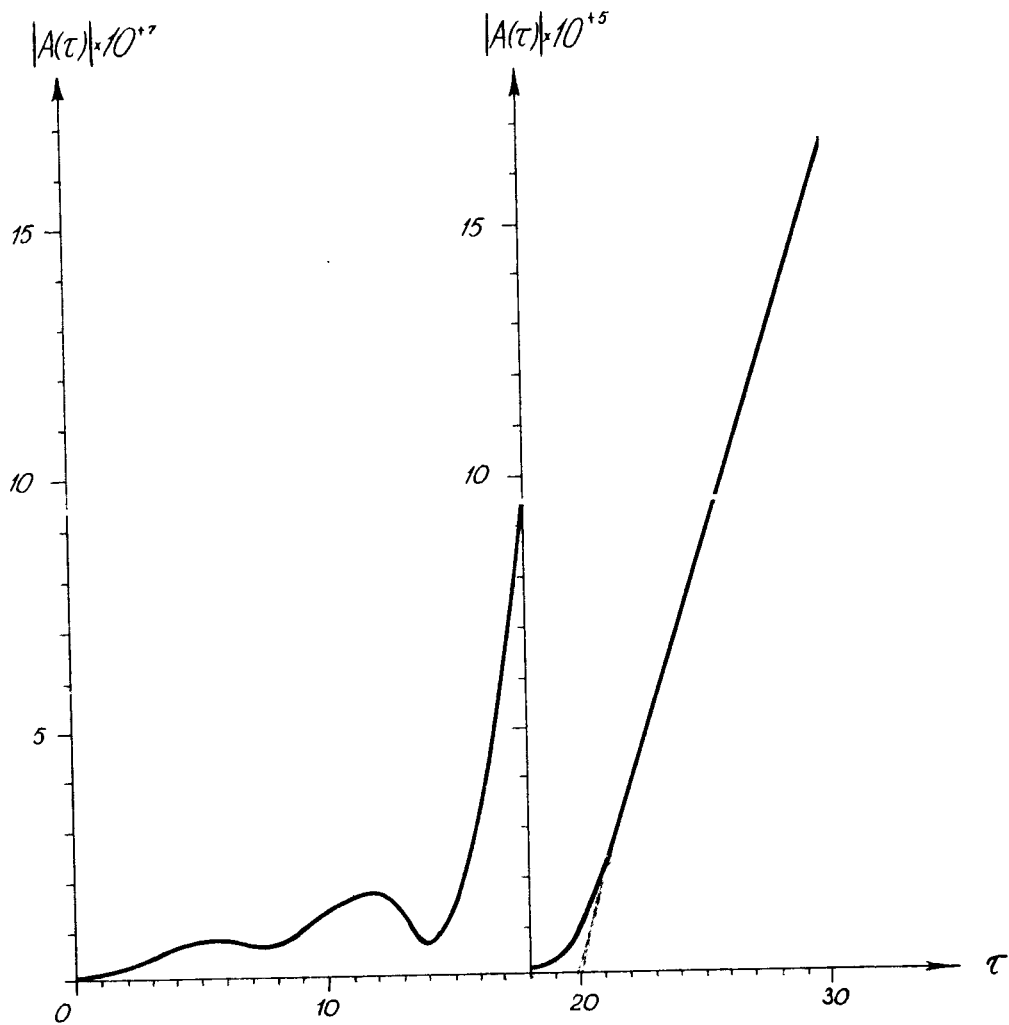


Рис. 1.

Таблица 1.

$ A(t) $	$t$	$R - 10\lambda$	$R$	$R + 10\lambda$
$e^2 = 1/137$	$d = 10\lambda$	$1,331 \cdot 10^{-7}$	$8,5082 \cdot 10^{-6}$	$1,665841 \cdot 10^{-4}$
	$d = 20\lambda$	$3,3 \cdot 10^{-8}$	$4,201 \cdot 10^{-6}$	$8,3089 \cdot 10^{-5}$
$e^2 = 1/2 \cdot 137$	$d = 10\lambda$	$6,6 \cdot 10^{-8}$	$4,253 \cdot 10^{-6}$	$8,3435 \cdot 10^{-5}$
$A_{137} / A_{2 \cdot 137}$		2,0	2,00	1,9966

$\lambda = 10^{-8}$

$R = 20\lambda$

$R = 10\lambda$

Диагональные элементы  $D$  обозначены через  $\nu^2$ . Возможные значения  $\nu$  еще предстоит найти. Столбцы матрицы  $X$  пронумерованы не только индексом  $\nu$ , но и некоторым добавочным индексом  $b$ . Необходимость его введения очевидна в частном случае  $\epsilon^2 = 0$  (т. е. при  $a_1^a = a_2^a = 0$ ), когда  $F$  — диагональная матрица  $V^2 \delta(k-k') \delta_{aa'}$ . Тогда  $X$  может быть единичной матрицей  $\delta(k-\nu) \delta_{ab} = X_b^a(k, \nu)$ .

$b = 1, 2$ . Забегая вперед, скажем, что в общем случае  $\epsilon^2 \neq 0$  введение "b" необходимо для обеспечения полноты столбцов  $X$ , наряду с их ортонормированностью (спектр  $F$  оказывается вырожденным).

Из эрмитовости  $F$  следует, что  $\nu^2$  должны быть действительными. Можно показать, что при  $\nu^2 < 0$  решение для  $X$  может быть только тривиальным, нулевым (дело сводится к однородной системе с ненулевым детерминантом). Таким образом,  $\nu$  может быть только действительным. Пусть  $\nu > 0$ . Введем обозначения

$$\beta_i^b(\nu) = \int d^3k \sum_a a_i^a(k) X_b^a(k, \nu), \quad i = 1, 2. \quad (A.2)$$

Непосредственно можно проверить, что уравнению (A.1) удовлетворяет выражение

$$X_b^a(k, \nu) = P \frac{a_1^a(k) \beta_1^b(\nu) + a_2^a(k) \beta_2^b(\nu)}{\nu^2 - k^2} + C_b^a(\nu) \delta(k-\nu). \quad (A.3)$$

с любым  $C_b^a(\nu)$ .  $P$  обозначает главное значение

$$P \frac{1}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+i\epsilon} + \frac{1}{x-i\epsilon} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2}, \quad (A.4)$$

так что  $P \frac{1}{x} = 0$  при  $x=0$ . Подставляя (А.3) в (А.2), получим систему уравнений, связывающую  $C_b^a$  с  $\beta_i^b$ . Ее можно разрешить относительно  $C_b^1(\nu)$  и  $C_b^2(\nu)$ :

$$C_b^1(\nu) = \beta_1^b(\nu) \zeta_1^2(\nu) - \beta_2^b(\nu) \zeta_2^2(\nu); \quad C_b^2(\nu) = -\beta_1^b(\nu) \zeta_1^1(\nu) + \beta_2^b(\nu) \zeta_2^1(\nu). \quad (\text{А.5})$$

Здесь функции  $\zeta_1^a(\nu)$  и  $\zeta_2^a(\nu)$ ,  $a=1, 2$  выражаются через  $\alpha_1^a$  и  $\alpha_2^a$ :

$$\zeta_1^a = \frac{1}{\sigma} \left| \left( 1 + \frac{\pi}{2\nu} \lambda_{11} \right) \alpha_2^a - \frac{\pi}{2\nu} \lambda_{12} \alpha_1^a \right|, \quad \zeta_2^a = \frac{1}{\sigma} \left| -\frac{\pi}{2\nu} \lambda_{12} \alpha_2^a + \left( 1 + \frac{\pi}{2\nu} \lambda_{22} \right) \alpha_1^a \right|, \quad (\text{А.6})$$

$$\lambda_{ij}(\nu) = \frac{2\nu}{\pi} \int_0^\infty dk \sum_a \alpha_i^a(k) \alpha_j^a(k) / (k^2 - \nu^2); \quad \sigma(\nu) = \alpha_1^1(\nu) \alpha_2^2(\nu) - \alpha_1^2(\nu) \alpha_2^1(\nu).$$

Функции  $\beta_1^b(\nu)$  и  $\beta_2^b(\nu)$  определяются условием ортонормировки  $X^T X = 1$  или

$$\int_0^\infty dk \sum_a \alpha_a^b(k, \nu) X_a^{b'}(k, \nu') = \delta(\nu - \nu') \delta_{bb'}. \quad (\text{А.7})$$

С помощью формулы типа (В.2) из приложения В  $V = V^{1/4}$  можно показать, что правая часть (А.7) пропорциональна  $\delta(\nu - \nu')$  при любых  $\beta_1^b$  и  $\beta_2^b$ . Но тот факт, что коэффициент при  $\delta(\nu - \nu')$  должен равняться  $\delta_{bb'}$  при любом  $\nu$

$$\begin{aligned} (C_b^{\rightarrow}(\nu) \vec{C}_{b'}^{\rightarrow}(\nu)) + \frac{\pi}{4\nu} \{ [\beta_1^b(\nu) \vec{a}_1^b(\nu) + \beta_2^b(\nu) \vec{a}_2^b(\nu)] [\beta_1^{b'}(\nu) \vec{a}_1^{b'}(\nu) + \\ + \beta_2^{b'}(\nu) \vec{a}_2^{b'}(\nu)] \} = \delta_{bb'} \end{aligned} \quad (\text{А.7'})$$

означает нелинейную систему уравнений для  $\beta$ , поскольку  $C$  можно выразить через  $\beta$ , см. (A.5). В (A.7') употреблено обозначение вида  $(\vec{C}_b(\nu) \vec{C}_{b'}(\nu)) = \sum_{a=1,2} C_b^a(\nu) C_{b'}^a(\nu)$ . Подставим (A.5) в (A.7') и запишем результат в виде

$$([\beta_1^b \vec{A}_1 + \beta_2^b \vec{A}_2][\beta_1^{b'} \vec{A}_1 + \beta_2^{b'} \vec{A}_2]) = \delta_{bb'} \quad (\text{A.7''})$$

с помощью "векторов"

$$\vec{A}_1(\nu) = \begin{pmatrix} \vec{\zeta}_1(\nu) \\ \pi a_1(\nu)/2\nu \end{pmatrix} ; \quad \vec{A}_2(\nu) = \begin{pmatrix} -\vec{\zeta}_2(\nu) \\ \pi a_2(\nu)/2\nu \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

удвоенной размерности по сравнению с векторами  $\vec{a}_1 = \{a_1^1, a_1^2\}$  и  $\vec{\zeta}_1 = \{\zeta_1^1, \zeta_1^2\}$ , так что  $\vec{A}_1^2 = (\vec{A}_1 \vec{A}_1) = (\vec{\zeta}_1 \vec{\zeta}_1) + (\frac{\pi}{2\nu})^2 (\vec{a}_1 \vec{a}_1)$ .

Замечаем, что (A.7'') означает, что векторы  $\vec{L}_b = \beta_1^b \vec{A}_1 + \beta_2^b \vec{A}_2$ , построенные из  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  с помощью неизвестных еще коэффициентов  $\beta_1^b$  и  $\beta_2^b$ , должны быть ортонормированы:  $(\vec{L}_b, \vec{L}_{b'}) = \delta_{bb'}$ . Из двух векторов  $\vec{A}_1$  и  $\vec{A}_2$  можно построить только два ортогональных вектора, поэтому  $b$  может принимать только два значения:  $b = 1, 2$ .

Допустим, что мы нашли такие две пары  $\beta_1^b, \beta_2^b$ ,  $b = 1, 2$ , что  $\vec{L}_1^2 = \vec{L}_2^2 = 1$  и  $(\vec{L}_1, \vec{L}_2) = 0$ . Эти равенства не изменятся, если  $\vec{L}_1$  и  $\vec{L}_2$  повернуть на любой угол  $\psi$  в их плоскости или отразить. Но повернутым  $\vec{L}$  соответствуют другие  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \vec{L}'_1 &= \vec{L}_1 \cos \psi - \vec{L}_2 \sin \psi = \vec{A}_1 (\beta_1^1 \cos \psi - \beta_1^2 \sin \psi) + \vec{A}_2 (\beta_2^1 \cos \psi - \beta_2^2 \sin \psi) = \\ &= \vec{A}_1 (\beta_1^1)' + \vec{A}_2 (\beta_2^1)', \end{aligned}$$

$$\vec{L}'_2 = \vec{L}'_1 \sin \psi + \vec{L}'_2 \cos \psi = \vec{\Lambda}'_1 (\beta_1^1 \sin \psi + \beta_1^2 \cos \psi) + \vec{\Lambda}'_2 (\beta_2^1 \sin \psi + \beta_2^2 \cos \psi) = \vec{\Lambda}'_1 (\beta_1^2)' + \vec{\Lambda}'_2 (\beta_2^2)'.$$

Однако величины  $\sum_b \beta_1^b \beta_1^b$ ,  $\sum_b \beta_2^b \beta_2^b$  и  $\sum_b \beta_1^b \beta_2^b$  не зависят от этой неоднозначности (т.е. не зависят от  $\psi$ ). Приведем одно из возможных решений для  $\beta$ :

$$\begin{pmatrix} \beta_1^1 \\ \beta_1^2 \end{pmatrix} = \frac{4 \sqrt{\Lambda_2^2}}{\sqrt{4\Lambda_1^2}} \left[ \sqrt{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2} \pm (\vec{\Lambda}_1 \vec{\Lambda}_2) \right]^{-1/2}. \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{pmatrix} \beta_2^1 \\ -\beta_2^2 \end{pmatrix} = 4 \sqrt{\frac{\Lambda_1^2}{\Lambda_2^2}} \left[ \sqrt{\Lambda_1^2 \Lambda_2^2} \pm (\vec{\Lambda}_1 \vec{\Lambda}_2) \right]^{-1/2}.$$

Если верхний индекс  $b$  у  $\beta$  равен 1, то берется верхний знак +, для  $b=2$  берется -. Формулы (A.3), (A.9), (A.8) и (A.5) теперь полностью определяют  $X_b^a(k, \nu)$  для  $0 < \nu < \infty$ .

Отрицательные значения  $\nu$  не входят в спектр  $\nu$  потому, что соответствующие столбцы  $X$  оказываются неортогональными к полученным и, следовательно, линейно зависят от них (ср. приложение А в <sup>/4/</sup>). Доказательство полноты  $XX^T = 1$  мы не приводим.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Диагонализация гамильтониана

Приведение одинаковых  $\tilde{q}$ - или  $\tilde{p}$ -форм в (37) к интегралу квадратов ортогональным преобразованием  $O$  осуществляется по схеме

приложения А. Уравнение  $F\mathbf{0} = \mathbf{0}D$  может быть изображено так

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \nu_1 & \mathbf{E} & \vec{\mathbf{E}}_1^{b'}(\nu') \longrightarrow & \\ \mathbf{E} & \nu_2 & \vec{\mathbf{E}}_2^{b'}(\nu') \longrightarrow & \\ \hline \vec{\mathbf{E}}_1^b(\nu) & \vec{\mathbf{E}}_2^b(\nu) & \nu\delta(\nu-\nu')\delta_{bb'} & \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0}_1^c(\omega) \\ \mathbf{0}_2^c(\omega) \\ \mathbf{0}_b^c(\nu', \omega) \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \mathbf{0}_1^c(\omega) \\ \mathbf{0}_2^c(\omega) \\ \mathbf{0}_b^c(\nu, \omega) \end{pmatrix} \quad (\text{Б.1})$$

Элементы двух строк  $\vec{\mathbf{E}}_1^{b'}(\nu')$  и  $\vec{\mathbf{E}}_2^{b'}(\nu')$  в правом верхнем углу матрицы формы  $F$  нумеруются непрерывным индексом  $\nu'$  так же, как элементы двух столбцов  $\vec{\mathbf{E}}_1^b(\nu)$  и  $\vec{\mathbf{E}}_2^b(\nu)$  в левом нижнем углу индексом  $\nu$ ;  $0 < \nu, \nu' < \infty$ . Кроме того,  $b, b' = 1, 2$ . Столбцы  $\mathbf{0}$  занумерованы не только значениями  $\omega$  диагональных элементов  $D$ , но и индексом вырождения  $c$  (аналогичным индексу  $b$  в приложении А). "Матричное" уравнение (Б.1) сводится к следующей системе:

$$\begin{aligned} (\nu_1 - \omega)\mathbf{0}_1^c(\omega) + \mathbf{E}\mathbf{0}_2^c(\omega) + (\vec{\mathbf{E}}_1^{\rightarrow})\vec{\mathbf{0}}^c(\omega) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E}\mathbf{0}_1^c(\omega) + (\nu_2 - \omega)\mathbf{0}_2^c(\omega) + (\vec{\mathbf{E}}_2^{\rightarrow})\vec{\mathbf{0}}^c(\omega) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}_1^c(\omega)\vec{\mathbf{E}}_1^b(\nu) + \mathbf{0}_2^c(\omega)\vec{\mathbf{E}}_2^b(\nu) &= (\omega - \nu)\mathbf{0}_b^c(\nu, \omega), \\ 0 < \nu < \infty, \quad b &= 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Употреблено сокращенное обозначение вида (15).

Можно показать, что отрицательным  $\omega$  соответствуют только нулевые столбцы  $\mathbf{O}$ , если обрезание  $g(\mathbf{k})$  достаточно эффективно. При  $\omega > 0$  последнее уравнение в (Б.2) удовлетворяется выражением

$$\mathbf{O}_b^c(\nu, \omega) = P \frac{\tilde{\mathbf{E}}_1^b(\nu) \mathbf{O}_1^c(\omega) + \tilde{\mathbf{E}}_2^b(\nu) \mathbf{O}_2^c(\omega)}{\omega - \nu} + \mathbf{V}_c^b(\omega) \cdot \delta(\omega - \nu) \quad (\text{Б.3})$$

при любом  $\mathbf{V}_c^b(\omega)$ . Подставляя (Б.3) в первые два уравнения (Б.2), получаем связь между  $\mathbf{O}_1^c(\omega)$ ,  $\mathbf{O}_2^c(\omega)$  и  $\mathbf{V}_c^1(\omega)$ ,  $\mathbf{V}_c^2(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_1^1(\omega) \mathbf{V}_c^1(\omega) + \tilde{\mathbf{E}}_1^2(\omega) \mathbf{V}_c^2(\omega) &= [\omega - \nu_1 + \mu_{11}] \mathbf{O}_1^c(\omega) + (\mu_{12} - \mathbf{E}) \mathbf{O}_2^c(\omega), \\ \tilde{\mathbf{E}}_2^1(\omega) \mathbf{V}_c^1(\omega) + \tilde{\mathbf{E}}_2^2(\omega) \mathbf{V}_c^2(\omega) &= (\mu_{12} - \mathbf{E}) \mathbf{O}_1^c(\omega) + [\omega - \nu_2 + \mu_{22}] \mathbf{O}_2^c(\omega), \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

$$\mu_{ij}(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\pi(\tilde{\mathbf{E}}_i(\nu) \tilde{\mathbf{E}}_j(\nu))}{\nu - \omega} d\nu, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{Б.5})$$

Из условия ортонормировки

$$\mathbf{O}_1^c(\omega) \mathbf{O}_1^{c'}(\omega') + \mathbf{O}_2^c(\omega) \mathbf{O}_2^{c'}(\omega') + \int_0^\infty d\nu \sum_{b=1,2} \mathbf{O}_b^c(\nu, \omega) \mathbf{O}_b^{c'}(\nu, \omega') = \delta(\omega - \omega') \delta_{cc'} \quad (\text{Б.6})$$

получаем уравнение

$$(\vec{\mathbf{V}}_c(\omega) \vec{\mathbf{V}}_c'(\omega)) + \pi^2 ([\tilde{\mathbf{E}}_1^c(\omega) \mathbf{O}_1^c(\omega) + \tilde{\mathbf{E}}_2^c(\omega) \mathbf{O}_2^c(\omega)] [\tilde{\mathbf{E}}_1^{c'}(\omega) \mathbf{O}_1^{c'}(\omega) + \tilde{\mathbf{E}}_2^{c'}(\omega) \mathbf{O}_2^{c'}(\omega)]) = \delta_{cc'} \quad (\text{Б.7})$$



Можно воспользоваться (Б.4) для выражения  $V_c^1$ ,  $V_c^2$  через  $\mathbf{0}_1^c$  и  $\mathbf{0}_2^c$ . Эти выражения имеют вид (А.5), но с другими  $\zeta$ . Вставляя их в (Б.7), получим нелинейные уравнения для  $\mathbf{0}_1^c$  и  $\mathbf{0}_2^c$  того же вида, что и (А.7''), но теперь

$$\vec{\Lambda}_1(\omega) = \begin{pmatrix} \vec{\zeta}_1(\omega) \\ \pi \vec{\tilde{E}}_1(\omega) \end{pmatrix} ; \quad \vec{\Lambda}_2(\omega) = \begin{pmatrix} -\vec{\zeta}_2(\omega) \\ \pi \vec{\tilde{E}}_2(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{Б.8})$$

$$\zeta_1^b = \frac{1}{\sigma} [(\omega - \nu_1 + \mu_{11}) \vec{\tilde{E}}_2^b(\omega) - (\mu_{12} - E) \vec{\tilde{E}}_1^b(\omega)],$$

$$\zeta_2^b = \frac{1}{\sigma} [-(\mu_{12} - E) \vec{\tilde{E}}_2^b(\omega) + (\omega - \nu_2 + \mu_{22}) \vec{\tilde{E}}_1^b(\omega)], \quad (\text{Б.9})$$

$$\sigma(\omega) = \vec{\tilde{E}}_1^1(\omega) \vec{\tilde{E}}_2^2(\omega) - \vec{\tilde{E}}_1^2(\omega) \vec{\tilde{E}}_2^1(\omega);$$

$$\sigma^2(\omega) = \vec{\tilde{E}}_1^2(\omega) \vec{\tilde{E}}_2^2(\omega) - (\vec{\tilde{E}}_1(\omega), \vec{\tilde{E}}_2(\omega)).$$

Пусть  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ . Тогда  $(\vec{E}_1(\nu) \vec{E}_2(\nu)) = 0$ , см. (33). Поэтому в силу (38) имеем

$$\vec{\tilde{E}}_1^2(\omega) = \vec{\tilde{E}}_2^2(\omega) = \frac{1}{2} [\vec{E}_1^2(\omega) + \vec{E}_2^2(\omega)], \quad (\vec{E}_1(\omega) \vec{E}_2(\omega)) = \frac{1}{2} [\vec{E}_1^2(\omega) - \vec{E}_2^2(\omega)] \quad (\text{Б.10})$$

$$\mu_{11} = \mu_{22} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}; \quad \mu_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}; \quad \mu_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathbf{P} \int_0^\infty d\nu \frac{\pi E_i^2(\nu)}{\nu - \omega}, \quad i = 1, 2.$$

Далее устанавливаем, что  $\vec{\zeta}_1^2 = \vec{\zeta}_2^2$ , а поэтому и  $\vec{\Lambda}_1^2 = \vec{\Lambda}_2^2$ . Ввиду этого

$$2[\sqrt{\vec{\Lambda}_1^2 \vec{\Lambda}_2^2} \pm (\vec{\Lambda}_1, \vec{\Lambda}_2)] = (\vec{\Lambda}_1 \pm \vec{\Lambda}_2)^2 \text{ и формулы (А.9) приобретают вид}$$

$$\begin{aligned}
O_1^1 = O_2^1 &= \frac{1}{\sqrt{(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\vec{E}_1^2}{(\omega - \omega_1 + \mu_1)^2 + \pi^2 \vec{E}_1^4} \right]^{1/2}; \\
O_1^2 = -O_2^2 &= \frac{1}{\sqrt{(\vec{A}_1 - \vec{A}_2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{\vec{E}_2^2}{(\omega - \omega_2 + \mu_2)^2 + \pi^2 \vec{E}_2^4} \right]^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{B.11}$$

### Л и т е р а т у р а

1. S.Kikuchi. Zs. f. Phys., 66, 558 (1930).
2. E.Fermi. Rev Mod. Phys., 4, 87 (1932).
3. М.И.Широков. ЯФ, 4, 1077 (1966); Препринт ОИЯИ Р-1719, Дубна 1964.
4. И.А.Еганова, М.И.Широков. ЯФ, 9, 1097 (1969).
5. I.A.Jeganova M.I. Shirokov. Annalen der Physik 21, 225(1968).
6. P.K.Kabir. The CP Puzzle. Academic Press, New York, 1968.
7. М.И.Широков, Препринт ОИЯИ Р2-4410, Дубна 1969.
8. Л.Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. "Мир", Москва 1969 § 9.5.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 августа 1969 года.

### Примечание при корректуре

Недавно Б. Ферретти в результате совокупного рассмотрения нескольких специально подобранных первых диаграмм теории возмущений пришел к причинному результату:  $w(t)=0$  при  $t < R/c$  (см. сборник "Old and New Problems in Elementary Particles, New York, 1968, с.108). Сделаем два замечания по поводу этой работы. (1) В варианте Ферретти в качестве "атомов" фигурируют два бесконечных плоских слоя. Этот вариант не может рассматриваться даже как мысленный опыт по измерению скорости сигнала, поскольку установление факта возбуждения такого "атома" требует бесконечного времени. (2) Используется обычный формализм с "голыми" состояниями. Второй "атом" может возбуждаться даже если первый вообще отсутствует. Это явление Ферретти компенсирует вычитанием "фона". Однако, его определение "фона" не отбрасывает те случаи, когда второй "атом" возбудился, а первый не потерял возбуждения.

В нашей работе, во-первых, основной вклад в  $v(t)$  вычислен точно. Во-вторых, использование "физических" операторов вообще снимает проблему "фона" (см. Введение).