СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 -4631

В.Л.Любошиц

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

О РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ С НЕОРТОГОНАЛЬНЫМИ ВНУТРЕННИМИ СОСТОЯНИЯМИ

1969

P2 -4631

В.Л.Любошиц

О РАССЕЯНИИ ЧАСТИЦ С НЕОРТОГОНАЛЬНЫМИ ВНУТРЕННИМИ СОСТОЯНИЯМИ

1. В настоящей работе рассматриваются с единой точки зрения некоторые характерные особенности рассеяния для двух произвольных суперпозиций одних и тех же состояний или частиц, т.е. суперпозиций типа $\alpha / A> + \beta / B>$ и $\gamma / A> + \delta / B>$. Сходная задача фактически уже была решена при изучении рассеяния двух тождественных частиц с отличным от нуля спином/1/. Мы бы хотели обратить внимание на то, что при анализе рассеяния природа суперпозиций не играет особой роли. Роль базисных состояний A,B,... и т.д. могут играть состояния одной и той же частицы с разными проекциями спина на выделенную ось, или разные энергетические состояния атомов и молекул, или, наконец, разные частицы, как это имеет место в случае нейтральных K -мезонов.

В дальнейшем для нас будет существенно, что две произвольные суперпозиции одних и тех же состояний, вообще говоря, неортогональны друг другу (подобно тому, как неортогональны друг другу состояния частицы со спином $\frac{1}{2}$ с проекцией $+\frac{1}{2}$ на ось X и с проекцией $+\frac{1}{2}$ на ось Z). Стационарные суперпозиции могут быть неортогональны друг другу, очевидно, только при наличии вырождения базисных состояний $|A>, |B>$. Что касается неоротогональности нестационарных суперпозиций (условия их образования будут рассмотрены ниже), то здесь, в принципе, нет никаких ограничений, и она может быть произвольной. Как показано в работе/2/, неортогональными являются также два нестабильных состояния с определенными энергиями и временами жизни, если все сохраняющиеся квантовые числа этих состояний одинаковы. В дальнейшем мы увидим, что чем меньше отличие степени неортогональности от единицы, тем больше сходство между поведением двух суперпозиций одних и тех же состояний и поведением тождественных частиц (см. в связи с этим[3,4]).

2. Рассмотрим сначала случай двух базисных состояний. Будем считать, что взаимодействие между двумя состояниями A, двумя состояниями B и состояниями A и B одно и то же, а амплитуды переходов $AA \to BB$, $AA \to AB$, $BB \to AB$ равны нулю. Пусть теперь сталкиваются и рассеиваются два пакета с импульсами $\vec{p}$ и $-\vec{p}$, причем первый пакет описывается суперпозицией

$$|C>^{(p)} = \alpha\,|A>^{(p)} + \beta\,|B>^{(p)}, \tag{1}$$

а второй – суперпозицией

$$|D>^{(-p)} = \gamma\,|A>^{(-p)} + \delta\,|B>^{(-p)}. \tag{2}$$

Таким образом, состояние двух частиц до рассеяния имеет вид прямого произведения

$$|\Phi_0> = (\alpha|A>^{(p)} + \beta|B>^{(p)}) \times (\gamma|A>^{(-p)} + \delta|B>^{(-p)}). \tag{3}$$

Из условия нормировки следует, что

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \tag{4}$$

Степень неортогональности состояний $|C>$ и $|D>$, очевидно, равна

$$<C|D> = \alpha^*\gamma + \beta^*\delta. \tag{5}$$

Обозначим амплитуду рассеяния нетождественных частиц, соответствующую данному потенциалу взаимодействия $f(\Theta)$ (Θ – угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$, где $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ – импульс одной из рассматриваемых частиц до и после рассеяния).

Назовем эту амплитуду амплитудой прямого процесса. Известно (см., например,[5]), что амплитуда обменного процесса, в котором либо начальные, либо конечные частицы меняются местами ($\vec{p} \to -\vec{p}$ или $\vec{p}\,' \to -\vec{p}\,'$), удовлетворяет соотношению:

$$f_{\text{обм.}}(\Theta) = \pm f(\pi-\Theta). \qquad (6)$$

При этом знак (+) соответствует частицам с целым спином, знак (–) – частицам с полуцелым спином.

С учётом (6) амплитуда перехода из состояния $|\Phi_0>$ в состояние $|A>^{(p')} \times |A>^{(-p')}$

$$F_1 = \alpha\gamma(f(\Theta) \pm f(\pi-\Theta)). \qquad (7)$$

Для амплитуды перехода из состояния $|\Phi_0>$ в состояние $|B>^{(p')} \times |B>^{(-p')}$ мы получим выражение

$$F_2 = \beta\delta(f(\Theta) \pm f(\pi-\Theta)). \qquad (8)$$

Что касается амплитуды перехода из состояния $|\Phi_0>$ в состояние $|A>^{(p')} \times |B>^{(-p')}$, то, как легко видеть, она равна сумме амплитуд перехода из состояний $|A>^{(p)} \times |B>^{(-p)}$ и $|B>^{(p)} \times |A>^{(-p)}$ с соответствующими коэффициентами. Эти амплитуды отличаются обменом начальных состояний A и B. Поэтому с учётом (5) находим:

$$F_3 = \alpha\delta f(\Theta) \pm \beta\gamma f(\pi-\Theta). \qquad (9)$$

Аналогично амплитуда перехода из состояния $|\Phi_0>$ в состояние $|B>^{(p')} \times |A>^{(-p')}$ равна

$$F_4 = \beta\gamma f(\Theta) \pm \alpha\delta f(\pi-\Theta). \qquad (10)$$

Найдем теперь дифференциальное сечение рассеяния суперпозиций $|C>$ и $|D>$, просуммированное по четырем конечным состояниям (суммарное сечение):

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}=\sum_{i=1}^{4}|F_i|^2=(|f(\Theta)|^2+|f(\pi-\Theta)|^2)(|\alpha\gamma|^2+|\alpha\delta|^2+|\beta\gamma|^2+|\beta\delta|^2)+$$

$$\pm|\alpha\gamma^*+\beta\delta^*|^2\,\mathrm{Re}f(\Theta)f^*(\pi-\Theta). \tag{11}$$

С учётом (4) и (5) мы приходим к простой формуле:

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}=|f(\Theta)|^2+|f(\pi-\Theta)|^2\pm2|<C|D>|^2\,\mathrm{Re}f(\Theta)f^*(\pi-\Theta).$$

При $<C|D>=0$ состояния $|C>$ и $|D>$ ведут себя как различные частицы. Если же суперпозиции $|C>$ и $|D>$ одинаковы $(\alpha=\gamma,\beta=\delta)$, то $<C|D>=1$, и мы получим известную формулу, описывающую рассеяние тождественных частиц. Вектор состояния двух пакетов после рассеяния, нормированный на суммарное сечение (12), имеет вид:

$$|\Phi(\Theta)>=F_1(\Theta)|A>^{(p')}\times|A>^{(-p')}+F_2(\Theta)|B>^{(p')}\times|B>^{(-p')}+$$

$$+F_3(\Theta)|A>^{(p')}\times|B>^{(-p')}+F_4(\Theta)|B>^{(p')}\times|A>^{(-p')} \tag{13}$$

или, с учётом (7-10),

$$|\Phi(\Theta)>=f(\Theta)|C>^{(p')}\times|D>^{(-p')}+f(\pi-\Theta)|D>^{(p')}\times|C>^{(-p')}, \tag{14}$$

где $|C>$ и $|D>$ определяются согласно (1) и (2).

Предположим, что счётчик-фильтр, расположенный в направлении $\vec{p}'$ от области столкновения пакетов, регистрирует некоторую суперпозицию $|L>$, а счётчик-фильтр, расположенный в направлении $(-\vec{p}')$, регистрирует суперпозицию $|M>$, причем, вообще говоря, $<M|L>\neq0$.

Амплитуда регистрации в этом случае, очевидно, равна

$$<L,M|\Phi(\Theta)> = f(\Theta)<L|C><M|D> \pm f(\pi-\Theta)<L|D><M|C>. \tag{15}$$

Пусть теперь состояния $|C>$ и $|M>$ совпадают с первоначальными суперпозициями $|C>$ и $|D>$ соответственно. Тогда

$$<C,D|\Phi(\Theta)> = f(\Theta) \pm f(\pi-\Theta)|<C|D>|^2. \tag{16}$$

Мы видим, что хотя, согласно (14), образованию состояния $|C>^{(p')} \times |D>^{(-p')}$ соответствует величина $f(\Theta)$, амплитуда регистрации этого состояния не совпадает с амплитудой $f(\Theta)$. Это связано с неортогональностью состояний $|C>$ и $|D>$ /2/. В частности, амплитуда "когерентного" рассеяния суперпозиции $|C>$ и $|D>$ на угол 0° (иными словами, амплитуда процесса, в результате которого первоначальное состояние пакетов $|\Phi_0>$ не меняется) равна

$$F(0) = <C,D|\Phi(0)> = f(0) \pm f(\pi)|<C|D>|^2. \tag{17}$$

Заметим, что если мы имеем только один детектор, фиксирующий суперпозицию $|L>^{(p')}$, вероятность регистрации пропорциональна величине:

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= |<L,A|\Phi(\Theta)>|^2 + |<L,B|\Phi(\Theta)>|^2 = \\ &= |f(\Theta)|^2|<L|C>|^2 + |f(\pi-\Theta)|^2|<L|D>|^2 \pm \\ &\pm 2\mathrm{Re}\{f(\Theta)f^*(\pi-\Theta)<L|C><L|D>^*<C|D>\}. \end{aligned} \tag{18}$$

В случае, когда состояния с импульсами $\vec{p}$ и $-\vec{p}$ не являются чистыми, а описываются с помощью матриц плотности ([1] гл. 7, стр. 362–371):

$$\rho^{(p)} = \begin{pmatrix} \overline{a^2} & \overline{a\beta^*} \\ \overline{a^*\beta} & \overline{\beta^2} \end{pmatrix}, \quad \rho^{(-p)} = \begin{pmatrix} \overline{|\gamma|^2} & \overline{\gamma\delta^*} \\ \overline{\gamma^*\delta} & \overline{|\delta|^2} \end{pmatrix},$$

формула (12) обобщается следующим образом:

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = |f(\Theta)|^2 + |f(\pi-\Theta)|^2 \pm 2(\mathrm{Sp}\,\rho^{(p)}\rho^{(-p)})\,\mathrm{Re}\,f(\Theta)f^*(\pi-\Theta). \tag{19}$$

Здесь $\rho^{(p)}\cdot\rho^{(-p)}$ – обычное (не прямое) произведение матриц[x].

3. До сих пор мы считали, что состояния $|C\rangle$ и $|D\rangle$ представляют собой суперпозиции двух состояний (частиц) A и B . Однако с помощью метода, изложенного выше, нетрудно показать, что при принятом предположении о характере взаимодействия соотношения (12)–(13) справедливы для любого числа базисных состояний A, B, E... и т.д. Формулы (12–19) вообще не связаны с какой-либо специальной структурой состояний $|C\rangle$ и $|D\rangle$. В частности, они описывают рассеяние двух нестабильных частиц с одинаковыми сохраняющимися квантовыми числами (см. также работу [3]).

Заметим, что изложенная выше теория описывает, в частности, рассеяние тождественных частиц с отличным от нуля спином в случае, когда потенциал взаимодействия не зависит от спина. При этом роль состояний A, B, C.. и т.д. играют состояния частицы с определенными проекциями спина на выделенную ось. Для неполяризованных частиц со спином s формула (19) дает (ср.[1], стр. 221,[6], § 135):

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = |f(\Theta)|^2 + |f(\pi-\Theta)|^2 + (-1)^{2s}\frac{2}{2s+1}\,\mathrm{Re}\,f(\Theta)f^*(\pi-\Theta). \tag{20}$$

---

[x] При переходе от чистых состояний к смешанным $|\langle C|D\rangle|^2$ заменяется на $\mathrm{Sp}\,\rho^{(p)}\rho^{(-p)}$. Это относится, в частности, и к формуле (17). Величина $\mathrm{Sp}\,\rho^{(p)}\rho^{(-p)}$ представляет собой обобщение меры неортогональности на случай некогерентных смесей. Для чистых состояний $\mathrm{Sp}\,\rho^{(p)}\rho^{(-p)} = |\langle C|D\rangle|^2$.

В случае поляризованных электронов, когда спиновые матрицы плотности имеют вид:

$$\rho^{(p)} = \frac{1}{2}(1+\vec{\sigma}^{(p)}\vec{S}^{(p)}), \quad \rho^{(-p)} = \frac{1}{2}(1+\vec{\sigma}^{(-p)}\vec{S}^{(-p)}) .$$

($\vec{\sigma}$ – векторный оператор Паули, $\vec{S}^{(p)}$ и $\vec{S}^{(-p)}$ – векторы поляризации электронов в состояниях с импульсами $\vec{p}$ и $-\vec{p}$), дифференциальное сечение рассеяния, просуммированное по спинам, согласно (19), равно

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = |f_{\text{кул.}}(\Theta)|^2 + |f_{\text{кул.}}(\pi-\Theta)|^2 - \tag{21}$$

$$-(1+\vec{S}^{(p)}\vec{S}^{(-p)})\,\mathrm{Re}\, f(\Theta)\, f^*(\pi-\Theta).$$

Для суперпозиций (и смешанных состояний) любой природы удобно ввести понятие обобщенного спина $S = \frac{m-1}{2}$, где m – число базисных состояний. При этом базисным состояниям A, B, C соответствуют определенные проекции спина, принимающие целые и полуцелые значения. Суммарный "спин" S двух суперпозиций определяют по правилу сложения моментов. Отсюда

$$0 \le S \le m-1. \tag{22}$$

В отличие от обычного спина обобщенный "спин", вообще говоря, не связан с какими-либо законами сохранения. Однако, если взаимодействие не зависит от типа частиц или состояний, суммарный "спин" в процессе рассеяния сохраняется.

Найдем теперь матрицу рассеяния $\hat{F}(\Theta)$ в m^2 – мерном пространстве состояний с импульсами $\vec{p}'$ и $\vec{p}$, $(-\vec{p}')$ и $(-\vec{p})$. Амплитуда регистрации какого-либо состояния $|L\rangle^{(p)} \times |M\rangle^{(-p)}$ должна быть равна матричному элементу $\langle L,M|\hat{F}(\Theta)|C,D\rangle$ (см. формулу (15)). По определению

$$|\Phi(\Theta)\rangle = \hat{F}(\Theta)\,|C\rangle^{(p)} \times |D\rangle^{(-p)} . \qquad (23)$$

Сравнивая (23) и (14), мы получим

$$\hat{F}(\Theta) = f(\Theta) I^{(p',p)} \pm f(\pi-\Theta)\,\hat{P}^{(p',p)}_{обм.} . \qquad (24)$$

Здесь $I^{(p',p)}$ – единичный оператор в "спиновом" пространстве

$$(I^{(p',p)}\,|C\rangle^{(p)} \times |D\rangle^{(-p)} = |C\rangle^{(p')} \times |D\rangle^{(-p')},$$

а $\hat{P}_{обм.}$ – обменный оператор, или оператор перестановки "спиновых" состояний. При действии на суперпозиции одних и тех же частиц оператор $P_{обм.}$ меняет их местами:

$$\hat{P}^{(p',p)}_{обм.}|C\rangle^{(p)} \times |D\rangle^{(-p)} = |D\rangle^{(p')} \times |C\rangle^{(-p')};$$
$$\hat{P}^{(p',p)}_{обм.}|D\rangle^{(p)} \times |C\rangle^{(-p)} = |C\rangle^{(p')} \times |D\rangle^{(-p')}. \qquad (25)$$

Подчеркнем, что индексы (p) и (p′) лишь указывают на то, что рассматриваются переходы между состояниями двух пакетов до и после рассеяния. С точки зрения чисто "спиновой" структуры состояния $|C\rangle^{(p)} \times |D\rangle^{(-p)}$ и $|C\rangle^{(p')} \times |D\rangle^{(-p')}$ абсолютно одинаковы. Их можно записать в виде $|C\rangle^{(1)} \times |D\rangle^{(2)}$, где 1 и 2 – номера пакетов.

Ясно, что "спиновая" структура оператора $\hat{P}_{обм.}$ не зависит от индексов p и p′. При этом $\hat{P}^{2}_{обм.} = 1$. Собственными функциями $\hat{P}_{обм.}$ являются состояния, симмеричные и антисимметричные относительно перестановки "спиновых переменных", а собственные значения равны $(-1)^{S+1}$, где S – введенный выше суммарный "спин". Из (25) ясно, что среднее значение оператора $\hat{P}_{обм.}$ равно $|\langle C|D\rangle|^{2}$, а в случае, когда состояния не являются чистыми, $Sp\,\rho^{(p)}\,\rho^{(-p)}$ (см. п.2).

Суммарное дифференциальное сечение рассеяния определяется через элементы матрицы $\hat{F}(\Theta)$ с помощью известного соотношения:

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \mathrm{Sp}\,\hat{F}(\Theta)\,\rho^{(p)} \times \rho^{(-p)}\,\hat{F}^{+}(\Theta). \tag{26}$$

Если подставить в (26) выражение (24), то мы, как легко проверить, получим формулу (19).

Можно показать, что в случае двух базисных состояний оператор $\hat{P}_{\text{обм.}}$ имеет вид:

$$\hat{P}_{\text{обм.}} = \frac{1}{2}\left(I + \sum_{i=1}^{3} \sigma_i^{(1)} \times \sigma_i^{(2)}\right), \tag{27}$$

где σ_i – двухрядные матрицы Паули. В частности, из (24) и (27) следует полезная формула для матрицы рассеяния двух электронов в нерелятивистском приближении:

$$\hat{F}(\Theta) = f_{\text{кул.}}(\Theta)\,I^{(p',p)} - \frac{1}{2} f_{\text{кул.}}(\pi-\Theta)\left(1+\vec{\sigma}^{(p,p')} \times \vec{\sigma}^{(-p,-p')}\right), \tag{28}$$

где σ – векторный оператор Паули, $f_{\text{кул}}(\Theta)$ – кулоновская амплитуда.

Для трех базисных состояний ("спин" единица) обменный оператор имеет вид:

$$\hat{P}_{\text{обм.}} = \left[\left(\sum_{i=1}^{3} \hat{S}_i^{(1)} \times \hat{S}_i^{(2)}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{3} \hat{S}_i^{(1)} \times \hat{S}_i^{(2)}\right) - I\right], \tag{29}$$

где $\hat{S}_i$ – матрицы проекций спина.

4. Найдем теперь полное сечение упругого рассеяния. Для этого проинтегрируем суммарное сечение (12) или (14) по углам. Учтем, что

как и в случае рассеяния тождественных частиц со спином, угол рассеяния следует рассматривать в интервале от 0 до $\pi/2$ (чтобы не учитывать дважды одних и тех же актов рассеяния). Таким образом, полное сечение рассеяния равно

$$\sigma = \frac{1}{2}\int d\Omega\, \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = \sigma_0 \pm a \int f(\Theta) f^*(\pi-\Theta)\, d\Omega. \tag{30}$$

Здесь $\sigma_0 = \int |f(\Theta)|^2 d\Omega$ – полное сечение упругого рассеяния нетождественных частиц, a – действительная величина, равная среднему значению оператора $P_{\text{обм.}}$ ($a = |\langle C \mid D\rangle|^2$ для суперпозиций и $a = \mathrm{Sp}\,\rho^{(p)}\rho^{(-p)}$ в общем случае)x/.

Из соотношения (30), в частности, следует, что в случае резонансного рассеяния тождественных частиц или одинаковых суперпозиций и тех же частиц (когда $a = 1$ и $f(\Theta) = \pm f(\pi-\Theta)$) полное сечение упругого рассеяния в два раза больше полного сечения упругого рассеяния нетождественных частиц при той же энергии столкновения и тех же резонансных параметрах)xx/. Заметим теперь, что согласно условию унитарности для чисто упругого рассеяния (/6/, § 124):

$$\mathrm{Im}\, f(0) = \frac{k}{4\pi}\sigma_0 \qquad \text{(оптическая теорема)}$$

$$\mathrm{Im}\, f(\pi) = \frac{k}{4\pi}\int f(\Theta) f^*(\pi-\Theta)\, d\Omega. \tag{31}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,[\, f(0) \pm a\, f(\pi)\,]. \tag{32}$$

---

x/ Очевидно, $\mathrm{Im}\int f(\Theta) f^*(\pi-\Theta)\, d\Omega = 0$.

xx/ Можно показать, что точно такое же заключение справедливо и в отношении неупругого резонансного рассеяния.

Величина $f(0) \pm \alpha f(\pi)$, как указывалось выше, представляет собой когерентную амплитуду рассеяния вперед $F(0)$ x/. Таким образом, мы приходим к оптической теореме: $\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} F(0)$. Подчеркнем в этой связи, что унитарность несимметризованной S – матрицы автоматически гарантирует справедливость оптической теоремы в случае рассеяния тождественных частиц и неортогональных друг другу суперпозиций одних и тех же частиц.

Равенство (32) имеет фундаментальный характер. При наличии неупругих процессов (на которых мы здесь специально не будем останавливаться) величина σ в соотношении (32) имеет смысл полного сечения упругого рассеяния суперпозиций или некогерентных смесей одних и тех же состояний (частиц).

5. Рассмотрим столкновения нестационарных суперпозиций. Предположим, что мы имеем два генератора, в каждом из которых могут рождаться как частицы A, так и частицы B, причем массы частиц A и B близки, но различны. Если условия генерации таковы, что по состоянию генератора в принципе нельзя определить, какая из частиц $-A$ или $B-$ образовалась, пакет частиц, летящих в каком либоо направлении, представляет собой нестационарную суперпозицию частиц A и B. Генерация суперпозиций вида $|C_0\rangle = \alpha_0|A\rangle + \beta_0|B\rangle$ возможна, если длительность процесса $\Delta t \ll h/\Delta E$, где ΔE – характерная неопределенность энергии. При этом необходимо (см./7/), чтобы частицы A и B обладали одним и тем же электрическим зарядом, барионным зарядом и унивалентностью $(1)^{-2s}$ (s – обычный спин частицы) xx/.

x/ Для поляризованных тождественных частиц со спином 1/2
$$F(0) = f(0) - \frac{1}{2}(1 + \vec{S}^{(p)}\vec{S}^{(-p)}) f(\pi).$$

xx/ Примером может служить образование K^0 – мезонов в реакции $\pi^- p \to \Lambda^0 K^0$; K^0 – мезон, как известно, представляет собой суперпозицию квазистационарных состояний K_L и K_S.

Коэффициенты α_0 и β_0 связаны с амплитудами образования частиц A и B очевидными соотношениями:

$$\alpha_0 = f_A/\sqrt{|f_A|^2+|f_B|^2}\ , \quad \beta_0 = f_B/\sqrt{|f_A|^2+|f_B|^2}. \tag{33}$$

Пусть теперь генератор I образует состояние $|C_0>^{(p)} = \alpha_0|A>^{(p)} + \delta_0|B>^{(p)}$, а генератор 2 - состояние $|D_0>^{(-p)} = \gamma_0|A>^{(-p)} + \delta_0|B>^{(-p)}$ (p и(-p) - средние импульсы двух пакетов). В области рассеяния, находящейся на расстоянии R_1 от первого генератора и на расстоянии R_2 от второго генератора, соответствующие суперпозиции будут иметь вид (1,2), где

$$\alpha = \alpha_0\, e^{i m_A \tau_1}\ , \quad \beta = \beta_0\, e^{i m_B \tau_1}$$

$$\gamma = \gamma_0\, e^{i m_A \tau_2}\ , \quad \delta = \delta_0\, e^{i m_B \tau_2}\ . \tag{34}$$

Здесь $\tau_1 = R_1/v\gamma$, $\tau_2 = \dfrac{R_2}{v\gamma}$ - собственные времена пролета пакетов $|C>^{(p)}$ и $|D>^{(-p)}$ от генераторов до точки встречи, v - групповая скорость, которую при $\Delta m \ll m_A, m_B$ можно считать для обоих пакетов одинаковой, $\gamma = (1-\dfrac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ - лоренцовский фактор (см./4/).

Подставляя в формулу (12) выражения (1) - (2) с учётом (34), мы получим для суммарного дифференциального сечения рассеяния выражение:

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = |f(\Theta)|^2 + |f(\pi-\Theta)|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\, f(\Theta) f^*(\pi-\Theta) \times$$
$$\times \{ |<C_0|D_0>|^2 - 4\,\mathrm{Im}\, \alpha_0 \gamma_0^* \delta_0 \beta_0^* \exp[\tfrac{i}{2}(m_A - m_B)(\tau_1 - \tau_2)] \times \tag{35}$$
$$\times \sin(\frac{m_A - m_B}{2})(\tau_1 - \tau_2) \}.$$

Мы видим, что сечение рассеяния двух нестационарных суперпозиций содержит интерференционный член, зависящий от разности собственных времен τ_1 и τ_2, соответствующих различным расстояниям первого и второго генераторов до точки встречи пакетов[x]. Этот вывод, очевидно, относится не только к дифференциальному, но и к полному сечению рассеяния (см. формулу (32)), если взаимодействие не зависит от "спина".

Пусть теперь оба генератора одинаковы. Тогда

$$\alpha_0 = \gamma_0 \ , \beta_0 = \delta_0$$

и

$$\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} = |f(\Theta) \pm f(\pi-\Theta)|^2 \mp 8\,|\alpha_0|^2\,|\beta_0|^2 \sin^2 \frac{m_A - m_B}{2}(\tau_1 - \tau_2).$$

Мы видим, что если разность масс частиц очень мала, нестационарные состояния, каждое из которых в начальный момент времени имеет вид $|C_0\rangle = \alpha_0 |A\rangle + \beta_0 |B\rangle$, даже при большом значении разности собственных времен ведут себя как тожественные частицы.

6. В заключение кратко остановимся на столкновениях суперпозиций одних и тех же частиц при произвольной зависимости взаимодействия от обобщенного "спина".

Мы можем и в этом случае воспользоваться аналогией с теорией рассеяния одинаковых частиц с обычным спином при нецентральном взаимодействии. Обозначим $\hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p}\,')$ матрицу, описывающую рассеяние в системе ц.м. двух суперпозиций разных частиц с одним и тем же обобщенным спином. Для "спина" 1/2 эти суперпозиции имеют вид $|C\rangle^{(p)} = \alpha|A\rangle^{(p)} + \beta|B\rangle^{(p)}$, $|D\rangle^{(-p)} = \gamma|A\rangle'^{(-p)} + \delta|B\rangle'^{(-p)}$, где A и A', B и B' – нетождественные частицы с одними и теми же проекциями обобщенного "спина" (1/2 и -1/2 соответственно).

---

[x] Если регистрация частиц после рассеяния производится с помощью детекторов - фильтров, фиксирующих не сами стационарные состояния, а их суперпозиции, интерференционные члены являются не только функциями величины $\tau_1 - \tau_2$, но и разности собственных времен τ_1' и τ_2', соответствующих расстояниям от первого и второго детекторов до области рассеяния[4].

Если взаимодействие между суперпозициями C и D' совпадает с взаимодействием суперпозиций одних и тех же частиц C и D в тех же "спиновых" состояниях, матрица $\hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p})$ не должна изменяться при перестановке импульсов и "спинов" частиц до и после рассеяния. Иными словами,

$$\hat{P}_{обм.}\,\hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p})\,\hat{P}_{обм.} = \hat{f}(-\vec{p}\,',-\vec{p}), \tag{37}$$

где $P_{обм.}$ – рассмотренный выше обменный оператор. Матрица рассеяния суперпозиций или некогерентных смесей одних и тех же частиц в этом случае связана с $\hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p})$ соотношением, аналогичным (24) (ср./1/, гл. 7, стр. 320)

$$\hat{F}(\vec{p}\,',\vec{p}) = \hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p}) + \hat{f}(\vec{p}\,',-\vec{p})\,\hat{P}_{обм.} = \tag{38}$$

$$= \hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p}) + \hat{P}_{обм.}\hat{f}(-\vec{p}\,',\vec{p}). \tag{38a}$$

При этом оператор $\hat{f}(\vec{p}\,',\vec{p})$ описывает прямой процесс, а оператор $\hat{P}_{обм.}\hat{f}(-\vec{p}\,',\vec{p})$ – обменный (см. пункт 2). Легко видеть, что в случае сохранения четности операторы $\hat{F}(\vec{p}\,',\vec{p})$ и $\hat{P}_{обм.}$ всегда коммутируют друг с другом. Отсюда ясно, что при этом абсолютно запрещены переходы между состояниями с собственными значениями оператора $\hat{P}_{обм.}$, равными (+1) и (–1). Это означает, что состояния суперпозиций C и D с чётным суммарным "спином" не могут в результате рассеяния переходить в состояния с нечетным суммарным "спином". Именно поэтому при рассеянии, например, протонов на протонах отсутствуют переходы между синглетным и триплетным состояниями (/6/, § 138).

Суммарное сечение рассеяния в общем случае определяется по формуле (26), где $\hat{F}(\Theta)$ заменяется на $\hat{F}(\vec{p}\,',\vec{p})$. При этом оптическая теорема дает

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} [\, \mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\, \hat{f}(\vec{p}',\vec{p})\, \rho^{(p)} \times \rho^{(-p)} \pm$$

$$\pm \mathrm{Im}\,\mathrm{Sp}\, f(\vec{p}',-\vec{p})\, \hat{P}_{\text{обм.}}\, \rho^{(p)} \times \rho^{(-p)} \,]. \tag{39}$$

Заметим, что если рассеиваются одинаковые суперпозиции, оператор $\hat{P}_{\text{обм.}}$ в формуле (38) можно заменить на единицу. При этом, как видно из (38), все амплитуды рассеяния будут симметричными (для бозонов) и антисимметричными (длф фермионов) относительно замены $\vec{p} \to -\vec{p}$ как и в случае тождественных частиц. При сохранении чётности такая же симметрия имеет место и по отношению к перестановке $\vec{p}\,' \to -\vec{p}\,'$.

В отличие от случая, когда взаимодействие не зависит от "спина", сечение рассеяния одинаковых суперпозиций, вообще говоря, зависит от того, какие именно суперпозиции сталкиваются. При столкновении нестационарных суперпозиций сечение рассеяния может зависеть не только от разности собственных времен (ср. с формулой (35)), но и от их суммы.

Автор выражает глубокую благодарность М.И.Подгорецкому за обсуждение и ценные замечания.

Литература

1. *М.Гольдберер и К.Ватсон. Теория столкновений. Издательство "Мир", 1967.*
2. *В.Г.Барышевский, В. Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий, ЖЭТФ, 67, 157, 1969; Препринт ОИЯИ Р2-4086, Дубна, 1968.*
3. *В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий. ЖЭТФ, 57, 175, 1969; Препринт ОИЯИ Р2-4145, 1968.*
4. *В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий. ЖЭТФ, 55, 904, 1968.*
5. *Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. Фейнмановские лекции по физике, т.8. Квантовая механика, гл. 2. Изд. "Мир", 1966.*
6. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, ГИФМЛ, 1963.*

7. *Р.Стриттер, А.Вайтман. РСТ, спин, статистика и все такое. Изд. "Наука", 1966.*

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июля 1969 года.