С 324.2
Ф-198

Теор. и мат. физ., 1970, т. 2 № 1, с. 55-66.

27/VIII-69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4605

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА И МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4605

7915/1 шр.

Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА И МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

§1. Введение

Различные варианты нелинейной классической электродинамики и их особенности обсуждались во многих работах. Исходя из единого взгляда на поля и частицы, Ми[1] предложил нелинейную теорию электромагнитного поля, в которой масса и заряд частицы выражаются через потенциал электростатического поля данной частицы. Трудность теории Ми, связанная с нарушением градиентной инвариантности, была преодолена в работе Борна и Инфельда[2], в которой лагранжиан зависит только от напряженностей электромагнитного поля. Квантовые эффекты рождения и аннигиляции виртуальных электронно-позитронных пар, обусловливающие рассеяние света светом в квантовой электродинамике, также приводят к наличию нелинейного члена в уравнениях электромагнитного поля вне зарядов при отсутствии среды[3]. Нелинейные уравнения волновых полей для частицы с ненулевой массой или со спином также рассматривались в работах Де Бройля и Вижье[4], Гейзенберга[5], Иваненко[6] и др.

Блохинцев[7,8] и Свирский[9] впервые заметили, что в нелинейной классической теории поля скорость распространения фронта волны зависит от величины поля и может отличаться от скорости света в вакууме. Как в гидродинамике и газодинамике здесь фронты волны представляют собой поверхности разрыва производных второго или первого порядка поля (слабый разрыв) в зависимости от того, описывается поле уравнением или системой уравнений второго или первого порядка. Так как эти фронты волны в принципе можно рассматривать как сигналы, то на основе результатов Блохинцева и других/7-9/ мы заключаем, что в релятивистской классической теории поля с нелинейными уравнениями скорость распространения сигнала зависит от величины поля и может превосходить скорость света в вакууме.

Распространение фронта волны, а также возникновение ударных волн в нелинейной электродинамике было изучено Блохинцевым и Орловым/10/. В работах Бойлы/11/ проведены систематические исследования математической структуры нелинейных уравнений распространения волны. Плебанский/12/ предложил спинорный формализм нелинейной электродинамики. Розеном/13/, Заставенко/14/ и др. изучено существование частице-подобных решений некоторых нелинейных уравнений скалярного поля. В работах Пелетминского и др./15,16/ рассмотрены структура особенностей в нелинейной электродинамике и их движений без конкретизации вида лагранжиана. В работе Лутэки и Тоола/17/ показано, что в нелинейной электродинамике при распространении вначале достаточно гладких волн могут возникнуть разрывы. Макенна и Плацман/18/ изучили ряд эффектов нелинейной электродинамики, которые могут быть обнаружены при помощи лазеров. В ряде работ Барбашова и Черникова/19,20/ была решена полностью задача рассеяния двух плоских волн в нелинейной теории Борна-Инфельда. Нарожный/21/ изучил распространение плоских электромагнитных волн во внешнем поле с учётом нелинейных эффектов, обусловливаемых рассеянием фотона фотоном в квантовой электродинамике.

В настоящей работе мы пересмотрим проблему распространения сигнала в нелинейной классической электродинамике. Вместо фронта волны, изученного Блохинцевым и др., мы используем в качестве сигналов малые зависящие от времени возмущения в данном внешнем поле. Такие сигналы вполне можно воспринимать при помощи аппаратуры, основанной на принципе электромагнитной индукции. Мы покажем, что в силу нелинейных эффектов скорость распространения сигналов зависит от напряженностей внешнего поля и может превосходить скорость света в вакууме. Более того, для ряда случаев скорость распространения этих малых возмущений оказывается равной скорости распространения фронта волны, рассмотренного Блохинцевым и др. Ради удобства мы будем называть сверхсветовыми сигналами те сигналы во внешнем поле, скорость которых больше скорости света в вакууме.

Если справедливы обычные формулы преобразований Лоренца, то существование сверхсветовых сигналов неизбежно приводит к внутреннему противоречию теории: порядок (по времени) испускания и приема этих сигналов зависит от системы отсчёта. Эта трудность теории будет преодолена, если предположить, что формулы преобразований Лоренца для пространства-времени содержат напряженности электромагнитного поля, т.е. если ввести зависящую от наличия поля метрику пространства-времени, или предположить, что не могут существовать нелинейные поля с лагранжианом, допускающим сверхсветовые сигналы.

Ради ясности изложения мы рассмотрим сначала в п.2 упрощенный вариант теории – теорию скалярного поля, в которой состояние поля в каждой точке полностью характеризуется 4-вектором напряженности F_μ, являющимся градиентом скалярного потенциала Φ, причём в силу градиентной инвариантности лагранжиан явно зависит только от F_μ и не зависит от Φ. В п.3 изучим настоящий вариант электродинамики, в котором напряженности поля представляют собой антисимметричный тензор второго ранга $F_{\mu\nu}$, образуемый путем дифференцирования 4-потенциала A_μ*. На основе анализа конкретных примеров мы предложим затем в п.4 возможный путь преодоления внутреннего противоречия теории, заключающегося в том, что для сверхсветовых сигналов роль передатчика и приемника зависит от наблюдателей: введем формулы преобразований Лоренца для пространства-времени, содержащие напряженности поля.

В нашей работе векторный индекс μ принимает значения 0,1,2,3. Метрику пространства-времени обозначим через $g^{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu}$: $g^{00}=g_{00}=1$ $g^{ij}=g_{ij}=-\delta_{ij}$. Положим $r_1=x$, $r_2=y$, $r_3=z$, $r=|\vec{r}|$, $x^0=t$, $x^i=r_i$ и, следовательно, $x_0=t$, $x_i=-r_i$. Скорость света в вакууме принимаем за единицу.

§2. Теория скалярного поля с градиентной инвариантностью

Предположим по аналогии с электродинамикой, что теория градиентно-инвариантна. Тогда лагранжиан зависит только от напряженностей поля

$$F_{\mu} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} , \tag{1}$$

причём в силу релятивистской инвариантности последние входят в лагранжиан через квадратичную величину

$$K = -\frac{1}{2} g^{\mu\mu'} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu'}} . \tag{2}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K} g^{\mu\mu'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\mu} \partial x^{\mu'}} - \frac{d^2 \mathfrak{L}}{dK^2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} = 0, \tag{3}$$

а тензор энергии-импульса равен

$$T_{\mu\nu} = \frac{d \mathfrak{L}}{dK} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}} - g_{\mu\nu} \mathfrak{L} . \tag{4}$$

В частности, плотность энергии поля равна

$$\epsilon = T_{00} = -\frac{d\mathfrak{L}}{dK} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \mathfrak{L} . \tag{5}$$

Для любого постоянного поля $(\partial \Phi / \partial t = 0)$

$$\epsilon = -\mathfrak{L}\left(-\frac{1}{2}\vec{F}^{\,2} \right). \tag{6}$$

Решения уравнения поля всегда должны удовлетворять условию $\epsilon \geq 0$.

Отметим прежде всего, что для однородного постоянного поля $F_0 = 0$, $F_1 = \mathrm{const}$, и уравнение (3) автоматически удовлетворяется. Центрально-симметрическое постоянное поле

$$F_0 = 0, \; F_1 = \frac{r_1}{r} F, \quad F = -\frac{d\Phi}{dr} \tag{7}$$

должно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{F^2}\left(1 + \left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}}{dK}\right) F^2\right) dF^2 = -\frac{4}{r}\, dr. \tag{8}$$

Следуя Борну и Инфельду, мы выберем лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \sqrt{1-K} - 1, \tag{9}$$

причём на возможные решения уравнения поля накладываем условие $1-K \geq 0$. Для постоянного поля

$$\mathfrak{L} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}F^2} - 1 \leq 0,$$

и плотность энергии будет неотрицательной. Решая уравнение (8) с лагранжианом (9), мы получим

$$F = \frac{a}{r^2}\left(1 + \frac{a^2}{2r^4}\right)^{-1/2}, \tag{10}$$

где a – некоторая константа. Условие $1+K \geq 0$ выполняется при всех r.

Перейдем теперь к изучению распространения сигнала в данном внешнем поле $\tilde{\tilde{\Phi}}$ с напряженностью $\tilde{\tilde{F}}_\mu$. Это поле должно удовлетворять уравнению (3). При наличии малых возмущений потенциал и напряженность поля будут

$$\Phi = \tilde{\tilde{\Phi}} + \phi , \quad F_\mu = \tilde{\tilde{F}}_\mu + f_\mu , \tag{11}$$

причём f_μ и их производные всегда малы по сравнению с F_μ и их производными. Из уравнений (3) для Φ и $\tilde{\tilde{\Phi}}$ мы получим линейные уравнения для возмущения ϕ в данном внешнем поле $\tilde{\tilde{\Phi}}$ с точностью до члена высшего порядка по f_μ и их производным:

$$0 = \frac{d\mathfrak{L}}{dK} g^{\mu\mu'} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^{\mu'}} - \frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} -$$

$$- \frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - 2 \left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^{\mu'} \partial x^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu'}} + \right.$$

$$+ \frac{d^3\mathfrak{L}}{dK^3} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} g^{\sigma\sigma'} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\sigma} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{\Phi}}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\sigma'}} .$$

Рассмотрим сначала распространение сигнала в однородном постоянном внешнем поле F_μ. Выберем систему координат так, чтобы напряженность $\vec{F}$ была направлена по оси $0x$. Уравнение распространения сигнала имеет вид

$$\left[1 + \left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}}{dK} \right) F^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \tag{13}$$

Если

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}}{dK}\right) F^2 \leq -1, \tag{14}$$

то уравнение (13) представляет собой гиперболическое уравнение распространения волны, причём скорость распространения сигнала по оси x равна

$$v = \left[1 + \left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}}{dK}\right) F^2\right]^{1/2}, \tag{15}$$

а по остальным осям скорость равна 1. Нетрудно проверить, что для поля Борна-Инфельда условие (14) выполняется автоматически, и мы имеем $v = (1 - \frac{1}{2} F^2)^{-1/2}$.

Покажем, что если условие (14) нарушается, т.е. если

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}}{dK}\right) F^2 + 1 = -a^2 < 0, \tag{16}$$

то сигнал передается по оси x почти мгновенно. Для этой цели рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся по оси x. Тогда ϕ зависит только от x и t и удовлетворяет элиптическому уравнению

$$a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \tag{17}$$

Ненулевые компоненты f_0, f_1 напряженности поля также удовлетворяют аналогичному уравнению. Решение задачи Коши имеет вид (см./22/, стр. 592):

$$\phi(x,t) = \frac{at}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x',0)}{(x'-x)^2+a^2t^2}\,dx'. \qquad (18)$$

Отсюда следует, что вариация данных Коши в некоторой точке x' через некоторый промежуток времени $t \neq 0$ может оказать влияние на состояние волны в любой другой точке $x \neq x'$, которая находится сколько угодно далеко от точки x' (по направлению оси x). Иначе говоря, для эллиптического уравнения (17), которое соответствует ультрагиперболическому уравнению в четырехмерном пространстве-времени, скорость сигнала вдоль соответствующего направления не ограничена.

Рассмотрим теперь линейное однородное волновое уравнение второго порядка (12) в его общем виде:

$$A^{\mu\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\mu\,\partial x^\nu} + B^\nu\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} = 0, \quad A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}. \qquad (19)$$

Если это уравнение гиперболично, причем роль выделенной переменной играет время, то скорость распространения сигнала ϕ не может превосходить скорость распространения фронта волны - поверхности разрыва производных второго порядка от ϕ, как это следует из теоремы единственности решения задачи Коши для гиперболических уравнений (см./23/, стр. 654). С другой стороны, разрыв производных от f_μ (слабый разрыв) вполне можно считать сигналом, так как его в принципе можно регистрировать экспериментально. Таким образом, скорость фронта волны для уравнения (19) представляет собой максимальную скорость распространения сигнала в данной точке внешнего поля по данному направлению. Она равна скорости фронта волны, рассмотренного Блохинцевым и др., так как члены с производными второго порядка в уравнениях (3) и (12) обладают одними и теми же коэффициентами, а последние полностью определяют скорость фронта волны.

Мы теперь выразим скорость фронта волны через эти коэффициенты. Пусть фронт волны представляет собой поверхность

$$\xi(x) = 0. \tag{20}$$

Функция ξ должна удовлетворить уравнению

$$A^{\mu\nu} \frac{\partial \xi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{21}$$

Скорость фронта волны определяется следующими формулами (см./24/, стр. 420):

$$\vec{v} = v\vec{n}, \quad \vec{n} = - \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|}; \quad v = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{|\nabla \xi|}. \tag{22}$$

Из уравнений (12), (21) и (22) мы получим уравнение для максимальной скорости распространения сигнала по направлению $\vec{n}$ в некоторой точке внешнего поля:

$$\left(\frac{d\mathcal{L}}{dK} - \frac{d^2\mathcal{L}}{dK^2} F_0^2\right) v^2 + 2\frac{d^2\mathcal{L}}{dK^2} F_0 \vec{F}\vec{n}\, v - \left[\frac{d\mathcal{L}}{dK} + \frac{d^2\mathcal{L}}{dK^2} (\vec{F}\vec{n})^2\right] = 0; \tag{23}$$

Если внешнее поле постоянно, то мы имеем

$$v = \left[1 + \left(\frac{d^2\mathcal{L}}{dK^2} / \frac{d\mathcal{L}}{dK}\right)(\vec{F}\vec{n})^2\right]^{1/2}. \tag{24}$$

Из этой формулы и из выражений (9), (10) следует, что радиальная скорость распространения сферической волны в центральном симметричном поле Борна-Инфельда равна

$$v = \left(1 + \frac{a^2}{2r^4}\right)^{1/2},$$

т.е. она всегда больше 1 и неограниченно возрастает при $r \to 0$.

§3. Нелинейная электродинамика

Перейдем теперь к изучению нелинейных уравнений электромагнитного поля с 4-вектором потенциала A_μ и антисимметричным тензором напряженности $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{5}$$

$F_{\mu\nu}$ автоматически удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \tag{26}$$

Лагранжиан явно зависит от двух инвариантов

$$K = -\frac{1}{4} g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} F_{\mu\mu'} F_{\nu\nu'}, \quad I = -\frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho}, \tag{27}$$

где $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$ – полностью антисимметричный тензор с ненулевой компонентой $\epsilon^{0123} = 1$. Положим

$$\Phi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial I} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{28}$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$g^{\mu\mu'} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x^{\mu'}} = 0, \tag{28}$$

а тензор энергии-импульса равен

$$T_{\mu\nu} = -g^{\sigma\sigma'} \Phi_{\mu\sigma} F_{\nu\sigma'} - g_{\mu\nu} \mathfrak{L}. \tag{30}$$

В трехмерных обозначениях $F_{0i} = E_i$, $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} H_k$, $\Phi_{0i} = D_i$, $\Phi_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$, система уравнений (26) и (29) и соотношение (28) имеют вид

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \tag{31}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \tag{32}$$

$$\vec{D} = M\vec{E} + N\vec{H}, \quad \vec{B} = M\vec{H} - N\vec{E}, \tag{33}$$

где

$$M = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}, \quad N = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial I}. \tag{34}$$

Условие неотрицательности плотности энергии

$$\epsilon = T_{00} = \vec{D}\vec{E} - \mathfrak{L} \geq 0, \tag{35}$$

вообще говоря, может накладывать некоторые ограничения на выбор лагранжиана.

Постоянные однородные поля $\vec{E} = \mathrm{const}$, $\vec{H} = \mathrm{const}$ автоматически удовлетворяют уравнениям (31) и (32). Для центрально-симметричных электростатических полей $(\vec{H} = 0)$ мы имеем уравнение, аналогичное уравнению (8):

$$\frac{1}{E^2}\left[1 + \left(\frac{d^2\mathfrak{L}}{dK^2} \Big/ \frac{d\mathfrak{L}}{dK}\right)E^2\right] dE^2 = -\frac{4}{r}\,dr. \tag{36}$$

В теории Борна-Инфельда

$$\mathfrak{L} = 1 - \sqrt{1 - K - I^2} \qquad (37)$$

и решение уравнения (36) имеет вид:

$$E = \frac{a}{r^2}\left(1 + \frac{a^2}{2r^4}\right)^{-1/2}, \qquad (38)$$

а плотность энергии для любого постоянного электростатического поля равна

$$\epsilon = \left(1 - \frac{1}{2}E^2\right)^{-1/2} - 1 \geq 0. \qquad (39)$$

Рассмотрим теперь распространение малых возмущений, характеризуемых величинами $\vec{e}, \vec{h}, \vec{d}, \vec{b}$, во внешнем поле с векторами напряженности и индукции $\overset{\approx}{\vec{E}}, \overset{\approx}{\vec{H}}, \overset{\approx}{\vec{D}}, \overset{\approx}{\vec{B}}$. Так как уравнения (31) и (32) линейны, то возмущения $\vec{e}, \vec{h}, \vec{d}, \vec{b}$ также удовлетворяют аналогичным уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{h} = 0 \qquad (40)$$

$$\operatorname{rot} \vec{b} = \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{d} = 0. \qquad (41)$$

С точностью до членов высшего порядка малости соотношения между $\vec{e}, \vec{h}$ и $\vec{d}, \vec{b}$ имеют вид

$$\begin{aligned} d_i = [M\delta_{ij} &+ P\overset{\approx}{E}_i\overset{\approx}{E}_j + R\overset{\approx}{H}_i\overset{\approx}{H}_j + Q(\overset{\approx}{E}_i\overset{\approx}{H}_j + \overset{\approx}{H}_i\overset{\approx}{E}_j)) e_j + \\ &+ [N\delta_{ij} + Q(\overset{\approx}{E}_i\overset{\approx}{E}_j - \overset{\approx}{H}_i\overset{\approx}{H}_j) - P\overset{\approx}{E}_i\overset{\approx}{H}_j + R\overset{\approx}{H}_i\overset{\approx}{E}_j) h_j, \end{aligned} \qquad (42)$$

$$b_i = [M\delta_{ij} - P\tilde{H}_i\tilde{H}_j - R\tilde{E}_i\tilde{E}_j + Q(\tilde{H}_i\tilde{E}_j + \tilde{E}_i\tilde{H}_j)]h_j +$$

$$+[-N\delta_{ij} + Q(\tilde{H}_i\tilde{H}_j - \tilde{E}_i\tilde{E}_j) + P\tilde{H}_i\tilde{E}_j - R\tilde{E}_i\tilde{H}_j]e_j, \tag{43}$$

где

$$P = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial K^2}, \quad Q = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial I\,\partial K} \quad R = \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial I^2}. \tag{44}$$

В дальнейшем предположим, что величины P, Q и R стремятся к нулю, если $\vec{E}$ и $\vec{H}$ стремятся к нулю.

Рассмотрим в качестве простого примера распространение сигналов в однородном электростатическом поле $\vec{H} = 0, \vec{E} = \mathrm{const}$. Выбирая ось Ox по направлению вектора $\vec{E}$, мы получим системы уравнений

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_x}{\partial x^2} + \frac{M}{M+PE^2}\left(\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} + \frac{M-RE^2}{M}\left(\frac{\partial^2 e_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2}\right) + \left[\frac{(M-RE^2)(M+PE^2)}{M} - 1\right]\frac{\partial^2 e_x}{\partial x\,\partial y} \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{M-RE^2}{M}\left(\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial z^2}\right) + \left[\frac{(M-RE^2)(M+PE^2)}{M} - 1\right]\frac{\partial^2 e_x}{\partial x\,\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 h_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_x}{\partial x^2} + \frac{M-RE^2}{M}\left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_x}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} + \frac{M}{M+PE^2}\left(\frac{\partial^2 h_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_y}{\partial z^2}\right) + \frac{RE^2}{M+PE^2}\frac{\partial^2 h_x}{\partial x\,\partial y} \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 h_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} + \frac{M}{M+PE^2}\left(\frac{\partial^2 h_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_z}{\partial z^2}\right) + \frac{RE^2}{M+PE^2}\frac{\partial^2 h_x}{\partial x\,\partial z}.$$

Уравнения распространения волн в постоянном однородном магнитном поле получаются из систем (45) и (46) заменой $P \to R$, $R \to P$, $E^2 \to H^2$. Условия гиперболичности этих уравнений заключаются в том, что

$$1+\frac{P}{M}E^2 \geq 0, \quad 1-\frac{R}{M}E^2 \geq 0 \tag{47}$$

и

$$1+\frac{R}{M}H^2 \geq 0, \qquad 1-\frac{P}{M}H^2 \geq 0. \tag{48}$$

Из полученных уравнений следует, что скорость распространения сигналов по направлению оси Oz равна

$$v=\left(1-\frac{R}{M}E^2\right)^{1/2} \quad \text{если} \quad \vec{h}\,//\,Ox,\ \vec{e}\,//\,Oy,$$

$$v=\left(1+\frac{P}{M}E^2\right)^{-1/2} \quad \text{если} \quad \vec{e}\,//\,Ox,\ \vec{h}\,//\,Oy, \tag{49}$$

в электростатическом поле, и

$$v=\left(1-\frac{P}{M}H^2\right)^{1/2} \quad \text{если} \quad \vec{h}\,//\,Ox,\ \vec{e}\,//\,Oy,$$

$$v=\left(1+\frac{R}{M}H^2\right)^{-1/2} \quad \text{если} \quad \vec{e}\,//\,Ox,\ \vec{h}\,//\,Oy \tag{50}$$

в магнитном поле.

В теории Борна-Инфельда величины (49) и (50) в электростатическом поле равны:

$$v=\left(1-2E^2\right)^{1/2} \quad \text{если} \quad \vec{h}\,//\,Ox,\ \vec{e}\,//\,Oy,\ 1-2E^2\geq 0$$

$$v=\left(1-\frac{E^2}{2}\right)^{1/2} \quad \text{если} \quad \vec{e}\,//\,Ox,\ \vec{h}\,//\,Oy, \tag{51}$$

а в постоянном магнитном поле равны:

$$v = \left(1 + \frac{H^2}{2}\right)^{-1/2} \qquad \text{если } \vec{h} // Ox,\ \vec{e} // Oy,$$

$$v = (1+2H^2)^{-1/2} \qquad \text{если } \vec{e} // Ox, \vec{h} // Oy. \tag{52}$$

Заметим, что для однородного электростатического поля Борна-Инфельда имеет место условие $1-\frac{E^2}{2} \geq 0$, так как в противном случае энергия будет комплексной величиной. В первой из формул (51) мы потребовали, чтобы

$$1-2E^2 \geq 0.$$

При достаточно сильном внешнем поле это условие не выполняется и уравнение распространения волн с $\vec{h} // Ox$, $\vec{e} // Oy$ по оси Oz будет эллиптическим уравнением, сигнал может передаваться почти мгновенно.

§4. Метрика пространства-времени

Проанализированные в предыдущих параграфах примеры показали, таким образом, что в рамках релятивистской теории электромагнитного поля с нелинейным лагранжианом могут существовать сигналы, которые распространяются во внешнем поле со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме. Рассмотрим распространение сигнала такого рода между передатчиком и приемником, находящимися во внешнем поле и допустим, как это обычно делается, что справедливы обычные формулы преобразований Лоренца. Так как два события испускания и приема разделяются пространственно-подобным интервалом, то существует система координат, в которой эти два события имеют обратный порядок по времени. Иначе говоря, для сигнала такого рода роль приемника и передатчика зависит от системы отсчёта: при переходе из одной системы к другой передатчик может превратиться в приемник, а приемник – в передатчик, что противоречит здравому смыслу и представляет собой внутреннюю несостоятельность теории. Выход из этой ситуации может заключаться в ограничении выборов возможных нелинейных лагранжианов. Иначе говоря, наряду с общепринятыми принципами лагранжиан в нелинейной теории должен удовлетворять еще одному условию: возможны только те теории с нелинейными лагранжианами, в которых сигналы всегда распространяются со скоростью, меньшей или равной скорости света в вакууме. Существование таких лагранжианов будет изучено в другой статье. Здесь мы рассматриваем другую, более интересную возможность преодоления трудности, связанной с неинвариантностью хронологического порядка событий испускания и приема сверхсветовых сигналов.

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим сначала в рамках скалярной теории уравнение распространения плоской волны в однородном постоянном внешнем поле по направлению, параллельному напряженности $\vec{F}$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{53}$$

где скорость a зависит от напряженности F (см. уравнение (13)) и может превосходить скорость света в вакууме. Допустим, что уравнение $\phi(x,t) = u(x-dt)$ описывает распространение сигнала на расстоянии Δx в промежуток времени $\Delta t > 0$. Мы имеем

$$\Delta x = a\Delta t,$$

а следовательно

$$(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0,$$

если $a > 1$. Это означает, что интервал $\{\Delta t, \Delta x\}$ пространственноподобен, и в подходящем преобразовании Лоренца меняется хронологический порядок событий, связанных между собой этим сигналом. Вместо времени t введем новую переменную $t' = at$ и будем считать ее временем. Так как

$$dt'^2 - dx^2 = a^2 dt^2 - dx^2 = 0,$$

то по отношению к новому времени t' сигнал распространяется со скоростью света, т.е. интервал $\{\Delta t', \Delta x\}$ в новом пространстве-времени изотропен. Допустим, что при переходе к новой системе отсчёта имеют место обычные формулы преобразований Лоренца для dt' и dx, а не для dt и dx. Так как интервал $\{dt', dx\}$ лежит на световом конусе, то dt' сохраняет свой знак в этих преобразованиях. Таким образом, противоречие теории можно избежать, если принять формулы преобразований Лоренца для dt' и dx. Полагая затем в этих формулах $t' = at$, мы получим новые формулы преобразований пространственно-временных координат, содержащие напряженность внешнего поля. Иначе говоря, хронологический порядок рассматриваемых событий не будет меняться при переходе от одной системы отсчёта к другой, если формулы преобразования содержат напряженность поля и инвариантной величиной будет не $dt^2 - dx^2$, а $a^2 dt^2 - dx^2$. Она является частным случаем квадратичной инвариантной величины вида

$$ds^2 = G_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = 0. \tag{54}$$

Это означает, что трудность теории можно преодолеть путем введения метрики пространства-времени, зависящей от напряженностей поля.

Вернемся теперь к изучению нелинейных уравнений поля. Они должны быть уравнениями второго порядка, инвариантными относительно преобразований пространства-времени, при которых форма (54) остается инвариантной. Примером уравнений такого рода является

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-G}\, G^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right] = 0, \tag{55}$$

причём $G^{\mu\nu}$ зависит от $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^\sigma}$.

Из вариационного принципа следует, что уравнение поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial(\sqrt{-G}\, \mathfrak{L})}{\partial\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}\right)} \right] = 0. \tag{56}$$

Оно будет совместимым с уравнением Даламбера (55), если выражения под знаком $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ в этих уравнениях пропорциональны. Нетрудно показать, что коэффициент пропорциональности равен единице. Мы получим, таким образом, соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial(\sqrt{-G}\,\mathfrak{L})}{\partial\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}}\right)} = G^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}}$$

или

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial K} + 1\right) G^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}} = \mathfrak{L} \frac{\partial \ln\sqrt{-G}}{\partial\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}}\right)}, \tag{57}$$

где вместо выражения (2) для инвариантной величины K мы имеем

$$K = -\frac{1}{2} G^{\mu\nu} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}}. \tag{58}$$

Соотношение (57) в принципе позволяет определить метрику $G^{\mu\nu}$ как функцию напряженности поля при заданном лагранжиане.

Решение уравнения (57) будет изучено в другой статье. В качестве иллюстрации рассмотрим здесь случай слабого поля и разложим $\mathfrak{L}$ и $G^{\mu\nu}$ в ряды по $\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\sigma}}$

$$\mathfrak{L} = -K + gK^2 + \dots, \quad G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + f \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\nu}} + \dots$$

Из соотношения (57) следует тогда, что

$$f = 2g.$$

В заключение отметим, что введенная здесь метрика $G^{\mu\nu}$ отличается от метрики, обусловливаемой гравитационным взаимодействием.

Основные идеи настоящей работы были сформулированы во время работы авторов в Объединенном институте ядерных исследований. За ценные советы мы выражаем благодарность проф. Д.И.Блохинцеву. За интерес к работе мы благодарим проф. Та Куанг Быу.

Литература

1. G.Mie, Ann. d. Phys., 37, 511 (1912); 39, 1 (1912); 40, 1 (1913).
2. M.Born, L.Infeld. Proc. Roy.Soc., A144, 425 (1934).
3. W.Heisenberg, Enler. Z.Physik, 98, 714 (1936).
4. L. de Broglie, Non-Linear Wave Mechanics, 1960.
5. W.Heisenberg, Zs. Naturforsch., 9a, 292 (1954).
6. Д.Иваненко, Сборник "Нелинейная квантовая теория поля", И.Л., 1959.
7. Д.И.Блохинцев, ДАН СССР, 82, 553 (1953).
8. D.I.Blokhincev. Nuovo Cimento, Supp., X, 4, №1 629 (1956).
9. М.Свирский, Вестник МГУ, 5, 43, (1951).
10. Д.И.Блохинцев, В.В.Орлов, ЖЭТФ, 25, 513 (1953).
11. G.Boillat, La propagation des Ondes, Gauthier-Villars. Comptes Rendu, 264, 209 (1967); 264, 1113 (1967).
12. J.Plebanski, Non-Linear Electrodynamics, preprint, Mexico, 1966.
13. G.Rosen, J.Math. Phys., 9, 996 (1968); 9,999 (1968); 12, 2400 (1967).
14. Л.Г.Заставенко, Прикладная математика и механика, 29, 430 (1965).
15. Пелетминский С.В., ЖЭТФ, 44, 1023 (1963).
16. С.В.Пелетминский, А.А.Яценко, ЖЭТФ, 45, 1625, (1963).
17. M.Lutzky, J.S.Tool. Phys. Rev., 113, 1649 (1959).
18. J.Makenna, P.M.Platzman. Phys. Rev., 129, 2354 (1963).
19. B.M.Barbashov, N.A.Chernikov. Comm.Math.Phys., 3,313 (1966).
20. Б.М.Барбашов, Н.А.Черников, ЖЭТФ, 51, 657 (1966).
21. Н.Б.Нарожный, ЖЭТФ, 55, 714 (1968).
22. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т.11, ГИТТЛ, 1957.
23. Р.Курант, Уравнение с частными производными, Мир, 1964.
24. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, ГИФМЛ, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел

14 июля 1969 года.