ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4603

Л.Г.Заставенко

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ВЫРОЖДЕНИЕ ВАКУУМА СКАЛЯРНОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ $H' = q \int (\varphi^* \varphi)^2 dx$ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

1969

P2 - 4603

Л.Г.Заставенко

ВЫРОЖДЕНИЕ ВАКУУМА СКАЛЯРНОГО ЗАРЯЖЕННОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ $H' = q \int (\varphi^* \varphi)^2 dx$ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

§1. Введение

В предыдущей работе [1] мы рассмотрели вырождение вакуума для скалярного нейтрального поля с самодействием

$$H' = g \int \phi^4(x)dx.$$

Здесь мы рассмотрим с точки зрения вырождения вакуума скалярное заряженное поле; как и в [1] мы ограничимся случаем одной пространственной степени свободы. Метод рассмотрения, которым мы пользуемся, тот же, что и в [1]; он, по сути дела, является разновидностью теории возмущений.

1.1. Наши результаты состоят в следующем.

а) Как это и утверждается теоремой Голдстоуна [2,3], в рассматриваемом нами варианте квантовой теории поля в случае вырожденного вакуума присутствует частица нулевой массы покоя.

б) Кроме нее имеется также частица ненулевой массы покоя, которая нестабильна относительно распада на четное число безмассовых частиц; соответствующая мнимая добавка к массе покоя M равна

$$\delta M = -4\pi i g / M + \dots$$

в) Обе эти частицы – нейтральные.

г) Невозможность распада частицы ненулевой массы покоя на нечетное число голдстоуновских частиц связана с наличием интеграла движения типа четности /4/; частица ненулевой массы покоя принадлежит собственному значению +1 этого интеграла, частица нулевой массы покоя – собственному значению –1 (см. пункты 2.1 и 3.4).

д) Вакуум вырожден по зарядовой переменной: для каждого целого значения m, $m=0, \pm 1, \dots$ имеется функционал Ω_m, принадлежащий собственному значению m оператора заряда; все функционалы Ω_m принадлежат одному и тому же низшему собственному значению гамильтониана.

е) В литературе встречается утверждение (см., например, /3/, что одночастичное возбужденное состояние с нулевой массой покоя и сколь угодно малым импульсом может быть получено действием оператора заряда на вакуум. Из д) следует, что при нашем определении вакуумных состояний это утверждение неверно.

§2. Основное состояние

Мы, как и ранее, будем рассматривать уравнение Шредингера

$$H\Omega = \lambda\ \Omega \tag{1}$$

для гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\int dk \left[- \frac{\delta^2}{\delta\phi_a(k)\,\delta\phi_a(-k)} + (k^2 + M^2)\,\phi_a(k)\,\phi_a(-k) \right]$$

$$+g\int dk_1 dk_2 dk_3\, dk_4\, \delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$[\phi_1(k_1)\phi_1(k_2)\phi_1(k_3)\phi_1(k_4)+\phi_2(k_1)\phi_2(k_2)\phi_2(k_3)\phi_2(k_4) \tag{2}$$

$$+2\phi_1(k_1)\phi_1(k_2)\phi_2(k_3)\phi_2(k_4)].$$

Интегралы берутся по области

$$-\ell< k <\ell,\quad -\ell< k_i <\ell.$$

Здесь мы перешли от комплексных функций ϕ, ϕ^* к вещественным ϕ_a, $a=1,2$. Для случая вырожденного вакуума, подобно /1/, совершим замену переменных

$$\phi_1(k)=\cos\theta\,[\beta\,\delta(k)+\psi_1(k)]-\sin\theta\,\psi_2(k)$$
$$\phi_2(k)=\sin\theta[\beta\delta(k)+\psi_1(k)]+\cos\theta\psi_2(k), \tag{3}$$

где $\beta>0,\ 0\le\theta<2\pi$. Преобразуем соответственно H

$$H=\frac{1}{2}\int dk\,[-\frac{\delta^2}{\delta\psi_a(k)\,\delta\psi_a(-k)}+(k^2+M^2+12g\beta^2)\quad\psi_1(k)\psi_1(-k)$$

$$+(k^2+M^2+4g\phi\beta^2)\psi_2(k)\psi_2(-k)]+\beta(M^2+4g\beta^2)\psi_1(0) \tag{4}$$

$$+4g\beta\int dk_1 dk_2 dk_3\,\delta(k_1+k_2+k_3)\psi_1(k_1)[\psi_1(k_2)\psi_1(k_3)+\psi_2(k_2)\psi_2(k_3)]$$

$$+g\int dk_1 dk_2 dk_3\, dk_4\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$[\psi_1(k_1)\psi_1(k_2)\psi_1(k_3)\psi_1(k_4)+\psi_2(k_1)\psi_2(k_2)\psi_2(k_3)\psi_2(k_4)$$

$$+2\psi_1(k_1)\psi_1(k_2)\psi_2(k_3)\psi_2(k_4)]$$

и будем искать функционал основного состояния Ω_0 в виде

$$\Omega_0 = e^{-\kappa} ,$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2} [\int a_{20} (k) \psi_1 (k) \psi_1 (-k) dk$$

$$+ \int a_{11} (k) \psi_1 (k) \psi_2 (-k) dk$$

$$+ \int a_{02} (k) \psi_2 (k) \psi_2 (-k) dk$$

$$+ \int dk_1 dk_2 dk_3 \delta (k_1 + k_2 + k_3)$$

$$[c_{30} (k_1, k_2, k_3) \psi_1 (k_1) \psi_1 (k_2) \psi_1 (k_3) \tag{6}$$

$$+ c_{21} (k_1, k_2, k_3) \psi_1 (k_1) \psi_1 (k_2) \psi_2 (k_3)$$

$$+ c_{12} (k_1, k_2, k_3) \psi_1 (k_1) \psi_2 (k_2) \psi_2 (k_3)$$

$$+ c_{03} (k_1, k_2, k_3) \psi_2 (k_1) \psi_2 (k_2) \psi_2 (k_3)]$$

$$+ \ldots]$$

2.1. Гамильтониан (4) содержит лишь четные степени ψ_2, поэтому имеется только три варианта поведения собственного функционала Ω при изменении знака ψ_2.

а) Ω не меняется,

б) Ω меняет знак,

в) Ω переходит в другой собственный функционал Ω', принадлежащий тому же собственному значению; Ω' при изменении знака ψ_2, в свою очередь, переходит в Ω.

2.2. Случай б) – для функционала основного состояния реализоваться не может. В случае а) следует принять

$$a_{11}=c_{21}=c_{03}= \dots = 0. \tag{7}$$

Для определения остающихся коэффициентных функций получаем уравнения

$$0 = \beta\,(M^2+4g\beta^2)+\frac{3}{2}\int c_{30}\,(k,-k,0)\,dk+\frac{1}{2}\int c_{1,2}\,(0;\,k,-k)\,dk$$

$$a^2_{20}(p) = p^2+M^2+12g\,\beta^2+6\int c_{40}\,(k,-k,p,-p)\,dk+\int c_{22}(p,-p;k,-k)\,dk$$

$$a^2_{02}(p) = p^2+M^2+4g\beta^2+6\int c_{04}\,(k,-k,p,-p)\,dk+\int c_{22}\,(k,-k\,;p,-p)\,dk$$

$$c_{30}(p_1,p_2,p_3)\,[a_{20}(p_1)+a_{20}(p_2)+a_{20}(p_3)] = 8g\beta+10\int c_{50}(p_1,p_2,p_3,k,-k)\,dk \tag{8}$$

$$+\int c_{32}(p_1,p_2,p_3\,;k,-k)\,dk$$

$$c_{12}\,(p_1,p_2,p_3)\,[a_{20}(p_1)+a_{02}(p_2)+a_{02}(p_3)] = 8g\beta\,+$$

$$+3\int c_{32}\,(p_1,k,-k\,;p_2,p_3)\,dk+6\int c_{14}\,(p_1;p_2,p_3,k,-k)\,dk$$

. . . .

2.3. При $\beta \to \infty$ находим

$$a_{20}(p) \approx \sqrt{p^2 + 8g\beta^2}$$

$$a_{02}(p) \approx p$$

$$c_{30}(p_1 p_2 p_3) \approx 8g\beta/(a_{20}(p_1) + a_{20}(p_2) + a_{20}(p_3))$$

$$c_{12}(p_1; p_2 p_3) \approx 8g\beta/(a_{20}(p_1) + a_{02}(p_2) + a_{02}(p_3))$$

....

$$M^2 + 16g \ln \ell = -4g\beta^2 + 16g \ln \sqrt{8g\beta^2} + \dots$$

2.4. Определив, таким образом, коэффициентные функции a_{20}, a_{02}, c_{30}, c_{12}, $c_{40}\dots$ и значение параметра β, получаем представление (5), (6) функционала основного состояния $\Omega_0(\phi)$ в окрестности точки

$$\phi_1(k) = \beta \cos\theta\, \delta(k)$$

$$\phi_2(k) = \beta \sin\theta\, \delta(k).$$

Мы утверждаем, что так построенный функционал обладает свойством симметрии

$$\Omega_0(\phi e^{i\alpha}) = \Omega_0(\phi) \tag{9}$$

(Здесь $\phi = \phi_1 + i\phi_2$). Выразим $\phi' = \phi e^{i\alpha}$ через θ, ψ' согласно (3):

$$\psi_1' = \phi_1' \cos\theta + \phi_2' \sin\theta - \beta\,\delta(k),$$

$$\psi_2' = -\phi_1' \sin\theta + \phi_2' \cos\theta \ .$$

Подставив сюда

$$\phi_1' = \phi_1 - \alpha\,\phi_2$$

$$\phi_2' = \phi_2 + \alpha\,\phi_1 ,$$

находим

$$\psi_1' = \psi_1 - \alpha\,\psi_2$$

$$\psi_2' = \psi_2 + \alpha\,[\psi_1 + \beta\delta(k)] .$$

Подставив это в (6), с учетом (7) убеждаемся, что для существования свойства (9) необходимо

$$\frac{1}{2}\ \{ -B\cdot a_{02}(0)\,\psi_2(0)$$

$$+ \int 2a_{20}(k)\,\psi_1(k)\psi_2(-k)\,dk$$

$$- \int 2a_{02}(k)\psi_1(k)\psi_2(-k)\,dk$$

$$-2\beta \int c_{12}(k;-k,0)\,\psi_1(k)\,\psi_2(-k)\,dk\ .$$

$$+ \ldots \} = 0\ .$$

Отсюда следуют многочисленные соотношения между коэффициентными функциями, например,

$$a_{02}(0) = 0$$

$$a_{20}(k) - a_{02}(k) = \beta\ c_{12}(k;-k,0).$$

$$\ldots\ .$$

Найденные в п.2.3 приближенные выражения коэффициентных функций, как легко убедиться, удовлетворяют этим соотношениям.

2.5. В соотношения (3), связывающие переменные $\phi(k)$ и $\psi(k)$, входит неопределенный фактор θ. Зафиксировав его условием

$$\theta = \arg[\phi_1(0) + i\,\phi_2(0)],$$

получим однозначное соответствие между наборами параметров $\phi(k)$ и $\psi(k)$, θ; при этом надо считать $\psi_2(0) = 0$. При таком выборе параметров формула (6) дает представление функционала κ, пригодное не только около некоторой одной точки

$$\phi_1(k) = \beta \cos\theta\,\delta(k)$$

$$\phi_2(k) = \beta \sin\theta\,\delta(k),$$

но и около всей окружности

$$|\phi_1(k) + i\,\phi_2(k)| = \beta\delta(k).$$

2.6. Подобно /1/, п. 2.8, показывается, что функционал $\Omega_0(\phi)$ локализован около некоторой "окружности"

$$\phi(k) = \nu\,\delta(k), \qquad 0 \le \arg\nu < 2\pi.$$

Здесь (при $\beta \to \infty$)

$$|\nu| = \beta + \ldots,$$

так что

$$\int |\Omega_0(\phi)|^2 \prod_{k\neq 0}(d\phi_k d\phi_k^*) \approx \delta(\phi_0\phi_0^* - \nu\nu^*).$$

2.7. Для заряженного поля вырождение основного состояния оказывается бесконечно кратным. Действительно, заменим переменные

$$\phi(0) = r e^{i\theta}$$

$$\phi(k) = \phi'(k) e^{i\theta} \quad , k \neq 0$$

и перейдем в H от интегралов по k к интегральным суммам; тогда "кинетическая энергия" примет вид

$$T = \frac{1}{h}\Big(- \sum_{k\neq 0} \frac{\partial^2}{\partial\phi'(k)\,\partial\phi'^*(k)} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Big).$$

Функционал основного состояния Ω_0 не зависит от угла θ; рассмотрим наряду с Ω_0 функционалы

$$\Omega_m \equiv e^{im\theta}\,\Omega_0 \,, \quad m = \pm 1 \,, \pm 2, \ldots \qquad (11)$$

Очевидно,

$$H\Omega_m = e^{im\theta}\Big(H + \frac{m^2}{hr^2}\Big)\,\Omega_0 .$$

Формула (10) показывает, что $r \approx \nu/h$ (величину $\delta(0)$ следует заменить в дискретном представлении на $1/h$); поэтому

$$\frac{m^2}{hr^2} \approx hm^2/\nu \to 0, \qquad \text{при} \qquad h \to 0.$$

Так что все функционалы Ω_m являются собственными функционалами оператора H и принадлежат одному собственному значению. Функционалы Ω_m , $m = \pm 1, \pm 2, ..$ реализуют возможность в) пункта 2.1.

2.8. Рассмотрим действие на функционалы $\Omega_m(\phi)$ оператора заряда

$$Q \equiv \int dk \, [\phi(k) \frac{\delta}{\delta\phi(k)} - \phi^*(k) \frac{\delta}{\delta\phi^*(k)}].$$

Из (9) следует

$$Q\Omega_0 = 0.$$

Ранее из определения (11) функционалов Ω_m при $m \neq 0$ находим

$$\Omega_m(\phi e^{i\alpha}) = e^{im\alpha} \Omega_m(\phi).$$

Отсюда вытекает

$$Q\Omega_m = m\Omega_m.$$

Итак, наряду с незаряженным состоянием вакуума $\Omega_0(\phi)$ имеются состояния вакуума, несущие любой целый заряд m, $\Omega_m(\phi)$; основное состояние в рассматриваемой модели оказывается вырожденным по величине заряда.

§3. Возбужденные состояния

Функционалы возбужденных состояний будем искать в виде произведения функционала основного состояния Ω_0 на неизвестный функционал U

$$\Omega = U\Omega_0.$$

Для определения U из (1), (2) получаем уравнение

$$\int dk\,[-\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2 U}{\delta\psi_a(k)\,\delta\psi_a(-k)} + \frac{\delta U}{\delta\psi_a(k)}\,\frac{\delta\kappa}{\delta\psi_a(-k)}] = \Lambda\, U. \tag{12}$$

Будем искать семейство решений U :

$$U^p = \Gamma^p_{10}\,\psi_1(p) + \Gamma^p_{01}\,\psi_2(p)$$

$$+ \int dk_1 dk_2\,\delta(k_1+k_2-p)[\Gamma^p_{20}(k_1 k_2)\,\psi_1(k_1)\psi_1(k_2) +$$

$$+ \Gamma^p_{11}(k_1;k_2)\psi_1(k_1)\psi_2(k_2) + \Gamma^p_{02}(k_1 k_2)\psi_2(k_1)\psi_2(k_2)]$$

$$+ \ldots .$$

Уравнение (12) переписывается в виде

$$[\Lambda - a_{20}(p)]\,\Gamma^p_{10} = -3\int \Gamma^p_{30}(k,-k,p)dk - \int \Gamma^p_{1,2}(p;k,-k)dk \tag{12.1}$$

$$[\Lambda - a_{02}(p_1) - a_{02}(p_2)]\,\Gamma^p_{02}(p_1;p_2) = \frac{1}{2}\,\Gamma^p_{10} c_{12}(-p;p_1,p_2) + \ldots \tag{12.2}$$

$$[\Lambda - a_{20}(p_1) - a_{02}(p_2) - a_{02}(p_3)]\,\Gamma^p_{12}(p_1;p_2,p_3) =$$

$$= \Gamma^p_{20}(p_1, p-p_1)\, c_{12}(p_1-p;p_2,p_3)$$

$$+ 2\,\mathrm{simm}(p_2 p_3)\{\Gamma^p_{02}(p_3, p-p_3)\, c_{12}(p_1;p_2,p_3-p)\} \tag{12.3}$$

$$+ \ldots$$

$$[\Lambda - a_{02}(p)]\Gamma^p_{01} = -3\int \Gamma^p_{03}(k,-k,p)dk - \int \Gamma^p_{21}(k,-k;p)dk$$

3.1. В низшем порядке по β^{-1} выписанные уравнения сводятся к

$$[\Lambda - a_{20}(p)]\,\Gamma^{p}_{10} = 0$$

$$[\Lambda - a_{02}(p)]\,\Gamma^{p}_{01} = 0,$$

они дают два различных собственных значения

$$\Lambda^{p}_{1} = a_{20}(p) \approx \sqrt{p^{2} + 8g\beta^{2}}$$

$$\Lambda^{p}_{2} = a_{02}(p) \approx |p|.$$

Одно из них, Λ^{p}_{2}, соответствует частице нулевой массы покоя, в согласии с теоремой Голдстоуна; другое соответствует частице с массой покоя $\sqrt{8g\beta^{2}}$.

3.2. Все функции a_{20}, a_{02}, c_{30}, ..., входящие в уравнения (12) как коэффициенты, вещественны. Несмотря на это, собственное значение Λ^{p}_{1} с учетом поправок более высокого порядка по β^{-1} оказывается комплексным и отвечает нестабильной частице, распадающейся на две и более частиц нулевой массы покоя.

Действительно, из уравнения (12.3) находим (при $\Lambda = \Lambda^{p}_{1}$)

$$\Gamma^{p}_{02}(p_1, p_2) = \Gamma^{p}_{10}\, c_{12}(-p; p_1, p_2) / (\Lambda^{p}_{1} - |p_1| - |p_2| + i\epsilon).$$

Здесь знаменатель обращается в нуль при $|p_1| + |p_2| = \Lambda^{p}_{1}$, $p_1 + p_2 = p$, поэтому при таких значениях p_1, p_2 его следует доопределить; мы делаем это, добавив к знаменателю $i\epsilon$ так, чтобы величина $\Gamma^{p}_{02}(p_1, p_2)$ содержала лишь расходящийся поток частиц нулевой массы покоя.

Этот поток, согласно уравнению (12.1), может дать вклад в Λ^{p}_{1} через посредство Γ^{p}_{30} и Γ^{p}_{12}. Наибольшим оказывается последний вклад:

$$\Lambda^{p}_{1} - a_{20}(p) = \int \frac{[c_{12}(p; k, -k-p)]^{2}\, dk}{k\,[\Lambda^{p}_{1} - |k| - |p+k| + i\epsilon]}.$$

Отсюда для величины $\operatorname{Im} M$, где

$$M = \sqrt{(\Lambda_1^p)^2 - p^2}\,,$$

находим

$$\operatorname{Im} M = -\sqrt{2g}\;\pi i/\beta\,.$$

3.3. Найденное значение $\operatorname{Im} M$ отвечает распаду частицы с массой M на две безмассовые частицы; аналогичным образом можно найти вклады в $\operatorname{Im} M$ от распадов на 4,6 и большее число частиц; эти вклады более имеют высокие порядки по β^{-1}.

3.4. Мы обозначим $U_1^p(\phi)(U_2^p(\phi))$ собственный функционал уравнения (12), принадлежащий собственному значению Λ_1^p (Λ_2^p), четный (нечетный) по ψ_2 (см. пункт 2.1). Применим к функционалам $U_1^p(\phi)$, $U_2^p(\phi)$ рассмотренные пункты 2.4, 2.5. Из него на этот раз следует соотношение

$$U_\lambda^p(e^{i\alpha}\phi) = e^{iq_\lambda \alpha}\,U_\lambda^p(\phi).$$

Таким образом, состояния $U^p_\lambda(\phi)$, $\lambda=1,2$, вообще говоря, могут обладать ненулевыми зарядами q_λ . Однако из вещественности функционала $U_2^p(\phi)$ следует $q_2=0$ и из наличия распада $1\to 2+2'$ следует, очевидно, $q_1 = 0$.

Рассмотренные в пункте 3.2 две частицы, одна с нулевой массой покоя, а другая – с ненулевой и нестабильная оказываются нейтральными.

3.5. В литературе встречается утверждение (см., например, /3/), что одночастичное возбужденное состояние с нулевой массой покоя и (сколь угодно) малым импульсом может быть получено действием оператора заряда на вакуумное состояние. Формулы пункта 2.8 показывают, что при нашем определении вакуумных состояний это утверждение неверно. Оператор заряда переводит любое вакуумное состояние в вакуумное же.

В заключение благодарю академика М.А. Маркова за интерес к работе.

Литература

1. Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-4322.
2. J.Goldstone. Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
3. I.Goldstone, A.Salam, S.Weinberg. Phys. Rev., 127,965(1962).
4. L.Castell, Goldstone Particles in de-Sitter Space. Preprint Max-Planck-Institute fur Physik and Astrophysik, Munich, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июля 1969 года.