

4571

Экз. чит. зала

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.



P2 - 4571

Л. Д. Соловьев, А. В. Щелкачев

АСИМПТОТИКА ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА,
СОДЕРЖАЩИХ ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ,
И КУЛОНОВСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4571

Л.Д.Соловьев, А.В.Щелкачев

**АСИМПТОТИКА ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА,
СОДЕРЖАЩИХ ИНФРАКРАСНЫЕ РАСХОДИМОСТИ,
И КУЛОНОВСКАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ**

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1. В в е д е н и е

В последнее время неоднократно обсуждалась проблема учета электромагнитных поправок к амплитуде пион-нуклонного рассеяния /1-7/. Решение этого вопроса необходимо прежде всего для точной проверки адронных дисперсионных соотношений при высоких энергиях.

Из опыта мы получаем амплитуду T , которая содержит радиационные поправки

$$T = T_0 + e^{i\alpha\delta^N} T_N. \quad (1)$$

Здесь $T_0 = a\sqrt{s}/t$ при малых t и больших s ^{x/}, a — постоянная тонкой структуры, T_N — чисто ядерная амплитуда, получающаяся при выключенных электромагнитных взаимодействиях. Для определения T_N из эксперимента нужно знать фазу δ^N , причем в ряде случаев особенно важно иметь численное значение $\text{Re}\delta^N$.

^{x/} s, t, u — обычные мандельштамовские переменные. Для простоты рассматривается случай рассеяния частиц с одинаковыми зарядами.

Бете /1/ и другие авторы /3,4/ оценивали величину δ^N для больших энергий, пользуясь нерелятивистской квантовой механикой. В релятивистском случае рассматривались лишь те поправки к T_N , которые возникают за счет обмена фотоном между частицами в начальном или конечном состоянии /3,5,7/. В работах /5,7/ при оценке этих поправок учитывались также формфакторы в фотонных вершинах. Во всех упомянутых выше работах δ^N стремится при больших энергиях к постоянной действительной величине, в оценке которой между разными авторами имеются лишь незначительные расхождения. Так как строгое решение задачи определения δ^N в релятивистском случае чрезвычайно сложно, во всех работах, посвященных этой проблеме, были сделаны сильные упрощающие предположения, которые важно проверить хотя бы на примере несложных моделей.

В настоящей работе рассматриваются электромагнитные поправки к отдельным членам ряда теории возмущений, которые описываются простыми фейнмановскими диаграммами. Известно, что исследование таких членов дает возможность судить об аналитических свойствах и асимптотическом поведении амплитуды (см., например, /8,9/). Аналогично предложенная здесь модель дает возможность судить об относительной величине и характере различных радиационных поправок.

В работе развит метод вычисления асимптотики фейнмановских интегралов, содержащих инфракрасные расходимости, являющийся обобщением известных методов исследования фейнмановских диаграмм, описывающих взаимодействие частиц с массой, отличной от нуля.

В рамках данной модели рассматриваются поправки, связанные с обменом фотоном не только между частицами в начальном или конечном состоянии, но и между виртуальными частицами. Исследована роль формфакторов. Выводы собраны в заключении.

2. Описание модели

В релятивистской теории полная амплитуда рассеяния заряженных частиц представляется в виде /2,3/

$$T_{\lambda} = \tilde{T}_0 + \exp \{ F_{\lambda} \} T_N \quad (2)$$

Амплитуда T_N здесь та же, что и в (1). При малых t $i a \delta^N = F_{\lambda} - i a \ln(\lambda^2 / -t)$. $\tilde{T}_0 = \exp \{ i a \ln(\lambda^2 / -t) \} T_0$ соответствует диаграммам, в которых заряженные частицы обмениваются только фотонами. Фотонная масса λ вводится для устранения инфракрасных расходимостей.

В нашей модели чисто ядерная амплитуда описывается диаграммами "а" и "б" (рис. 1). Две различные скалярные частицы массы M взаимодействуют, обмениваясь двумя нейтральными скалярными мезонами, масса которых в целях упрощения вычислений принимается равной $2M$. В принципе, результаты не зависят от выбора масс. Всевозможные радиационные поправки к этим диаграммам вычисляются в частном случае рассеяния вперед.

Подчеркнем, что рассматриваемая модель не эквивалентна теории возмущений. Если бы мы вычисляли T_N согласно теории возмущений, то при больших s должны были бы сохранить только борновский член, вклад от которого равен постоянной величине (вклад диаграмм рис.1а,б пропорционален $\ln s / s$). В результате получилась бы амплитуда, не имеющая разрезов в комплексной плоскости. Кроме того, невозможно было бы оценить вклад от внутренних фотонов.

Из опыта известно, что борновский член не описывает амплитуду при больших s . Поэтому в настоящей работе выбрана простая модель, изучая которую можно получить представление о свойствах диаграмм высших порядков, дающих, возможно, основной вклад в амплитуду при $s \rightarrow \infty$. В частности, результаты, полученные при рассмотрении

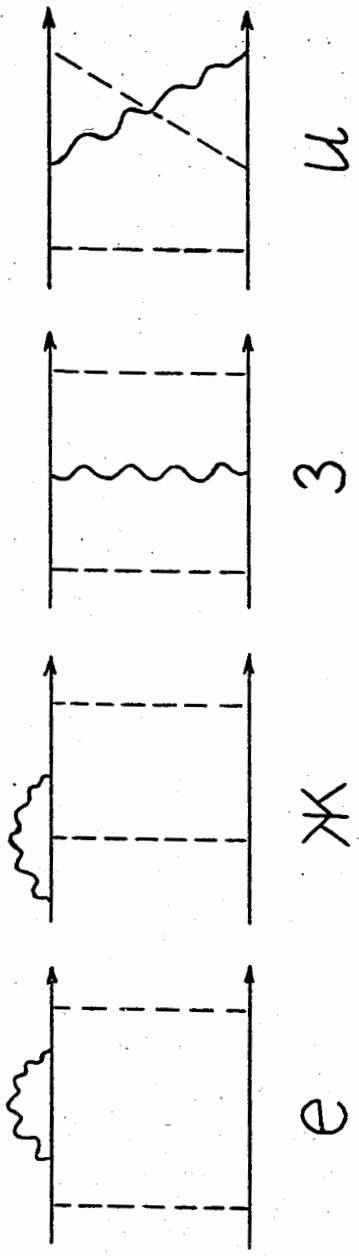
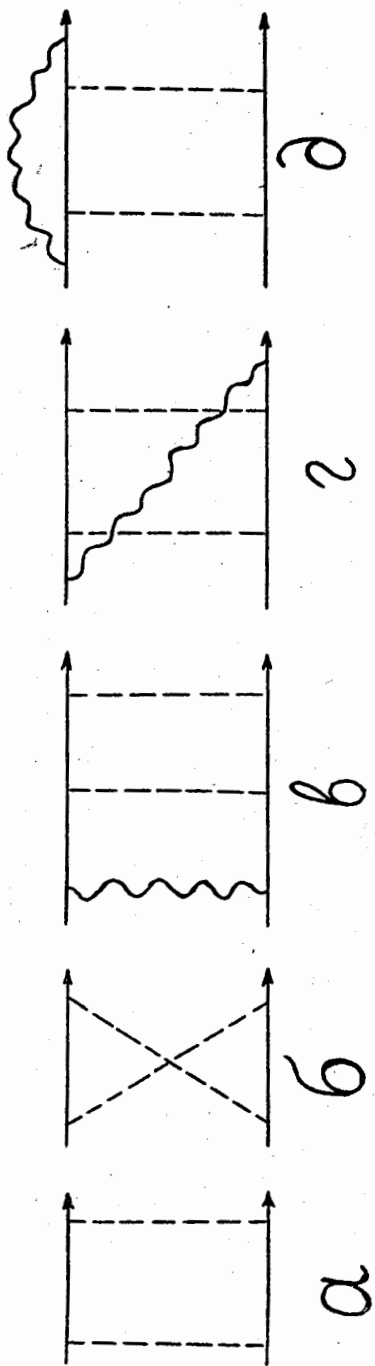


Рис. 1.

настоящей модели, по-видимому, справедливы с незначительными изменениями для более сложных диаграмм лестничного типа сколь угодно высокого порядка (рис.2). Известно /8/, что при суммировании таких диаграмм можно получить для амплитуды реджевскую асимптотику $T \approx s^\alpha$, где $\alpha > 0$, в то время как вклад любой такой диаграммы, взятой в отдельности, пропорционален лишь $(\ln s)^n / s$.

3. Вычисление асимптотики фейнмановских диаграмм, содержащих инфракрасные расходимости

Существуют рецепты, с помощью которых можно, не прибегая к вычислениям, найти асимптотику широкого класса диаграмм, описывающих взаимодействие частиц с массами, отличными от нуля /10/. Асимптотику диаграмм, описывающих электромагнитные взаимодействия, можно исследовать тем же методом, исходя из α -представления фейнмановских интегралов, но рецепты, полученные в названных работах, в этом случае, вообще говоря, применять нельзя.

Вклад любой диаграммы в амплитуду при $t=0$ равен сумме членов вида

$$\int_0^1 \prod_1 da_i \delta(1 - \sum_1 a_i) A(a) [P(a)s - Q(a)M^2 + i\epsilon]^{-n}. \quad (3)$$

A , P и Q - полиномы, зависящие от a . Число параметров a равно числу внутренних линий диаграммы.

Метод нахождения асимптотики выражений типа (3) в том случае, когда они не содержат инфракрасных или ультрафиолетовых расходимостей, описан многими авторами /10/, и мы не будем на нем останавливаться.

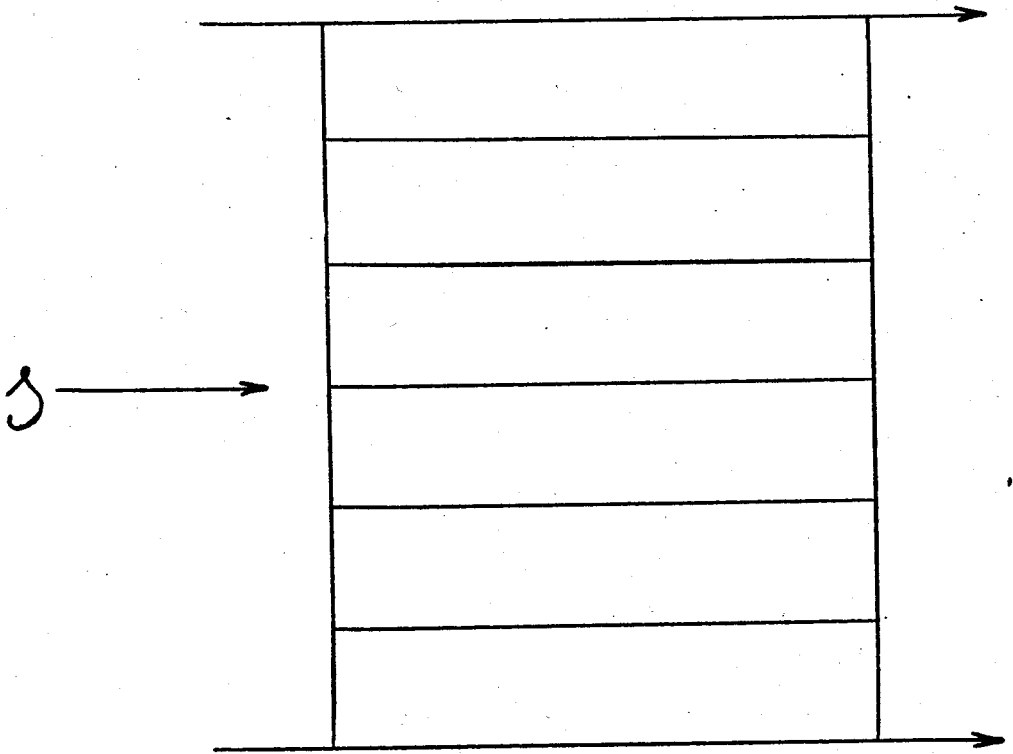


Рис. 2.

Завьялов и Степанов /11/ показали, как нужно обобщить этот метод для диаграмм, содержащих ультрафиолетовые расходимости. Чтобы получить выражение, не содержащее бесконечных констант, приходится вводить дополнительные параметры, число которых равно числу расходящихся интегралов. После этого исследование проводится теми же методами, что и для сходящихся диаграмм.

В нашей модели имеются диаграммы (1в, г, д) и другие, расходящиеся при малых фотонных импульсах k . Если сначала устремить s к бесконечности, найти асимптотику этих диаграмм, пользуясь существующими рецептами, и лишь затем перейти в полученных выражениях к пределу $\lambda \rightarrow 0$, то получится неправильный результат. Рассмотрим, например, диаграмму (1в). Согласно известным формулам /12/ для выделения инфракрасных расходимостей, вклад от этой диаграммы равен

$$\Gamma_B = \Phi_s \Gamma_a + R_B. \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_s &= -ie^2/(2\pi)^4 4pq \int d^4k \{ (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon) (k^2 + 2pk + i\epsilon) (k^2 - 2qk + i\epsilon) \}^{-1} = \\ &= e^2/8\pi^2 \{ -\ln(\lambda^2/M^2) [\ln(s/M^2) - i\pi] + 1/2 \ln^2(s/M^2) - i\pi \ln(s/M^2) - \\ &- 2\pi^2/3 \} + O(1/s), \end{aligned} \quad (5)$$

Γ_a - вклад от диаграммы 1а. При больших s

$$\Gamma_a = \frac{i\pi^2 g^2 f^2}{4s M^2} [-\ln(s/M^2) + 2 + i\pi] + O(1/s^2) \quad (6)^{x/}$$

^{x/} g, f - константы связи заряженных частиц со скалярными мезонами.

R_B конечно при $\lambda \rightarrow 0$. Видно, что при больших s в Γ_B имеется член, пропорциональный $1/s \ln^2(s/M^2) \ln(\lambda^2/M^2)$. Если бы мы применили к диаграмме (1в) общий рецепт, то старший член в асимптотике был бы пропорционален $1/s \ln(s/M^2)$.

Для получения правильного результата нужно сначала выделить инфракрасные расходимости и устремить $\lambda \rightarrow 0$, после чего вычислять асимптотику при $s \rightarrow \infty$. Чтобы получить при этом в a -представлении выражение, не содержащее бесконечностей, нужно, как и в случае диаграмм, содержащих ультрафиолетовые расходимости, ввести дополнительные параметры. Опишем подробнее эту процедуру на примере диаграммы (1в). Имеем с точностью до несущественных при $\lambda \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ членов (рис.3):

$$\begin{aligned}
 R_B = \Gamma_B - \Phi_s \Gamma_a = & -ie^2 g^2 f^2 / 2\pi^4 \int d^4 k \, d^4 r \, 4pq \{ (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon) \times \\
 & \times (k^2 + 2pk + i\epsilon) (k^2 + 2qk + i\epsilon) (r^2 - 2pr + i\epsilon) (r^2 + 2qr + i\epsilon) (r^2 - 4M^2 + i\epsilon) \}^{-1} \times \\
 & \times \{ (r^2 + 2kr + k^2 - 4M^2 + i\epsilon)^{-1} - (r^2 - 4M^2 + i\epsilon)^{-1} \} = e^2 g^2 f^2 s / 8\pi^2 \int d^4 k \{ (k^2 - \\
 & - \lambda^2 + i\epsilon) (k^2 + 2pk + i\epsilon) (k^2 + 2qk + i\epsilon) \}^{-1} \int_0^1 da_1 \int_0^{(1-a_1)} da_2 \int_0^{(1-a_1-a_2)} da_3 \{ [k^2 a_3 (1-a_3) + 2ka_3 (a_1 p - \\
 & - a_2 q) + a_1 a_2 s - M^2 (2-a_1-a_2)^2 + i\epsilon]^{-2} - [a_1 a_2 s - M^2 (2-a_1-a_2)^2 + i\epsilon]^{-2} \}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Подставляя в это выражение тождество

$$(ak^2 + bk + c)^{-n} - c^{-n} = \int_0^1 dx \frac{\partial}{\partial x} \{ (ax^2 k^2 + b x k + c)^{-n} \} \tag{8}$$

и выполняя дифференцирование по x , получим

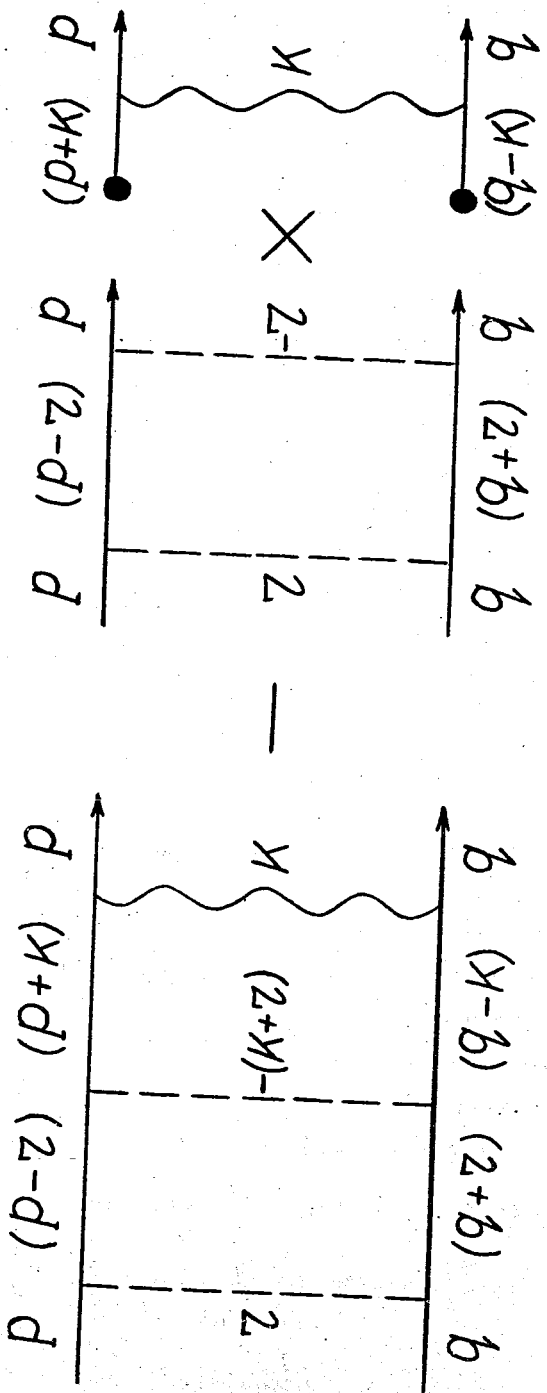


Рис. 3.

$$R_B = - \frac{e^2 g^2 f^2}{2\pi^2} s \int_0^1 dx \int_0^1 da_1 \int_0^{(1-a_1)} da_2 \int_0^{(1-a_1-a_2)} da_3 \int_0^4 dk \left\{ \frac{\alpha_3 [x(1-a_3) - a_1]}{(k^2 + 2pk + i\epsilon)(k^2 - 2qk + i\epsilon)} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_3 \alpha_1}{(k^2 + i\epsilon)(k^2 - 2qk + i\epsilon)} \right\} \times \{ k^2 x^2 \alpha_3 (1 - \alpha_3) + 2kx \alpha_3 (\alpha_1 p - \alpha_2 q) + \alpha_1 \alpha_2 s - M^2 (2 - \alpha_1 - \alpha_2) + i\epsilon \}^{-3} \quad (9)$$

Интегрирование (9) по k приводит к выражениям типа (3) (но с дополнительным параметром x), которые не содержат инфракрасных расходимостей и которые можно исследовать обычным методом.

4. Радиационные поправки к T_N

Все основные диаграммы, описывающие радиационные поправки в нашей модели, приведены на рис. 1. Чтобы не загромождать чертежа, мы не приводим диаграмм, которые (для рассеяния вперед) дают такой же вклад, что и приведенные на рис. 1. Мы не приводим также диаграмм, вклад от которых в амплитуду можно получить, произведя перекрестное преобразование выражения, соответствующего одной из диаграмм рис. 1. Такие диаграммы мы будем называть перекрестно-симметричными. Вклад от диаграмм типа (1в) будем называть s -вкладом, от диаграмм типа (1г) - u -вкладом и от диаграмм типа (1д) - t -вкладом. Остальные фотоны - внутренние.

Рассмотрим сначала в качестве T_N вклад диаграммы рис. 1а. Тогда вклад в F_λ (формула (2)) от s -фотонов равен

$$F_\lambda^{(a,s)} = 2\Gamma_B / \Gamma_a = 2e^2 / \pi^2 \left\{ - \frac{1}{8} \ln(\lambda^2 / M^2) [\ln(s / M^2) - i\pi] - \frac{1}{12} \ln^2(s / M^2) + \frac{i\pi}{6} \ln(s / M^2) + \left(\frac{35}{96} + \frac{\ln 2}{4} \right) \ln(s / M^2) \right\} + \text{const} \quad (10)$$

Отсюда

$$\text{Im } F_{\lambda}^{(a,s)} = a [\ln (\lambda^2/M^2) + \frac{4}{3} \ln(s/M^2)] + \text{const} . \quad (10')$$

Если при вычислении $\text{Im } F_{\lambda}^{(a,s)}$ сделать приближения, использованные в /3,5,7/ для вычисления $\text{Re } \delta^N$, получается

$$\text{Im } F_{\lambda}^{(a,s)} = a [\ln (\lambda^2/M^2) + \text{const}] . \quad (11)$$

Это отличие объясняется тем, что приближение указанных авторов не учитывает разрезов чисто ядерной амплитуды в комплексной s -плоскости.

Суммируя s и u поправки к диаграмме (1а), находим

$$F_{\lambda}^{(a,s,u)} = a \{ i \ln (\lambda^2/M^2) + 2i \ln (s/M^2) + 1/\pi [5/4 - \ln 2 - 1/4 \int_0^1 dy/y \ln(1+3y)] \ln(s/M^2) \} + \text{const} . \quad (12)$$

Учет формфакторов в фотонных вершинах не изменяет главных членов в асимптотике диаграмм (1в) и (1г), так что выражения (10) и (12) остаются без изменений^{x/}. Легче всего производить расчеты в этом случае, преобразовав подинтегральное выражение по формуле

$$\{ (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon) (k^2 - M^2 + i\epsilon) \}^{-1} = -1/M^2 \{ (k^2 - M^2 + i\epsilon)^{-1} - (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)^{-1} \} .$$

Второй член здесь соответствует формфактору. Вклад от него можно легко оценить по общим рецептам и убедиться, что его вклад в фазу пропорционален константе. Для фотонного пропагатора мы можем ис-

^{x/} Авторы работ /5,7/ учитывали формфакторы только в выражении для Φ_s (см. (5)). При учете формфакторов необходимо вводить их в выражения для Φ и R одновременно. При этом главные члены в асимптотике не изменяются.

пользовать градиантно-инвариантное выражение

$$D_{\mu\nu} = -i / (2\pi)^4 (k^2 - \lambda^2 + i\epsilon)^{-1} (g_{\mu\nu} - k_\nu k_\mu / k^2) .$$

Результаты при этом не изменятся.

Диаграмма (1д) дает вклад в F_λ , растущий пропорционально s при $s \rightarrow \infty$. После введения формфакторов вклад этой диаграммы в мнимую часть F_λ пропорционален const . Диаграмма (1ж) без формфактора дает вклад в $\text{Im } F_\lambda$, пропорциональный $\ln s$. После введения формфактора ее вклад пропорционален const . Наконец, вклад от остальных внутренних фотонов (диаграммы 1е,з,и) также равен const . Таким образом, главные члены асимптотики $F_\lambda^{(a)}$ определяются s - и u -поправками и уже выписаны нами в (12).

Точно таким же образом вычисляем радиационные поправки к диаграмме (1б) и убеждаемся, что и в этом случае при учете формфакторов главные члены асимптотики $F_\lambda^{(б)}$ определяются s - и u -фотонами.

$$F_\lambda^{(б)} = \alpha \{ i \ln(\lambda^2 / M^2) + 2i \ln(s / M^2) - 1/\pi [5/4 - \ln 2 - 1/4 \int_0^1 dy/y \ln(1+3y)] \ln(s / M^2) \} + \text{const} . \quad (13)$$

Отметим, что $\text{Im } F_\lambda^{(б)} = \text{Im } F_\lambda^{(a)}$.

Если в качестве чисто ядерной амплитуды взять сумму диаграмм (1а) и (1б), то получим

$$T_N^{(a, б)} = \frac{\pi^3 g^2 f^2}{4 s M^2} + O(1/s^2) \quad (14)$$

$$F_\lambda^{(a, б)} = \sum_m \Gamma_{\text{рад}}^m / T_N^{(a, б)} = i\alpha \{ \ln(\lambda^2 / M^2) - 2/\pi^2 [-5/4 + \ln 2 + 1/4 \int_0^1 dy/y \ln(1+3y)] \ln^2(s/M^2) + C_1 \ln(s/M^2) + C_2 \} = i\alpha \{ \ln(\lambda^2 / M^2) + 0,014 \ln^2(s/M^2) + C_1 \ln(s/M^2) + C_2 \} . \quad (15)$$

Здесь C_1 и C_2 - некоторые комплексные постоянные. Член $0,014 \ln^2(s/M^2)$ возникает при суммировании вкладов s и u -фотонов. Вклад порядка $\ln(s/M^2)$ в мнимую часть дают теперь не только диаграммы $(1\nu)(1\gamma)$, но и $(1z)$, $(1i)$. Вклад суммы остальных диаграмм в мнимую часть F_λ мал, порядка M^2/s , но в действительную часть F_λ они дают вклад, пропорциональный $\ln(s/M^2)$.

З а к л ю ч е н и е

Рассмотрение предложенной в настоящей работе модели показывает неполноту исследований проблемы нахождения δ^N в релятивистском случае. Все авторы цитированных выше работ ^{/3,5,7/} ограничиваются рассмотрением s -поправок. Кроме того, они используют упрощающие предположения, эквивалентные пренебрежению разрезами ядерной амплитуды в комплексной плоскости s . Для данной модели эти предположения неверны. Из разобранных здесь примеров следует, что помимо s -фотонов столь же существенный вклад в $\text{Im } F_\lambda$ могут вносить u -фотоны. В рассмотренных моделях фаза δ^N содержит члены, пропорциональные $\ln s$ и даже $\ln^2 s$. Заметим, что существенный вклад t -фотонов и виртуальных фотонов типа $(1z)$ подавляется лишь введением формфакторов. Суммирование всех радиационных поправок в рамках рассмотренных моделей не ведет к бетевским результатам для фазы δ^N .

Отметим еще важность оценки $\text{Re } F_\lambda$. При определении $\text{Re } T^N$ из эксперимента $\text{Re } F_\lambda$ незначительна (см. ^{/6/}). Однако при проверке дисперсионных соотношений для амплитуды $T^{(-)}$ пренебрежение $\text{Re } F_\lambda$ может привести к заметной ошибке, так как поправки к $T^{(-)}$ могут иметь вид $\text{Re } F_\lambda \times T^{(+)}$ (см. ^{/6/}) $x/$. Точно так же важно знать $\text{Re } F_\lambda$.

$$\frac{x/}{\pi^- p} T^{(\mp)} = \frac{T_{(-)}^{(-)}}{\pi^+ p} \mp \frac{T_{(+)}^{(+)}}{\pi^+ p}, \text{ где нижние знаки относятся соответственно к } \pi^- p \text{ и } \pi^+ p \text{ -рассеянию.}$$

для проверки изотопической инвариантности. В рассмотренных нами моделях величина $\text{Re } F_\lambda$ оказывается порядка $a \ln s$ или даже $a \ln^2 s$.

Строгий учёт всех поправок к T^N , которые могут оказаться существенными, в настоящее время, по-видимому, невозможен. Поэтому следует обратить внимание на проверку дисперсионных соотношений для амплитуды, содержащей конечные электромагнитные поправки /6/.

Л и т е р а т у р а

1. H.A. Bethe. Ann of Phys., 3, 190 (1958).
2. Л.Д. Соловьев. ЖЭТФ 49, 292 (1965).
3. J. Rix and R.M. Thaler. Phys.Rev., 152, 1357 (1966).
4. M.M.Islam. Phys.Rev., 162, 1426 (1967).
5. M.P.Locher. Nucl.Phys., B2, 525 (1967).
6. Л.Д. Соловьев, А.В. Шелкачев. ЯФ 8, 540 (1968).
7. G.B.West and D.H.Yennie. Phys.Rev., 172, 1413 (1968).
8. R.J.Eden, P.V.Landshoff, J.C.Polkinghorne, J.C.Taylor. The Analytic S-matrix, Cambridge, 1966.
9. И.Ф. Гинзбург, А.В. Ефремов, В.Г. Сербо. Препринт ОИЯИ P2-3833, Дубна 1968.
10. А.В. Ефремов. Препринт ОИЯИ P1-242, Дубна 1963; Препринт ОИЯИ P-1305, Дубна 1963.
G.Tiktopoulos. Phys.Rev., 131, 480 (1963).
- О.И. Завьялов. ЖЭТФ 47, 1099 (1964).
11. О.И. Завьялов, А.В. Степанов. ЯФ, 5, 922 (1965).
12. D.R.Yennie, S.C.Frautschi and H.Suura. Ann of Phys., 13, 379 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1969 года.