СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4564

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.В.Полубаринов

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ФЕРМИ-ГУПТЫ И ШВИНГЕРА-БЛЕЙЛЕРА

1969

P2 - 4564

И.В.Полубаринов

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ФЕРМИ-ГУПТЫ И ШВИНГЕРА-БЛЕЙЛЕРА

1. Введение

Два обстоятельства побуждают вновь вернуться к изучению дополнительного условия (ниже д.у.) Ферми-Гупты [1,2] в гайзенберговской картине и д.у. Швингера-Блейлера [3,4] в картине взаимодействия в квантовой электродинамике.

Во-первых, это недостаточная изученность механизма работы этих д.у. в присутствии связанных состояний [5,6]. Кроме того, д.у. Швингера-Блейлера обычно не обсуждается, так как в рамках адиабатической гипотезы считается, что для состояний $\Psi(\pm\infty)$ оно сводится к д.у. Ферми-Гупты. Существование связанных состояний требует уточнения адиабатической гипотезы и асимптотического д.у.

Во-вторых, уяснение работы д.у. в электродинамике важно для распространения формализма Ферми-Гупты на родственные электродинамике теории - квантованные теории Янга-Миллса [7-9] и Эйнштейна [10-15] - с существенно более сложной структурой [12,9].

В пп. 2 и 3 настоящей работы кратко резюмируются известные результаты, причем гильбертово пространство с неопределенной метрикой трактуется с помощью упрощенного формализма Гупты [16] (см. также [17]). Указан ряд важных свойств оператора $\partial_\mu A_\mu(x)$ [17]. Попутно отмечены закон калибровочных преобразований матрицы Фейнмана-Дайсона $S(t,t_0)$ (15) и связь (6) между гайзенберговской картиной и картиной взаимодействия (которые автору в литературе не встречались). Рецепт построения состояний, удовлетворяющих д.у. Ферми-Гупты, представлен в п.3 в несколько более простой форме [17], чем гуптовский [2], обычно излагаемый в учебниках [18-20].

В п.4 обсуждаются матричные элементы $\mathcal{S}$-матрицы между состояниями, удовлетворяющими д.у. Рассмотрена $\mathcal{S}$-матрица как между бесконечными временами (в рамках обычной адиабатической гипотезы), так и между конечными, когда эта гипотеза неприменима, а д.у. есть условие Швингера-Блейлера. Показано, что испускаться и поглощаться способны только поперечные кванты (со спиральностями ± 1) и что только они участвуют в промежуточных состояниях в условии унитарности. Это - следствие совместной работы д.у. и калибровочной инвариантности. Мы оставляем в стороне трудности, присущие $\mathcal{S}$-матрице между конечными временами, т.е. трудности с существованием /21/, с расходимостями и перенормировками /22/, с причинностью /23/ в надежде, что они в конечном счете найдут свое математическое разрешение (см., например, /24/).

В п.5 изучается работа д.у. в гайзенберговской картине. Для соответствия формулировки Ферми-Гупты теории в калибровке излучения необходимо именно д.у. Ферми-Гупты, а не какое-либо иное (см. /17/). Именно оно позволяет свести уравнения и операторы формулировки Ферми-Гупты к уравнениям и операторам в калибровке излучения. Затруднения Галлера и Ландовица /6/ с д.у. Ферми-Гупты, возможно, связаны с отклонением от стандартных обозначений (конец п.5).

П.6 посвящен формализму Ферми-Гупты в квантованных теориях Янга-Миллса и Эйнштейна. Мы ограничиваемся лишь замечаниями о матрице $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\infty, -\infty)$. Подчеркивается, что для того, чтобы $\mathcal{S}$-матрица удовлетворяла правильному условию унитарности, достаточно, чтобы она была инвариантной относительно чисто аддитивных калибровочных преобразований по крайней мере в обкладках между состояниями, удовлетворяющими д.у.

Некоторые сведения о базисах в гильбертовом пространстве вынесены в Приложение. Там, в частности, доказывается теорема, характеризующая ситуации, в которых продольные и временные векторные кванты (и соответствующие тензорные) не вносят вклада в сумму по промежуточным состояниям.

2. Дополнительное условие в различных представлениях

Нас будет интересовать ситуация с д.у. в следующих четырех представлениях.

1) Гайзенберговская картина, теория Ферми. Для определенности пусть это будет спинорная электродинамика с плотностью лагранжиана x/

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{A}_\nu \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \mathbf{j}_\mu \mathbf{A}_\mu - \frac{1}{4}\bar{\boldsymbol{\psi}}(\gamma\partial + m)\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{4}\bar{\boldsymbol{\psi}}(-\gamma\overleftarrow{\partial} + m)\boldsymbol{\psi} -$$

$$- \frac{1}{4}\bar{\boldsymbol{\psi}}_C(\gamma\partial + m)\boldsymbol{\psi}_C - \frac{1}{4}\bar{\boldsymbol{\psi}}_C(-\gamma\overleftarrow{\partial} + m)\boldsymbol{\psi}_C \ , \tag{1}$$

где $\mathbf{A}_\mu(x)$ - 4-вектор-потенциал электромагнитного поля, $\boldsymbol{\psi}(x)$ - спинорное электронно-позитронное поле, $\boldsymbol{\psi}_C(x) = C\bar{\boldsymbol{\psi}}(x)$ - зарядово-сопряженное $\boldsymbol{\psi}$ поле (C -матрица зарядового сопряжения), а $\mathbf{j}_\mu(x) = \frac{ie}{2}(\bar{\boldsymbol{\psi}}\gamma_\mu\boldsymbol{\psi} - \bar{\boldsymbol{\psi}}_C\gamma_\mu\boldsymbol{\psi}_C)$. Физические состояния выделяются с помощью д.у. Ферми-Гупты xxx/

$$(\partial_\mu \mathbf{A}_\mu(x))^{(-)}\boldsymbol{\Psi} = 0 \ . \tag{2}$$

2) Гайзенберговская картина, калибровка излучения. Д.у. то же

$$(\partial_\mu \mathbf{A}_\mu(x))^{(-)}\boldsymbol{\Psi}^{\perp} = 0 \ . \tag{3}$$

---

x/ Для обозначения операторов и векторов состояния в гайзенберговской картине используем жирный, а в картине взаимодействия светлый шрифт. Мы надеемся, что использование в некоторых случаях жирного шрифта также и для обозначения 3-векторов не вызовет недоразумений. 4-векторы снабжаются греческими $(\mu = 1,2,3,4)$, а 3-векторы латинскими $(m = 1,2,3)$ индексами; принята метрика $x_\mu^2 = x_m^2 + x_4^2 = x_m^2 - x_0^2$ $(x_4 = ix_0)$.

xx/ Добавление контр-членов перенормировки не изменяет выводов.

xxx/ Согласно Гайтлеру /5/ и Боголюбову и Ширкову /18/ положительно- и отрицательно- частотные части отмечаются знаками (-) и (+). Это оправдано вдвойне: в свободном случае $A^{(-)}(x)$ выражается через $a(p)e^{-i\omega t}$ $(\omega > 0)$, т.е. через оператор уничтожения и экспоненту со знаком минус ("положительно-частотная" зависимость).

3) Картина взаимодействия для теории Ферми. Д.у. есть условие Швингера-Блейлера [3,4]

$$\left[\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x) - \int\limits_{y_0=t} dy\, \Delta_0^{(-)}(x-y)\, j_0(y)\right]\Psi(t)=0\,, \tag{4}$$

где

$$\Delta_0^{(\mp)}(x) = \mp\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d\mathbf{p}}{2p_0}\,e^{\pm ipx} \qquad (p_0=|\mathbf{p}|)\,.$$

4) Картина взаимодействия, калибровка излучения, где д.у. снова есть условие Ферми-Гупты [4]

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x)\,\Psi^\perp(t)=0\,. \tag{5}$$

Известно, что все эти формулировки при таких д.у. эквивалентны между собой и максвелловской форме электродинамики (см. [17]).

Приведем для справок связи между этими четырьмя представлениями (O_i - те или иные наблюдаемые).

Переход от 1) к 2)

$$\mathbf{A}_m^\perp(x) = (\delta_{mn} - \Delta^{-1}\partial_m\partial_n)\mathbf{A}_n(x),$$
$$\boldsymbol{\psi}^\perp(x) = e^{-ie\Delta^{-1}\partial_r \mathbf{A}_n(x)}\boldsymbol{\psi}(x),$$
$$\mathbf{O}_i^\perp = \mathbf{O}_i\,,$$
$$\boldsymbol{\Psi}^\perp = \boldsymbol{\Psi}\,.$$

Переход от 1) к 3)

$$A_\mu(x) = U(x_0,t_0)\mathbf{A}_\mu(x)U^{-1}(x_0,t_0),$$
$$\psi(x) = U(x_0,t_0)\boldsymbol{\psi}(x)U^{-1}(x_0,t_0),$$
$$O_i(t) = U(t,t_0)\mathbf{O}_i(t)U^{-1}(t,t_0),$$
$$\Psi(t) = U(t,t_0)\boldsymbol{\Psi}\,.$$

Переход от 2) к 4)

$$A_m^\perp(x) = U_\perp(x_0,t_0)\mathbf{A}_m^\perp(x)U_\perp^{-1}(x_0,t_0),$$
$$\psi^\perp(x) = U_\perp(x_0,t_0)\boldsymbol{\psi}^\perp(x)U_\perp^{-1}(x_0,t_0),$$
$$O_i^\perp(t) = U_\perp(t,t_0)\mathbf{O}_i^\perp(t)U_\perp^{-1}(t,t_0),$$
$$\Psi^\perp(t) = U_\perp(t,t_0)\boldsymbol{\Psi}^\perp.$$

Переход от 3) к 4)

$$A_m^\perp(x) = (\delta_{mn} - \Delta^{-1}\partial_m\partial_n)A_n(x),$$
$$\psi^\perp(x) = \psi(x),$$
$$O_i^\perp(t) = V^{-1}(t)O_i(t)V(t),$$
$$\Psi^\perp(t) = V^{-1}(t)\Psi(t)\,.$$

Операторы U , $U_{\perp}$ и V даются выражениями

$$U(t,t_o)=S(t,t_o)V(t_o), \quad S(t,t_o)=T\exp\left\{i\int_{t_o}^{t} d^4x\, j_{\mu}(x)A_{\mu}(x)\right\}, \tag{6}$$

$$U_{\perp}(t,t_o)=S_{\perp}(t,t_o)=T\exp\left\{i\int_{t_o}^{t} d^4x\left[j_m A_m^{\perp}-\frac{1}{2}j_4\Delta^{-1}j_4-j_4\partial_4\Delta^{-1}\partial_{\mu}A_{\mu}(x)\right]\right\}, \tag{7}$$

$$V(x_o)=\exp\left\{\int dx\, j_4\Delta^{-1}\partial_n A_n(x)\right\}, \tag{8}$$

где T обозначает T-упорядочивание. Отметим связь

$$S(t,t_o)=V(t)S_{\perp}(t,t_o)V^{-1}(t_o). \tag{9}$$

Скалярная составляющая $\partial_\nu \mathbf{A}_\nu(x)$ вектор-потенциала обладает многими интересными свойствами /17,25/. Как оператор, подчиняющийся свободному уравнению

$$\Box\partial_\nu \mathbf{A}_\nu(x)=0, \tag{10}$$

(следствие $\Box\mathbf{A}_\mu=-\mathbf{j}_\mu$ и $\partial_\mu \mathbf{j}_\mu=0$), она не изменяется при переходе к картине взаимодействия

$$\partial_\nu A_\nu(x)=\partial_\nu \mathbf{A}_\nu(x). \tag{11}$$

Даже в гайзенберговской картине она имеет простые свойства коммутации с $\mathbf{A}_\mu(y)$ и $\boldsymbol{\psi}(y)$

$$[\partial_\nu \mathbf{A}_\nu(x), \mathbf{A}_\mu(y)]=i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Delta_o(x-y) \quad \left(\Delta_o(x)=\Delta_o^{(-)}(x)+\Delta_o^{(+)}(x)\right), \tag{12}$$

$$[\partial_\nu \mathbf{A}_\nu(x), \boldsymbol{\psi}(y)]=e\,\Delta_o(x-y)\boldsymbol{\psi}(y). \tag{13}$$

Более того, $\partial_\nu \mathbf{A}_\nu(x)$ вообще коммутирует со многими операторами: с $\mathbf{A}_m^{\perp}(y)$, $\boldsymbol{\psi}^{\perp}(y)$, $\mathbf{j}_\mu(y)$, $\mathbf{F}_{\mu\nu}(y)$, $A_m^{\perp}(y)$, $\psi(y)$, $j_\mu(y)$, $F_{\mu\nu}(y)$, $S_{\perp}(t,t_o)$, "сама с собой", т.е. с $\partial_\mu A_\mu(y)$ и со своими положительно- и отрицательно-частотными составляющими $(\partial_\mu A_\mu(y))^{(\mp)}$ x/ при любых временах x_0, y_0 и t. В подпространстве состояний, удовлетворяющих д.у. Ферми-Гупты, она ведет себя как c-число. То же относится к ее положительно- и отрицательно-частотным частям. Благодаря коммутации с $S_\perp(t,t_0)$, переход от д.у. Ферми-Гупты (2) к условию Швингера-Блейлера (4) просто основан на соотношении [4]

$$V(t)\,\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x)\,V^{-1}(t)=\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x)-\int\limits_{y_0=t} d\mathbf{y}\,\Delta_0^{(\mp)}(x-y)\,j_0(y)\,. \tag{14}$$

Подчеркнем, что переходы 1)⟶2) и 2)⟶4) приводят не к стандартным уравнениям и операторам (наблюдаемым) в калибровке излучения, а к таким, в которых содержится лишнее взаимодействие с c-числовым полем $\partial_\nu A_\nu(x)$, как, например, в $S_\perp(t,t_0)$ [17]. Нетрудно убрать это лишнее взаимодействие путем проецирования на подпространство состояний, удовлетворяющих д.у. Ферми-Гупты. Но это усложняет взаимосвязи между представлениями, и мы, вместе с Блейлером [4], предпочитаем этого не делать. Этим объясняется, почему калибровка излучения выше сопровождалась д.у.

Отметим законы калибровочных преобразований операторов S и V:

$$S(t,t_0)\to S'(t,t_0)=e^{G(t)}S(t,t_0)e^{-G(t_0)}, \tag{15}$$

$$V(t)\to V'(t)=e^{G(t)}V(t), \tag{16}$$

где

$$G(x_0)=\int d\mathbf{x}\,j_4(x)\Lambda(x), \tag{17}$$

---

x/ Выделение положительно- и отрицательно-частотных частей можно осуществить с помощью [26]

$$(\partial_\mu A_\mu(x))^{(\mp)}=\pm\frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\tau}{\tau\mp i\varepsilon}\,\partial_\mu A_\mu(\mathbf{x},x_0-\tau)\qquad(\varepsilon\to 0_+).$$

а $\Lambda(x)$ — c - числовая калибровочная функция. Обычно в гайзенберговской картине преобразуют операторы поля, а векторы состояния Ψ считают калибровочно-инвариантными. Тогда из (15) и (16) ясна необходимость введения множителя $V(t_0)$ в $U(t,t_0)$, чтобы обеспечить правильное калибровочное преобразование векторов состояния $\Psi(t)$ /3,27,17/.

Как видно из (15), в рамках адиабатической гипотезы оператор $S(\infty,-\infty)$ калибровочно инвариантен, причем согласно (9) $S(\infty,-\infty)=S_1(\infty,-\infty)$. Бялыницки-Бируля /28/ подчеркнул, что, строго говоря, калибровочной инвариантностью обладает только перенормированная матрица $S(\infty,-\infty)$.

3. Условие Ферми-Гупты в свободном случае

Кратко напомним ситуацию с д.у. Ферми-Гупты в свободном случае $(e=0)$, которая в основном типична и для случая взаимодействия. Вводим операторы уничтожения и рождения разложениями типа

$$A_\mu(x)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int\frac{dp}{2p_0}\left[a_\mu(p)e^{ipx}+a^+_\mu(p)e^{-ipx}\right]\quad (p_0=|p|), \tag{18}$$

$$[a_\mu(p),a_\nu(q)]=0\,,\quad [a_\mu(p),a^+_\nu(q)]=\delta_{\mu\nu}2p_0\delta(p-q)\,. \tag{19}$$

В отсутствии д.у. в гильбертовом пространстве можно выбрать базис

$$\Psi_0\,,\; a^+_\mu(p)\Psi_0\,,\; a^+_{\mu_1}(p_1)a^+_{\mu_2}(p_2)\Psi_0\,,\;\dots\,, \tag{20}$$

где вакуум Ψ_0 определяется как

$$a_\mu(p)\Psi_0=0\,,\qquad b(p,s)\Psi_0=c(p,s)\Psi_0=0 \tag{21}$$

($b(p,s)$ и $c(p,s)$ - операторы уничтожения электронов и позитронов). Состояния (20) с нечетным числом четверок среди μ_i обладают отрицательной нормой, остальные - положительной (неопределенная метрика).

а $\Lambda(x)$ — c - числовая калибровочная функция. Обычно в гайзенберговской картине преобразуют операторы поля, а векторы состояния Ψ считают калибровочно-инвариантными. Тогда из (15) и (6) ясна необходимость введения множителя $V(t_0)$ в $U(t,t_0)$, чтобы обеспечить правильное калибровочное преобразование векторов состояний $\Psi(t)$ /3,27,17/.

Как видно из (15), в рамках адиабатической гипотезы оператор $S(\infty,-\infty)$ калибровочно инвариантен, причем согласно (1) $S(\infty,-\infty)=S_\perp(\infty,-\infty)$. Бялыницки-Бируля /28/ подчеркнул, что, строго говоря, калибровочной инвариантностью обладает только перенормированная матрица $S(\infty,-\infty)$.

3. Условие Ферми-Гупты в свободном случае

Кратко напомним ситуацию с д.у. Ферми-Гупты в свободном случае $(e=0)$, которая в основном типична и для случая взаимодействия. Вводим операторы уничтожения и рождения разложениями типа

$$A_\mu(x)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int\frac{d\mathbf{p}}{2p_0}\left[a_\mu(\mathbf{p})e^{ipx}+a_\mu^+(\mathbf{p})e^{-ipx}\right]\quad(p_0=|\mathbf{p}|),\tag{18}$$

$$[a_\mu(\mathbf{p}),a_\nu(\mathbf{q})]=0,\quad [a_\mu(\mathbf{p}),a_\nu^+(\mathbf{q})]=\delta_{\mu\nu}2p_0\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}).\tag{19}$$

В отсутствии д.у. в гильбертовом пространстве можно выбрать базис

$$\Psi_0,\ a_\mu^+(\mathbf{p})\Psi_0,\ a_{\mu_1}^+(\mathbf{p}_1)a_{\mu_2}^+(\mathbf{p}_2)\Psi_0,\ \dots,\tag{20}$$

где вакуум Ψ_0 определяется как

$$a_\mu(\mathbf{p})\Psi_0=0,\qquad b(\mathbf{p},s)\Psi_0=c(\mathbf{p},s)\Psi_0=0\tag{21}$$

($b(\mathbf{p},s)$ и $c(\mathbf{p},s)$ - операторы уничтожения электронов и позитронов). Состояния (20) с нечетным числом четверок среди μ_i обладают отрицательной нормой, остальные - положительной (неопределенная метрика).

Чтобы разрешить условие Ферми-Гупты, которое можно записать как

$$pa^+(p)\Psi=0, \tag{22}$$

удобнее вместо (20) пользоваться базисом, порождаемым операторами рождения поперечных, скалярного и временно́го квантов

$$e^{(1)}a^+(p), \quad e^{(2)}a^+(p), \quad pa^+(p), \quad -na^+(p), \tag{23}$$

где $a^+_\mu(p)$ спроецированы на неортогональный базис векторов $e^{(1)}_\mu(p)$, $e^{(2)}_\mu(p)$, p_μ и n_μ со свойствами

$$p^2=0, \quad pe^{(i)}=0, \quad e^{(i)}e^{(j)}=\delta_{ij}, \quad ne^{(i)}=0, \quad n^2=-1 \quad (i,j=1,2) \tag{24}$$

(см. Приложение). Посторонний времениподобный вектор n_μ берем одним и тем же для всех p. Условие Ферми-Гупты следующим образом расщепляет гильбертово пространство. Оно разрешает:

1) физическое подпространство, натянутое на базис состояний, в которых допустимо участие только поперечных квантов (фотонов) :

$$\{\Phi_n\}: \quad \begin{array}{r} \Psi_a \\ e^{(i)}a^+(p)\Psi_a \\ (e^{(i)}a^+(p))(e^{(j)}a^+(q))\Psi_a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{25a}$$

где Ψ_a - вакуум или чисто электронно-позитронные состояния:

$$\{\Psi_a\}: \quad \begin{array}{r} \Psi_0 \\ b^+(p,s)\Psi_0, \quad c^+(p,s)\Psi_0 \\ b^+(p,s)\,b^+(q,s')\Psi_0, \quad b^+(p,s)c^+(q,s')\Psi_0, \quad c^+(p,s)c^+(q,s')\Psi_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

(аналогично можно включить в рассмотрение и другие частицы);

2) безвредный "фон" – состояния с участием хотя бы одного скалярного кванта независимо или наряду с поперечными

$$\{\Omega_n\}: \qquad p\,a^+(p)\,\Psi_a$$

$$(e^{(i)}a^+(p))(q\,a^+(q))\Psi_a,\ (p\,a^+(p))(q\,a^+(q))\Psi_c. \qquad (25б)$$

. . . .

Вместе разрешенные состояния Φ_n и Ω_m мы будем обозначать Ψ_n. Условие Ферми-Гупты запрещает как нефизические

3) все состояния с участием хотя бы одного временного кванта (независимо или наряду с другими)

$$\{\Upsilon_n\}: \qquad -n\,a^+(p)\,\Psi_a \qquad (25в)$$

$$-(e^{(i)}a^+(p))(n\,a^+(q))\Psi_a,\ -(p\,a^+(p))(n\,a^+(q))\Psi_a,\ (n\,a^+(p))(n\,a^+(q))\Psi_a$$

. . . .

Тем самым исключаются все состояния с отрицательными нормами (среди базисных – это состояния с нечетным числом временных квантов). В исключении временных квантов – истинное назначение условия Ферми-Гупты.

В Приложении проиллюстрировано, что базис (25) в отличие от (20) является неортогональным. Там же дано соотношение полноты этих базисов.

Разрешенные состояния строятся путем действия на вакуум тремя сортами операторов рождения: $e^{(1)}a^+$, $e^{(2)}a^+$ и $p\,a^+$ x/, – а в остальном произвольны. На этом языке довольно сложные правила Гупты /2/ о разрешенных комбинациях продольных и временных квантов свелись к простому рецепту: допустимо любое число скалярных квантов, рождаемых операторами $p\,a^+$.

"Безвредность" состояний Ω_n обусловлена их ортогональностью всем разрешенным состояниям, в том числе друг другу и самим себе (норма всех состояний Ω – нуль).

---

x/ Вследствие упомянутых выше коммутационных свойств $\partial_\mu A_\mu(x)$ оператор $p\,a^+$ коммутирует с $e^{(1)}a(p)$, $e^{(2)}a(p)$ и $p\,a(p)$ ("с-число").

$$(\Omega,\Psi)=(\Psi,\Omega)=(\Omega,\Omega)=0 \tag{26а}$$

(здесь и ниже Ψ и Ω - произвольные линейные комбинации состояний Φ_n, Ω_m и Ω_n), а также соотношениями

$$(\Omega,Q\Psi)=(\Psi,Q\Omega)=(\Omega,Q\Omega)=0 \ , \tag{26б}$$

$$(\Omega,P_\nu\Psi)=(\Psi,P_\nu\Omega)=(\Omega,P_\nu\Omega)=0 \tag{26в}$$

для операторов заряда Q, 4-импульса P_ν, 4-момента $M_{\nu\lambda}$ и других физических величин. Эти соотношения - следствие 1) факта, что Ω_n содержит хотя бы один оператор pa^+, 2) условия Ферми-Гупты и 3) свойств коммутации

$$[pa,Q]=0\,, \qquad [pa^+,Q]=0 \ , \tag{27а}$$

$$[pa,P_\nu]=p_\nu(pa)\,, \qquad [pa^+,P_\nu]=-p_\nu(pa^+) \tag{27б}$$

и т.п. Из соотношений (26) ясно, что примесь состояний Ω не вносит никакого вклада в матричные элементы

$$(\Phi'+\Omega',\Phi+\Omega)=(\Phi',\Phi) \ , \tag{28а}$$

$$(\Phi'+\Omega',Q(\Phi+\Omega))=(\Phi',Q\Phi) \ , \tag{28б}$$

$$(\Phi'+\Omega',P_\nu(\Phi+\Omega))=(\Phi',P_\nu\Phi) \ . \tag{28в}$$

Таким образом, в конечном счете остаются матричные элементы физических операторов лишь между состояниями, в которых могут участвовать только поперечные кванты - фотоны.

Возможность, не влияя на результат, добавлять к любому состоянию, удовлетворяющему д.у. Ферми-Гупты, произвольную суперпозицию состояний Ω_n - это своего рода калибровочная инвариантность в гильбертовом пространстве /17/. Она, в частности, позволяет переходить от одного вектора n_μ к любому другому, что свидетельствует о несущественности выбора этого вектора и тем самым гарантирует лоренц-инвариантность теории (подпространство состояний (25а) и (25б) определено лоренц-инвариантно) /17/.

4. S-матрица и дополнительное условие в картине взаимодействия

S- матрица между бесконечными временами. Разбиение состояний на физические и нефизические в свободном случае носит чисто условный характер. Об истинном физическом содержании можно судить только в теории со взаимодействием. Однако в этом случае трудно построить настоящие физические состояния (хотя бы начальное и конечное) - собственные функции тех или иных наблюдаемых (или суперпозиции таких функций). Обычно эту проблему обходят, рассматривая S-матрицу только между бесконечными временами $t_0 \to -\infty$, $t \to \infty$ и апеллируя к адиабатической гипотезе. Согласно гипотезе при этих временах взаимодействие выключается, и роль наблюдаемых берут на себя свободные операторы заряда, 4-импульса и т.п., построенные из свободных полей, а д.у. Швингера-Блейлера (4) сводится к условию Ферми-Гупты. Таким образом, задача построения состояний $\Psi(\pm\infty)$ сводится к решенной в п.3. На случай взаимодействия переносятся все сделанные там заключения, в частности, соотношения (26) и (28). Аналогичные соотношения имеют место и для матрицы $S \equiv S(\infty,-\infty)$.

$$(\Psi, S\Omega) = (\Omega, S\Psi) = (\Omega, S\Omega) = 0 \quad . \tag{29}$$

Они являются следствием свойств коммутации

$$[pa, S] = 0 , \qquad [pa^+, S] = 0 , \tag{30}$$

которые, в свою очередь, вытекают из калибровочной инвариантности S -матрицы [x/] (форм-инвариантности)

$$S(A'_\mu) = S(A_\mu), \quad \text{где} \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) , \quad \Box \Lambda(x) = 0 \tag{31а}$$

(заряженные поля в представлении взаимодействия не преобразуются, см. /3,27,17/). Конкретнее, для доказательства (30) следует воспользоваться инфинитезимальной формой условия (31а)

$$\int d^4x\, \partial_\mu \Lambda(x) \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} S = 0 \tag{31б}$$

и перестановочными соотношениями

$$[pa, A_\mu(x)] = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} p_\mu e^{-ipx} , \qquad [pa^+, A_\mu(x)] = -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} p_\mu e^{ipx} . \tag{32}$$

Соотношения (29), очевидно, означают, что отличными от нуля остаются элементы S-матрицы лишь между состояниями Φ.

Необходимо еще убедиться, что лишние кванты не работают также и в условии унитарности. Исходим из условия унитарности для оператора S :

$$S S^+ = \sum_N S\, \Psi_N \otimes \eta_N \Psi_N^+ S^+ = 1 , \tag{33}$$

где во вторую часть равенства вставлена сумма по полной системе промежуточных состояний, в которую, кроме поперечных, вносят вклад также временные и скалярные кванты. Однако, по теореме, доказанной в Приложении, в обкладках между состояниями Ψ_i и Ψ_f , удовлетворяющими д.у. Ферми-Гупта, сумма редуцируется до суммы лишь по состояниям Ψ_n :

---

x/ S -матрица предполагается разложенной по N-произведениям, и $A_\mu(x)$ варьируются лишь под знаком N -произведения. Непосредственную проверку этого факта см. у Фейнмана /29/ и у Боголюбова и Ширкова /18/ (стр. 250) см. также /17/.

$$\sum_n (\Psi_f, S\Psi_n)(\Psi_n, S^+\Psi_i) = \delta_{if}, \qquad (34)$$

причем в силу (29) Ψ_i, Ψ_n и Ψ_f могут принадлежать лишь к числу состояний Φ.

Итак, мы убедились, что испускаться и поглощаться способны исключительно поперечные кванты (фотоны). Это результат совместной работы калибровочной инвариантности и условия Ферми-Гупты.

Этот же вывод относится и к оператору $S_\perp(\infty, -\infty)$, поскольку соотношения

$$[pa, S_\perp] = [pa^+, S_\perp] = 0 \qquad (35)$$

в этом случае совершенно очевидны, а д.у. с самого начала есть условие Ферми-Гупты (5).

S - матрица между конечными временами. Поскольку в калибровке излучения то же верно и при конечных временах, т.е. д.у. есть условие Ферми-Гупты (5) и

$$[\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x), S_\perp(t, t_0)] = 0, \qquad (36)$$

то состояния, удовлетворяющие д.у., снова можно построить по рецептам свободного случая x/

$$\Psi_n^\perp(t) \sim \Psi_n, \qquad (37)$$

и опять испускаться и поглощаться будут способны лишь "поперечные кванты". Следует, однако, иметь в виду, что в отличие от свободного случая векторы Φ_n не описывают настоящих физических фотонно-

x/ Вектор n_μ следует ориентировать по направлению, по которому мы следим за развитием системы, в данном случае по направлению оси t (поскольку $S_\perp(t, t_0)$ рассматривается как функция t), т.е. выбрать в виде $n_\mu = \{0, 0, 0, i\}$. При этом векторы $e_\mu^{(1)}$ и $e_\mu^{(2)}$ будут чисто трехмерными $e_\mu^{(j)} = \{e^{(j)}, 0\}$.

электронно-позитронных состояний, поскольку Φ_n не являются собственными функциями полного гамильтониана (выключение взаимодействия при временах $< t_0$ и $> t$ было бы насилием). Вместе с тем, являясь собственными функциями операторов заряда $Q^{\perp}$ и 3-импульса $P_n^{\perp}$ и образуя полный базис, они могут служить материалом для построения собственных векторов полного гамильтониана.

Матрица $S(t,t_0)$ сопровождается более сложным д.у. (4). Удовлетворяющие ему состояния нельзя строить прямо по рецептам свободного случая. Однако преобразование

$$\Psi(t) = V(t)\Psi^{\perp}(t)$$

позволяет свести д.у. Швингера-Блейлера к д.у. Ферми-Гупты (5). Поэтому базис состояний, удовлетворяющих условию Швингера-Блейлера (4), могут служить векторы состояния

$$\Psi_n(t) \sim V(t)\Psi_n \ , \tag{38}$$

где Ψ_n - состояния (25а) и (25б). Разумеется, это снова только материал для конструирования настоящих, физических состояний.

Пусть $\Psi(t)$, $\Phi(t)$ и $\Omega(t)$ суть произвольные линейные комбинации соответственно состояний $\Psi_n(t)$, $\Phi_n(t)\ (\sim V(t)\Phi_n)$ и $\Omega_n(t)\ (\sim V(t)\Omega_n)$. Тогда справедливы соотношения x/

$$(\Omega(t),\Psi(t)) = (\Psi(t),\Omega(t)) = (\Omega(t),\Omega(t)) = 0 \ , \tag{39а}$$

$$(\Omega(t),Q(t)\Psi(t)) = (\Psi(t),Q(t)\Omega(t)) = (\Omega(t),Q(t)\Omega(t)) = 0 \ , \tag{39б}$$

$$(\Omega(t),P_\nu(t)\Psi(t)) = (\Psi(t),P_\nu(t)\Omega(t)) = (\Omega(t),P_\nu(t)\Omega(t)) = 0 \ , \tag{39в}$$

$$(\Omega(t),S(t,t_0)\Psi(t_0)) = (\Psi(t),S(t,t_0)\Omega(t_0)) = (\Omega(t),S(t,t_0)\Omega(t_0)) = 0 \ , \tag{39г}$$

$$\sum_n (\Psi_i(t),S(t,t_0)\Psi_n(t_0))(\Psi_n(t_0),S^+(t,t_0)\Psi_j(t)) = \delta_{ij} \ , \tag{39д}$$

---

x/ Соответствующие соотношения в калибровке излучения выглядят точно так же, разумеется, в терминах $\Psi^{\perp}(t)$, $\Omega^{\perp}(t)$, $Q^{\perp}(t)$, $P_\nu^{\perp}(t)$ и $S_{\perp}(t,t_0)$.

где Q и P_ν – операторы полных заряда и 4-импульса. Аналогичные соотношения имеют место и для других наблюдаемых (для 4-момента $M_{\nu\lambda}$ и т.д.). Соотношения (39) очень похожи на (26), (29) и (34) и выводятся аналогично. При выводе следует использовать (14), а вместо (27) и (30) соотношения

$$\Big[\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x) - \int\limits_{y_0=t} dy\, \Delta_0^{(\mp)}(x-y) j_0(y),\, Q(t)\Big] = 0\,, \tag{40а}$$

$$\Big[\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x) - \int\limits_{y_0=t} dy\, \Delta_0^{(\mp)}(x-y) j_0(y),\, P_\nu(t)\Big] = -i\frac{\partial}{\partial x_\nu}\Big(\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x) - \int\limits_{y_0=t} dy\, \Delta_0^{(\mp)}(x-y) j_0(y)\Big), \tag{40б}$$

$$\Big(\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x) - \int\limits_{y_0=t} dy\, \Delta_0^{(\mp)}(x-y) j_0(y)\Big) S(t,t_0) = S(t,t_0)\Big(\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x) - \int\limits_{y_0=t_0} dy\, \Delta_0^{(\mp)}(x-y) j_0(y)\Big). \tag{40в}$$

Первые два проще всего получить из (63а) и (63б) для гайзенберговских операторов. Последнее легко вывести из (9), (14) и (36).

Из (39а)-(39в) можно сделать те же выводы, что и в свободном случае (п.3). Соотношения (39г) и (39д) свидетельствуют о том, что излучаться и поглощаться снова могут только поперечные кванты – фотоны.

5. Дополнительное условие в газенберговской картине

Без потери общности вытекающим из (1) перестановочным соотношениям для взаимодействующих полей A_μ и ψ можно удовлетворить, представив /30/

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dp}{2|p|}\, e^{ipx} \big[a_\mu(p,t) + a_\mu^+(-p,t)\big]\,, \tag{41а}$$

$$i\Pi_\mu(x) = \partial_4 A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dp}{2|p|}\, e^{ipx}\, |p| \big[-a_\mu(p,t) + a_\mu^+(-p,t)\big]\,, \tag{41б}$$

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dp}{2\omega}\, e^{ipx} \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \big[b(p,s,t)u(p,s) + c^+(-p,s,t)C\bar{u}^T(-p,s)\big], \tag{42}$$

где a_μ, b, c и a_μ^+, b^+, c^+ – "операторы уничтожения и рождения", подчиняющиеся перестановочным соотношениям

$$\big[a_\mu(p,t),\, a_\nu^+(q,t)\big] = \delta_{\mu\nu} 2|p|\delta(p-q)\,,$$
$$\{b(p,s,t),\, b^+(q,s',t)\} = \{c(p,s,t),\, c^+(q,s',t)\} = \delta_{ss'} 2\omega\delta(p-q)\,, \tag{43}$$

а остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. По определению,

$$\partial_4\left[a_\mu(\mathbf{p},t)+a^+_\mu(-\mathbf{p},t)\right]=|\mathbf{p}|\left[-a_\mu(\mathbf{p},t)+a^+_\mu(-\mathbf{p},t)\right]. \tag{44}$$

С помощью (41) и (42) осуществляется переход из x-представления в $\mathbf{p},t$-представление. Одним разложением (41а) операторы a_μ и a^+_μ еще не определяются. Этот произвол устраняли, например, путем ограничения области интегрирования по $\mathbf{p}$ полупространством всех значений $\mathbf{p}$ /5/ (стр. 54), что нековариантно даже трехмерно. Выбрав $\partial_4 A_\mu$ в виде (41б), мы распорядились этим произволом по-другому, в тесном соответствии со свободным случаем. При выключении взаимодействия операторы $a_\mu(\mathbf{p},t)$ и $a^+_\mu(\mathbf{p},t)$ однозначно переходят соответственно в $a_\mu(\mathbf{p})e^{-i|\mathbf{p}|t}$ и $a^+_\mu(\mathbf{p})e^{i|\mathbf{p}|t}$, где $a_\mu(\mathbf{p})$ и $a^+_\mu(\mathbf{p})$ - обычные свободные операторы уничтожения и рождения.

Представление (42), подобно (41), есть разложение по полной системе функций

$$u(\mathbf{p},s),\qquad v(\mathbf{p},s)=C\,\bar{u}^T(-\mathbf{p},s)\qquad \left(s=-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right),$$

т.е. по c-числовым положительно- и отрицательно-частотным решениям свободного уравнения Дирака в p-представлении с энергией $\omega=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. T обозначает операцию транспонирования.

Если подставить разложения (41) и (42) в оператор заряда Q и оператор 4-импульса P_ν (которые можно найти из (1) по теореме Э. Нетер), получим x/

$$Q=e\int\frac{d\mathbf{p}}{2\omega}\sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\left(b^+(\mathbf{p},s,t)\,b(\mathbf{p},s,t)-c^+(\mathbf{p},s,t)\,c(\mathbf{p},s,t)\right), \tag{45}$$

---

x/ При вычислении (45), (48) и (50) используются свойства ортонормировки

$$\bar{u}(\mathbf{p},s')\gamma_4 u(\mathbf{p},s)=\bar{v}(\mathbf{p},s')\gamma_4 v(\mathbf{p},s)=2\omega\delta_{ss'}$$

$$\bar{u}(\mathbf{p},s')\gamma_4 v(\mathbf{p},s)=\bar{v}(\mathbf{p},s')\gamma_4 u(\mathbf{p},s)=0\ .$$

$$P_\nu = P_\nu^A + P_\nu^\Psi , \tag{46}$$

$$P_n^A = \int \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}\, p_n\, a_\mu^+(\mathbf{p},t)\, a_\mu(\mathbf{p},t) , \tag{47}$$

$$P_n^\Psi = \int \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}\, p_n \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big(b^+(\mathbf{p},s,t)\, b(\mathbf{p},s,t) + c^+(\mathbf{p},s,t)\, c(\mathbf{p},s,t) \Big) , \tag{48}$$

$$P_0^A = \int \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|}\, |\mathbf{p}| \Big(a_\mu^+(\mathbf{p},t)\, a_\mu(\mathbf{p},t) + 2\delta(0) \Big) , \tag{49}$$

$$\begin{aligned} P_0^\Psi = -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega} \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big(& b^+(\mathbf{p},s,t)\, \partial_4 b(\mathbf{p},s,t) + b(\mathbf{p},s,t)\, \partial_4 b^+(\mathbf{p},s,t) + \\ & + c^+(\mathbf{p},s,t)\, \partial_4 c(\mathbf{p},s,t) + c(\mathbf{p},s,t)\, \partial_4 c^+(\mathbf{p},s,t) \Big) = \\ = \int \frac{d\mathbf{p}}{2\omega}\, \omega \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big(& b^+(\mathbf{p},s,t)\, b(\mathbf{p},s,t) + c^+(\mathbf{p},s,t)\, c(\mathbf{p},s,t) - \delta(0) \Big) - \\ - \int \frac{d\mathbf{p}}{2|\mathbf{p}|} \Big(& a_\mu(\mathbf{p},t) + a_\mu^+(-\mathbf{p},t) \Big)\, j_\mu(-\mathbf{p},t) . \end{aligned} \tag{50}$$

Здесь

$$\begin{aligned} j_\mu(\mathbf{p},t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}\, j_\mu(\mathbf{x},t) = \frac{ie}{8(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}\, \omega_{\mathbf{k}}} \sum_{s,s'=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ \Big\{ \Big(b^+(-\mathbf{p}+\mathbf{k},s',t)\, b(\mathbf{k},s,t) - c^+(-\mathbf{p}+\mathbf{k},s',t)\, c(\mathbf{k},s,t) \Big) \bar{u}(-\mathbf{p}+\mathbf{k},s')\, \gamma_\mu u(\mathbf{k},s) - \\ - c(\mathbf{p}-\mathbf{k},s',t)\, b(\mathbf{k},s,t)\, u^T(\mathbf{p}-\mathbf{k},s')\, C^{-1} \gamma_\mu u(\mathbf{k},s) + \\ + b^+(-\mathbf{p}+\mathbf{k},s',t)\, c^+(-\mathbf{k},s,t)\, \bar{u}(-\mathbf{p}+\mathbf{k},s')\, \gamma_\mu C \bar{u}^T(-\mathbf{k},s) \Big\} . \end{aligned} \tag{51}$$

В выражениях (45) и (47)-(51) произведено " $\mathcal{N}$ -упорядочивание" - операторы с крестом поставлены слева от операторов без креста [x/].

Из выражений (45) и (47)-(50) ясно, что операторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}_n^A$, $\mathbf{P}_n^\Psi$, $\mathbf{P}_n=\mathbf{P}_n^A+\mathbf{P}_n^\Psi$ и $\mathbf{P}_0^A$ обладают в точности теми же спектрами, что и в свободном случае. Это следует из перестановочных соотношений (43) (мы игнорируем представления, отличные от представления Фока). В то же время, если не обращаться к адиабатической гипотезе, то из (49) и (50) трудно сделать какое-либо заключение о спектре гамильтониана $\mathbf{P}_0=\mathbf{P}_0^A+\mathbf{P}_0^\Psi$. Не видно даже, является ли он положительным. Отыскание спектра и собственных функций $\mathbf{P}_0$ - одна из наиболее важных и в то же время трудных задач квантовой теории поля. При ее решении эксплуатируется весь арсенал приближенных методов.

Оставим в стороне эту проблему и обратимся к построению полного базиса в гильбертовом пространстве. Очевидно, что в произвольный (фиксированный) момент времени t базис можно построить, как в свободном случае, по рецептам (20) или (25), если там под a_μ^+ , b^+ и c^+ понимать $a_\mu^+(p,t)$, $b^+(p,s,t)$ и $c^+(p,s,t)$, а n_μ взять в виде $n_\mu=\{0,0,0,i\}$. Разумеется, и в гайзенберговской картине метрика гильбертова пространства неопределенная, так как среди этих состояний снова есть состояния и с положительной, и с отрицательной нормами (отрицательными нормами обладают состояния с нечетным числом " временных квантов"). Теперь перестроим базис, чтобы выделить состояния, удовлетворяющие д.у Ферми-Гупты (2).

В терминах операторов $a_\mu(p,t)$ и $a_\mu^+(p,t)$ положительно- и отрицательно-частотные части $\partial_\mu A_\mu(x)$ записываются следующим образом:

$$(\partial_\mu A_\mu(x))^{(-)}=i(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int\frac{dp}{2|p|}e^{ipx}\left[p_m a_m(p,t)-i\partial_4 a_4(p,t)\right]= \qquad (52а)$$

---

x/ Этим путем упорядочиваются операторы, относящиеся к одному моменту времени. Другие определения $\mathcal{N}$ -произведения гайзенберговских операторов обсуждались в /31/. Еще одна возможность следует из разложимости гайзенберговских операторов по in- и out-операторам поля /20/.

$$= i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dp}{2|p|} e^{ipx} \left[p_m a_m(p,t) - |p| a_0(p,t) + j_0(p,t) \right], \tag{52б}$$

$$\left(\partial_\mu A_\mu(x)\right)^{(+)} = -i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dp}{2|p|} e^{ipx} \left[-p_m a_m^+(-p,t) + i\partial_4 a_4^+(-p,t) \right] = \tag{53а}$$

$$= i(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dp}{2|p|} e^{ipx} \left[-p_m a_m^+(-p,t) - |p| a_0^+(-p,t) + j_0(p,t) \right], \tag{53б}$$

где выражения (52б) и (53б) получаются из выражений (52а) и (53а) с помощью соотношения (44) и уравнения $\Box A_4 = -j_4$. Комбинируя уравнение Даламбера (10) для $\partial_\mu A_\mu$ и соотношение (44), можно показать, что

$$p_m a_m(p,t) - i\partial_4 a_4(p,t) = e^{-i|p|t} \left[p_m a_m(p,0) - i\partial_4 a_4(p,0) \right], \tag{54}$$

$$p_m a_m^+(p,t) + i\partial_4 a_4^+(p,t) = e^{i|p|t} \left[p_m a_m^+(p,0) + i\partial_4 a_4^+(p,0) \right], \tag{55}$$

чем подтверждается, что $\left(\partial_\mu A_\mu(x)\right)^{(\mp)}$ действительно являются положительно- и отрицательно-частотными частями $\partial_\mu A_\mu(x)$ и что они, как и $\partial_\mu A_\mu(x)$, удовлетворяют свободному уравнению Даламбера.

Неприятное отличие $\left(\partial_\mu A_\mu\right)^{(\mp)}$ от $\partial_\mu A_\mu$ состоит в том, что, как видно из (52б) и (53б),

$$\left[\left(\partial_\mu A_\mu(x)\right)^{(\mp)}, \psi(y) \right]_{x_0 = y_0} \neq 0, \tag{56}$$

так что в гайзенберговской картине д.у. Ферми-Гупты (2) оказывается уже не столь простым: в p,t-представлении

$$\left[p_m a_m(p,t) - |p| a_0(p,t) + j_0(p,t) \right] \Psi = 0 \tag{57}$$

оно скорей напоминает условие Швингера-Блейлера (4). Однако с помощью преобразования

$$\Psi = V(t)\overline{\Psi}(t) , \tag{58}$$

где t -некоторый фиксированный момент времени, а

$$V(t) = e^{i\int dx\, j_0(x,t)\Delta^{-1}\partial_n A_n(x,t)} =$$

$$= e^{-\int \frac{dp}{2|p|} j_0(p,t)\frac{p_n}{p^2}[a_n(-p,t)+a^+(p,t)]} , \tag{59}$$

искомые состояния Ψ можно выразить через состояния $\overline{\Psi}(t)$, подчиняющиеся простому условию

$$[p_m a_m(p,t) - |p| a_0(p,t)]\overline{\Psi}(t) = 0 . \tag{60а}$$

В x-представлении его можно записать в виде x/

$$\Big[(\partial_\mu A_\mu(x))^{(-)} + \int\limits_{y_0=t} dy\, \Delta_0^{(-)}(x-y) j_0(y)\Big]\overline{\Psi}(t) = 0 . \tag{60б}$$

Таким образом, искомый базис гайзенберговских состояний, удовлетворяющих д.у. Ферми-Гупты (2), можно построить в виде

$$\Psi_n \sim V(t)\overline{\Psi}_n , \tag{61}$$

где $\overline{\Psi}_n$ - состояния вида (25а) и (25б) с заменами

$$a_\mu^+(p) \to a_\mu^+(p,t), \qquad p a^+(p) \to p_m a_m^+(p,t) - |p| a_0^+(p,t) ,$$

$$b^+(p,s) \to b^+(p,s,t), \qquad c^+(p,s) \to c^+(p,s,t) , \tag{62}$$

---

x/ В (60б) заодно охвачен случай несовпадающих времен x_0 и t . Для получения (60б) в квадратных скобках в (60а) прибавляется и вычитается $j_0(p,t)$, после чего с учетом (54) получаем

$$[p_m a_m(p,x_0) - |p| a_0(p,x_0) + j_0(p,x_0) - e^{-i|p|(x_0-t)} j_0(p,t)]\overline{\Psi}(t) = 0 .$$

причем вектор n_μ должен быть взят в виде $n_\mu = \{C,0,0,i\}$ (см. Примечание на стр. 15) x/. Свойства так построенного базиса те же, что и в свободном случае (см. п.3). Соотношения типа (26) и (28) теперь суть следствия

$$[\partial_\mu A_\mu(x), Q] = 0\,, \tag{63а}$$

$$[\partial_\mu A_\mu(x), P_\nu] = -i\partial_\nu\partial_\mu A_\mu(x)\,, \tag{63б}$$

$$[\partial_\mu A_\mu(x), M_{\nu\lambda}] = -i(x_\nu\partial_\lambda - x_\lambda\partial_\nu)\partial_\mu A_\mu(x)\,. \tag{63в}$$

Из векторов базиса могут быть построены физические состояния.

Мы не можем согласиться с Галлером и Ландовицем /6/, опровергающими для $(\partial_\mu A_\mu)^{(+)}$ уравнение (10) и условие скалярности (63в). Затруднение было бы понятно, если бы под $\chi^{(+)}$ (т.е. под $(\partial_\mu A_\mu)^{(-)}$) подразумевалось не то, что обычно, а $\int \frac{dp}{2|p|} e^{ipx}[p_m a_m(p,t) - |p| a_0(p,t)]$ (в наших обозначениях). Тогда д.у. $\chi^{(+)}|n\rangle = 0$ было бы равноценно условию (60), а новое д.у. Галлера и Ландовица совпадало бы с общепринятым в гайзенберговской картине д.у. Ферми-Гупты (2), несмотря на запись в форме д.у. Швингера-Блейлера (что ясно из (52б)),

5. Замечания о квантованных теориях Янга-Миллса и Эйнштейна

Остановимся на родственных квантовой электродинамике теориях – на квантовой теории Янга-Миллса /7-9/ для безмассовых векторных полей $\rho_{\ell\mu}(x)$ (ℓ – номер поля) и на квантовой теории тяготения

---

x/ Нетрудно распространить данное рассмотрение на произвольные n_μ. Для этого нужно взамен (41) и (42) произвести фурье-разложение A_μ, $(n\partial)A_\mu$ и ψ по переменным $x_\mu + n_\mu(nx)$, ортогональным n_μ, а перестановочные соотношения задать на поверхности $nx = const$ (вместо $t = const$ в (43)). Замены (62) выглядели бы следующим образом:

$$a^+_\mu(p) \to a^+(p_\nu + n_\nu(np), -nx), \quad pa^+ \to [p_\mu + n_\mu(np)]a^+_\mu + \sqrt{p^2 + (np)^2}\, na^+$$

и т.д.

как теории безмассового симметричного тензорного поля $h_{\mu\nu}(x)$ /10-15/. Фейнман /12/ и Фаддеев /9/ обратили внимание на связанную с неабелевостью калибровочной группы специфическую трудность этих теорий – на неунитарность "обычной" S-матрицы. Фаддеев преодолел эту трудность в теории Янга-Миллса при помощи метода функционального интегрирования. Представляется важным исследовать эту проблему в рамках традиционного метода Ферми-Гупты. Здесь мы ограничимся лишь несколькими замечаниями.

Теория Янга-Миллса. Аналог формулировки Ферми-Гупты основывается в теории Янга-Миллса (и ее обобщениях) на лагранжиане /7/

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu \rho_{i\nu}\partial_\mu \rho_{i\nu} - \cdots$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_{ijk} f_{i\mu\nu}\rho_{j\mu}\rho_{k\nu} - \frac{1}{4}\alpha_{mni}\alpha_{mlj}\rho_{i\mu}\rho_{j\mu}\rho_{k\nu}\rho_{\ell\nu} + \cdots, \tag{64}$$

где во вторую строку выделен лагранжиан взаимодействия, точки стоят вместо возможных вкладов других полей, $f_{i\mu\nu} = \partial_\mu \rho_{i\nu} - \partial_\nu \rho_{i\mu}$, а α_{ijk} пропорциональны константе связи и ε_{ijk} в $SU(2)$, f_{ijk} Гелл-Манна в $SU(3)$ и т.д.

В свободном случае (и в представлении взаимодействия) операторы $\rho_{\ell\mu}(x)$ представим как

$$\rho_{\ell\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int \frac{d\mathbf{p}}{2p_0}\left[a_{\ell\mu}(\mathbf{p})e^{ipx} + a^+_{\ell\mu}(\mathbf{p})e^{-ipx}\right] \qquad (p_0 = |\mathbf{p}|) \tag{65}$$

с перестановочными соотношениями

$$[a_{\ell\mu}(\mathbf{p}), a_{k\nu}(\mathbf{q})] = 0, \quad [a_{\ell\mu}(\mathbf{p}), a^+_{k\nu}(\mathbf{q})] = \delta_{\ell k}\delta_{\mu\nu}2p_0\delta(\mathbf{p}-\mathbf{q}). \tag{66}$$

Для исключения нефизических состояний на векторы состояния естественно наложить д.у. типа условия Ферми-Гупты

$$\partial_\mu \rho^{(-)}_{\ell\mu}(x)\Psi = 0, \qquad \text{или} \qquad pa_\ell \Psi = 0. \tag{67}$$

Очевидно, полная система состояний может быть построена точно так же, как в п.3, с единственным отличием, что каждый оператор рождения снабжается своим индексом ℓ, принимающим три значения в теории Янга-Миллса или более в ее обобщениях. Именно, условиями (6'') разрешены

1) физические состояния Φ_n типа (25а) с участием поперечных квантов, рождаемых операторами $e_\mu^{(i)} a^+_{\ell\mu}(p) \equiv e^{(i)} a^+_\ell(p) \quad (i=1,2)$,

2) безвредный "фон" - состояния Ω_n типа (25б), содержащие, кроме того, один или более скалярных квантов, рождаемых $p a^+_\ell(p)$,

и запрещены

3) состояния с временны́ми квантами (типа (25в)), рождаемыми операторами $n a^+_\ell(p)$.

Свободные уравнения и д.у. инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\rho_{\ell\mu}(x) \to \rho'_{\ell\mu}(x) = \rho_{\ell\mu}(x) + \partial_\mu \lambda_\ell(x), \qquad \Box \lambda_\ell(x) = 0 \tag{68}$$

(остальные поля либо вообще не преобразуются, либо преобразуются с константными λ_ℓ).

Обычная матрица $S = S(\infty, -\infty)$, имеющая вид T^* -экспоненты, формально унитарна x/, но не обладает чисто аддитивной группой инвариантности (68). Отсюда неочевидна физическая унитарность, при которой в промежуточных состояниях в условии унитарности должны работать исключительно поперечные кванты (кванты со спиральностями ± 1). Поэтому целесообразно так преобразовать обычную S-матрицу, чтобы новая ("хорошая") S-матрица обладала физической унитарностью в явном виде.

Предположим, что "хорошая" S-матрица, форм-инвариантная в каком-то смысле относительно (68), может быть построена (причем в рамках адиабатической гипотезы д.у. для $\Psi(\pm\infty)$ имеет вид (67), а система физических состояний совпадает с базисом, о котором говорилось выше). Однако все же ситуация не будет столь простой, как в элек-

---

x/ Во втором порядке по константе связи это можно проверить с помощью формул (П.9) и (П.10) работы /8/.

тродинамике. Член $\mathcal{S}$ -матрицы первого порядка согласно (64) имеет вид

$$\mathcal{S}_1 = \frac{i}{2} \alpha_{ijk} \int d^4x \, f_{i\mu\nu} \rho_{j\mu} \rho_{k\nu}(x) \tag{69}$$

(в оригинальной теории Янга-Миллса даже независимо от вида исходного лагранжиана он может быть выбран единственным образом x/). Он инвариантен относительно калибровочных преобразований (68) лишь с точностью до члена, содержащего $\partial_\nu \rho_{i\nu}$,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_1 &= i\alpha_{ijk} \int d^4x \, \partial_\nu \rho_{i\nu} \rho_{j\mu} \partial_\mu \lambda_k(x) = \\ &= i\alpha_{ijk} \int d^4x \left(\partial_\nu \rho_{i\nu}^{(+)} \rho_{j\mu} + \rho_{j\mu} \partial_\nu \rho_{i\nu}^{(-)}\right) \partial_\mu \lambda_k(x) , \end{aligned} \tag{70a}$$

а строго - лишь в обкладках между состояниями, удовлетворяющими д.у. (68). Только в этом смысле может быть форм-инвариантной относительно (68) и $\mathcal{S}$ -матрица в целом

$$\mathcal{S}(\rho'_{\ell\mu}) \cong \mathcal{S}(\rho_{\ell\mu}) \tag{70б}$$

С помощью перестановочных соотношений

$$[pa_\ell, \rho_{k\mu}(x)] = \delta_{\ell k} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} p_\mu e^{-ipx} , \quad [pa_\ell^+, \rho_{k\mu}(x)] = -\delta_{\ell k} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} p_\mu e^{ipx} \tag{71}$$

имеем

$$[pa_\ell^+, \mathcal{S}_1] = -i (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \alpha_{ij\ell} \int d^4x \left(\partial_\nu \rho_{i\nu}^{(+)} \rho_{j\mu} + \rho_{j\mu} \partial_\nu \rho_{i\nu}^{(-)}\right) p_\mu e^{ipx} ,$$

$$[qa_k^+ [pa_\ell^+, \mathcal{S}_1]] = -(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \alpha_{ik\ell} \int d^4x \, \partial_\nu \rho_{i\nu}(x) (pq) e^{i(p+q)x} ,$$

---

x/ А восстановление членов более высоких порядков можно произвести по методу Штюкельберга, Ривье и др. /32/ и Боголюбова и Ширкова /18/ с помощью условий унитарности и причинности.

$$[r a_j^+ [q a_k^+ [p a_l^+, S_1]]] = 0 \quad , \ \ldots \tag{72}$$

Этих соотношений и такого рода соотношений в высших порядках достаточно для доказательства (29) и (34) (Приложение). Вместе с соотношениями типа (26), или (28) они свидетельствуют, что реально существовать, испускаться и поглощаться способны только поперечные кванты Янга-Миллса.

В гайзенберговской картине из (64) следует, что оператор $\partial_\mu \rho_{l\mu}$ подчиняется не свободному уравнению Даламбера, а уравнению

$$\Box \partial_\mu \rho_{i\mu} = -\alpha_{ijk} \partial_\mu \partial_\nu \rho_{j\nu} \rho_{k\mu} \ . \tag{73}$$

По-видимому, д.у. в этом случае следует записать в виде

$$\left(\partial_\mu \rho_{i\mu}(x)\right)^{(0)(-)} \Psi = 0 \ , \tag{74}$$

где $\left(\partial_\mu \rho_{i\mu}\right)^{(0)}$ есть свободная часть $\partial_\mu \rho_{i\mu}$ (решение (73) с правой частью нуль), например, **in**- или **out**-оператор.

Т е о р и я Э й н ш т е й н а. Метод Ферми-Гупты применительно к квантовой теории тяготения опирается на лагранжиан [10,27,14,15]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial_\mu h_{\nu\lambda} + \frac{1+2p+2p^2}{4(1+2p)^2} \partial_\mu h_{\nu\nu} \partial_\mu h_{\lambda\lambda} + \mathcal{L}_{вз} \ , \tag{75}$$

где p - численный параметр $\left(\neq -\frac{1}{2}\right)$, характеризующий неоднозначность в форме записи свободного уравнения [14]. Лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{вз}$ представляет бесконечный ряд по степеням константы связи. Полную информацию о нем в классическом и квантовом случаях можно найти в работах [14,15].

Свободное поле $h_{\mu\nu}(x)$ в терминах операторов уничтожения $\gamma_{\mu\nu}(k)$ и рождения $\gamma^+_{\mu\nu}(k)$ записывается как

$$h_{\mu\nu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{dk}{2k_0} \left[\gamma_{\mu\nu}(k) e^{ikx} + \gamma^+_{\mu\nu}(k) e^{-ikx}\right] \quad (k_0 = |\mathbf{k}|) \tag{76}$$

с перестановочными соотношениями

$$[\gamma_{\mu\nu}(k),\gamma^{+}_{\lambda\rho}(q)]=\left(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho}+\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}-(1+2p+2p^2)\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}\right)k_0\delta(k-q). \qquad (77)$$

Вакуум Ψ_0 с учетом неопределенной метрики определяется как

$$\gamma_{\mu\nu}(k)\Psi_0=0, \qquad (78)$$

а аналог условия Ферми-Гупты для исключения лишних состояний в виде /15/

$$\left(\partial_\mu h_{\mu\nu}-\frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu h_{\mu\mu}\right)^{(-)}\Psi=0, \text{ или } \left(k_\mu\gamma_{\mu\nu}-\frac{1+p}{2(1+2p)}k_\nu\gamma_{\mu\mu}\right)\Psi=0. \qquad (79)$$

(У Гупты /10/ $p=-1$. Д.у. для $h_{\mu\mu}$, обсуждавшееся им, излишне /13,15/).

Базис состояний, удовлетворяющих условию (79), может быть построен в духе п.3. Д.у. разрешает

1) состояния Φ_n , рождаемые операторами рождения

$$e^{(1)}_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(1)}_\nu-e^{(2)}_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(2)}_\nu(k), \qquad e^{(1)}_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(2)}_\nu(k) \qquad (80)$$

(записывающими гравитоны - кванты со спиральностями ± 2);

2) безвредный "фон" - состояния Ω_n , содержащие независимо или наряду с гравитонами один или более квантов, рождаемых операторами

$$k_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(1)}_\nu,\ k_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(2)}_\nu,\ k_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}k_\nu,\ e^{(1)}_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(1)}_\nu+e^{(2)}_\mu\gamma^{+}_{\mu\nu}e^{(2)}_\nu-\frac{p}{1+2p}\gamma^{+}_{\mu\mu} \qquad (81)$$

(четыре оператора вместо одного pa^{+} в электродинамике), и запрещает

3) состояния с участием квантов, рождаемых операторами

$$n_\mu \gamma^+_{\mu\nu} e^{(1)}_\nu , \quad n_\mu \gamma^+_{\mu\nu} e^{(2)}_\nu , \quad n_\mu \gamma^+_{\mu\nu} k_\nu , \quad n_\mu \gamma^+_{\mu\nu} n_\nu . \tag{82}$$

К числу последних принадлежат все состояния с отрицательными нормами.

Каждый оператор рождения (81), подобно pa^+, коммутирует со всеми операторами рождения и уничтожения типа (80) и (81), в том числе и с эрмитовски сопряженным себе. Другими словами, в пространстве, порождаемом операторами (80) и (81), последние выступают как c-числа.

Все состояния Ω обладают нормой нуль и ортогональны друг другу и состояниям Φ, т.е. снова выполняются соотношения (26а). Матричные элементы операторов физических величин между состояниями, удовлетворяющими д.у. (79), могут быть отличны от нуля только в том случае, если оба состояния принадлежат к числу состояний Φ, например, опять имеют место соотношения (26б) и (26в) или (28б) и (28в). Добавление примеси состояний Ω не влияет на результат (калибровочная инвариантность в гильбертовом пространстве) чем, как и в электродинамике, гарантируется несущественность выбора вектора n_μ и отсюда – лоренц-инвариантность теории.

Свободные уравнения и д.у. инвариантны относительно группы чисто аддитивных калибровочных преобразований

$$h_{\mu\nu}(x) \to h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \lambda^\nu(x) + \partial_\nu \lambda^\mu(x) + p\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma \lambda^\sigma(x) , \qquad \Box \lambda^\mu = 0 . \tag{83}$$

Естественно ожидать, что, как в электродинамике и теории Янга-Миллса, матрица $S \equiv S(\infty, -\infty)$ x/ может быть выбрана форм-инвариантной относительно этих преобразований, во всяком случае в обкладках между состояниями, удовлетворяющими д.у. (79),

$$S(h'_{\mu\nu}) \cong S(h_{\mu\nu}) \tag{84a}$$

---

x/ Пропагатор гравитона при различных p см. в /15/.

или инфинитезимально

$$\int d^4x \left(\partial_\mu \lambda^\nu + \partial_\nu \lambda^\mu + p\,\delta_{\mu\nu}\partial_\sigma \lambda^\sigma\right) \frac{\delta}{\delta h_{\mu\nu}(x)} S \cong 0 \,. \tag{84б}$$

С калибровочной инвариантностью связано, что коммутаторы операторов (81) с S -матрицей равны нулю по крайней мере с точностью до членов, которые обращаются в нуль в обкладках между состояниями, удовлетворяющими д.у.,

$$[(81), S] \cong 0, \quad [(81), [(81), S]] \cong 0, \ldots \tag{85}$$

Последние вычисляются с помощью перестановочных соотношений

$$[k_\mu \gamma_{\mu\nu} e_\nu^{(j)}, h_{\lambda\rho}(x)] = \frac{1}{2}\left(k_\lambda e_\rho^{(j)} + k_\rho e_\lambda^{(j)}\right)(2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ikx}, \quad (j = 1,2)$$

$$[k_\mu \gamma_{\mu\nu} k_\nu, h_{\lambda\rho}(x)] = k_\lambda k_\rho (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ikx},$$

$$\left[e_\mu^{(1)} \gamma_{\mu\nu} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} \gamma_{\mu\nu} e_\nu^{(2)} - \frac{p}{1+2p}\gamma_{\mu\mu}, h_{\lambda\rho}(x)\right] = \tag{86}$$

$$= -\left(\frac{k_\lambda n_\rho + k_\rho n_\lambda}{nk} + \frac{k_\lambda k_\rho}{(nk)^2} + p\,\delta_{\lambda\rho}\right)(2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ikx} \,.$$

Свойств (85) достаточно для обоснования соотношений вида (29) и (34). Вместе с соотношениями типа (26) и (28) они означают, что реально существовать, испускаться и поглощаться способны лишь два сорта тензорных квантов – гравитоны. Этот факт – следствие, как и в электродинамике, калибровочной инвариантности и д.у.

Подобно $\partial_\mu \varphi_\mu(x)$ в теории Янга-Миллса величина $\partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu h_{\mu\mu}$ в гайзенберговском представлении подчиняется сложному нелинейному уравнению /15/. По-видимому, д.у. все равно должно быть записано в терминах решения свободной части уравнения

$$\left(\partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)}\partial_\nu h_{\mu\mu}\right)^{(0)(-)} \Psi = 0 \,. \tag{87}$$

Автор искренне признателен Р.А. Асанову, М.А. Маркову, В.И. Огиевецкому, М.И.Широкову за обсуждения и ценные замечания. Для автора были весьма полезны стимулирующие дискуссии с Е.А.Ивановым и В.Н.Первушиным по вопросу унитарности и калибровочной инвариантности S -матрицы в теории Янга-Миллса.

Приложение

Условие Лоренца

$$p_\mu v_\mu = 0 \tag{П.1}$$

при любом векторе p_μ имеет два независимых пространственноподобных решения, скажем, $e^{(1)}_\mu$ и $e^{(2)}_\mu$. Пусть они выбраны взаимно ортогональными. Третий ортогональный к p_μ и $e^{(i)}_\mu$ вектор ($e^{(3)}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\lambda p_\rho$) будет /17/

пространственноподобен, если p_μ - времениподобен,

времениподобен, если p_μ -пространственноподобен,

и изотропен и коллинеарен p_μ, если p_μ изотропен.

Нас инетерсует именно изотропный вектор p_μ. Ситуация в этом случае непривычная. Так, общее решение (П.1) при изотропном p_μ есть /33,17/

$$v_\mu = a e^{(1)}_\mu + b e^{(2)}_\mu + c p_\mu \,, \tag{П.2}$$

и входящих сюда векторов вместе с p_μ не хватает до полного базиса в пространстве Минковского. Добавим фиксированный посторонний времениподобный вектор n_μ, причем будем подразумевать, что $e^{(1)}_\mu$ и $e^{(2)}_\mu$ выбраны ортогональными к нему. Получаем базис

$$e^{(1)}_\mu(p), \quad e^{(2)}_\mu(p), \quad p_\mu, \quad n_\mu \tag{П.3}$$

со свойствами (24). Три первые вектора суть решения условия Лоренца (П.1), а последний им запрещен [x/]. Как любой базис, содержащий изотропный орт, он неортогональный.

Если одночастичные состояния, удовлетворяющие д.у. Ферми-Гупты (22), искать в виде $v_\mu a^+_\mu(p)\Psi_0$, то с помощью (19) и (21) задача сводится к разрешению условия Лоренца (П.1). В результате приходим к базису (в гильбертовом пространстве) одночастичных состояний

$$e^{(1)}a^+(p)\Psi_0\,,\quad e^{(2)}a^+(p)\Psi_0\,,\quad pa^+(p)\Psi_0\,,\quad na^+(p)\Psi_0\,, \tag{П.4}$$

из которых первые три разрешены, а последнее запрещено д.у. (22). Первые два состояния "пространственноподобные" (норма >0), третье "изотропное" ($\Psi_0^+(pa)(pa^+)\Psi_0 \sim p^2=0$), четвертое "времениподобное" (норма <0). Естественно, базис снова неортогональный: времениподобное состояние не ортогонально изотропному – $\Psi_0^+(na)(pa^+)\Psi_0 \sim \sim np \neq 0$. Аналогична ситуация и с многочастичными состояниями.

При разложении произвольного вектора v_μ из подпространства (П.2) по $e^{(1)}_\mu$, $e^{(2)}_\mu$ и p_μ коэффициент c остается совершенно произвольным – калибровочная инвариантность. В рамках этого произвола от $e^{(i)}_\mu$, ортогональных n_μ $(pe^{(i)}=ne^{(i)}=0)$, всегда можно перейти к $e^{(i)\prime}_\mu$, ортогональным любому другому времениподобному вектору n'_μ $(pe^{(i)\prime}=n'e^{(i)\prime}=0)$

$$e^{(i)}_\mu \to e^{(i)\prime}_\mu = e^{(i)}_\mu + c^{(i)}p_\mu\,, \qquad c^{(i)} = -\frac{n'e^{(i)}}{n'p}\,, \tag{П.5}$$

т.е. конкретный выбор вектора n_μ несущественен. Этот вывод, очевидно, распространяется и на состояния (П.4) и (25) (ср. конец п.3). Теория оказывается лоренц-инвариантной, несмотря на употребление постороннего вектора [xx/].

[x/] По теореме: ни один времениподобный вектор не ортогонален изотропному. Необычность ситуации с изотропными векторами иллюстрируется также теоремой: если два изотропных вектора p_μ и q_μ ортогональны $(pq=p^2=q^2=0)$, то они коллинеарны: $p_\mu \sim q_\mu$.

[xx/] Так, первые три состояния (П.4) образуют лоренц-инвариантное подпространство.

Соотношение полноты базиса (П.3) есть

$$\sum_{i=1,2} e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)} + \frac{[p_\mu + (np)n_\mu][p_\nu + (np)n_\nu]}{p^2 + (np)^2} - n_\mu n_\nu = \delta_{\mu\nu} \,, \qquad \text{(П.6)}$$

причем оно верно и при неизотропном p_μ. Соотношение полноты базисов (20) и (25) в гильбертовом пространстве можно записать в виде

$$\sum_N \Psi_N \otimes \eta_N \Psi^+ = \qquad \text{(П.7а)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \frac{dp_1}{2p_{10}} \cdots \frac{dp_m}{2p_{m0}} a^+_{\mu_1}(p_1) \cdots a^+_{\mu_m}(p_m) \sum_\alpha \Psi_\alpha \otimes \Psi_\alpha^+ a_{\mu_m}(p_m) \cdots a_{\mu_1}(p_1) = \qquad \text{(П.7б)}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int \frac{dp_1}{2p_{10}} \cdots \frac{dp_m}{2p_{m0}} \eta(i_1 \cdots i_m) a^+(p_1, i_1) \cdots a^+(p_m, i_m) \sum_\alpha \Psi_\alpha \otimes \Psi_\alpha^+ a(p_m, i_m) \cdots a(p_1, i_1) = \qquad \text{(П.7в)}$$

$$= 1 \,,$$

где используются операторы рождения

$$a^+(p,i)\ (i=1,2,3,0): \ e^{(1)} a^+(p), \ e^{(2)} a^+(p), \ \frac{p_\mu + (np)n_\mu}{\sqrt{p^2 + (np)^2}} a^+_\mu(p), \ -n a^+(p) \qquad \text{(П.8)}$$

(третий – оператор рождения "продольного" кванта), а по $i_1 \cdots i_m$ подразумевается суммирование. "Метрический тензор" $\eta = 1$ при четном и -1 при нечетном числе индексов i, равных 0 (неопределенная метрика). Соотношение полноты для одних состояний Φ_n имеет вид (П.7в), но с $\eta = 1$ и с суммированием по i только от 1 до 2.

Теорема о редукции суммы по промежуточным состояниям. Пусть Ψ_ℓ и Ψ_k – состояния, удовлетворяющие д.у. Ферми-Гупты (2), или (22), а A и B – операторы, коммутирующие с $\partial_\nu A_\nu(x)$

$$[\partial_\nu A_\nu(x), A] = 0 \,, \qquad [\partial_\nu A_\nu(x), B] = 0 \,. \qquad \text{(П.9)}$$

Тогда

$$(\Psi_k, AB\Psi_\ell) = \sum_N (\Psi_k, A\,\Psi_N)\eta_N(\Psi_N, B\Psi_\ell) = \qquad (\text{П.10а})$$

$$= \sum_n (\Psi_k, A\Psi_n)(\Psi_n, B\Psi_\ell), \qquad (\text{П.10б})$$

где последняя сумма есть сумма только по состояниям, удовлетворяющим д.у. и потому обладающим неотрицательной нормой (в то время как среди состояний Ψ_N присутствуют состояния как удовлетворяющие д.у., так и не удовлетворяющие ему, как с положительными, так и с отрицательными нормами).

Для доказательства заметим, что (П.9) означает, что

$$[p\alpha, A] = [p\alpha^+, A] = 0, \qquad [p\alpha, B] = [p\alpha^+, B] = 0. \qquad (\text{П.11})$$

Подставим в (П.10а) сумму в форме (П.7в). Выделим из $\alpha^+(p_1,3)$ и $\alpha(p_1,3)$ операторы $p_1\alpha^+$ и $p_1\alpha$, перетащим их с помощью (П.11) через A и B и учтем д.у. После этого вклад продольного кванта сократится с вкладом временного (при $p^2=0$), и сумма (П.10а) сведется к

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\frac{dp_1}{2p_{10}}\cdots\frac{dp_m}{2p_{m0}}\sum_\alpha\Big(\Psi_k, A\,(e^{(i_1)}\alpha^+(p_1))\,\alpha^+(p_2,i_2)\cdots\alpha^+(p_m,i_m)\Psi_\alpha\Big)\cdot$$

$$\cdot\,\eta(i_2\cdots i_m)\Big(\Psi_\alpha, \alpha(p_m,i_m)\cdots\alpha(p_2,i_2)(e^{(i_1)}\alpha(p_1))B\,\Psi_\ell\Big), \qquad (\text{П.12})$$

где по i_1 ведется суммирование уже только от 1 до 2. Продолжая этот процесс дальше, получаем

$$(\Psi_k, AB\Psi_\ell) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int\frac{dp_1}{2p_{10}}\cdots\frac{dp_m}{2p_{m0}}\sum_\alpha \qquad (\text{П.13})$$

$$\Big(\Psi_k, A\,(e^{(i_1)}\alpha^+(p_1))\cdots(e^{(i_m)}\alpha^+(p_m))\Psi_\alpha\Big)\Big(\Psi_\alpha, (e^{(i_m)}\alpha(p_m))\cdots(e^{(i_1)}\alpha(p_1))B\,\Psi_\ell\Big),$$

что и утверждалось. Операторы, коммутирующие с $\partial_\nu A_\nu(x)$, проводились в п.2. К их числу можно добавить $S = S(\infty, -\infty)$ (в рамках адиабатической гипотезы).

Для справедливости утверждения теоремы необязательно, чтобы $[\partial_\nu A_\nu(x), A]$ и $[\partial_\nu A_\nu(x), B]$ равнялись нулю. Достаточно, чтобы все коммутаторы

$$
\begin{array}{ll}
[\partial_\nu A_\nu(x), A], & [\partial_\nu A_\nu(x), B], \\
[\partial_{\nu_2} A_{\nu_2}(x_2), [\partial_{\nu_1} A_{\nu_1}(x_1), A]], & [\partial_{\nu_2} A_{\nu_2}(x_2), [\partial_{\nu_1} A_{\nu_1}(x_1), B]], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[\partial_{\nu_n} A_{\nu_n}(x_n), \ldots [\partial_{\nu_1} A_{\nu_1}(x_1), A]] \ldots], & [\partial_{\nu_n} A_{\nu_n}(x_n), \ldots [\partial_{\nu_1} A_{\nu_1}(x_1), B]] \ldots] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\qquad (\text{П}.14)
$$

были равны нулю в обкладках между состояниями, удовлетворяющими д.у. Ферми-Гупты. С такой ситуацией мы встречались в тексте.

Очевидно, что такая же теорема справедлива и в других обсуждавшихся теориях, в которых вместо одного оператора $\partial_\mu A_\mu$ имелось по нескольку: $\partial_\mu \rho_{i\mu}$ в теории Янга-Миллса и $\partial_\mu h_{\mu\nu} - \frac{1+p}{2(1+2p)} \partial_\nu h_{\rho\rho}$ в теории Эйнштейна.

При обсуждении $S(t, t_0)$ мы встретились с обобщением теоремы, когда место $\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x)$ занимали операторы $\partial_\mu A_\mu^{(\mp)}(x) - \int dy\, \Delta_0^{(\mp)}(x-y) j_0(y)$, причем вместо коммутации с $S(t, t_0)$ имело место соотношение (40в).

Теорема очевидным образом переносится и на гайзенберговское представление, где она, в частности, необходима при сведении уравнений теории Ферми-Гупты к уравнениям в калибровке излучения /17/. На эту теорему фактически опирается доказательство положительной определенности спектральной функции для среднего по вакууму от произведения токов и других спектральных функций /34,17/.

Литература

1. E.Fermi. Rev.Mod.Phys., 4, 131 (1932).
2. S.N.Gupta. Proc.Phys.Soc., A63, 682 (1950); Progr. Theor. Phys., 21, 581 (1959).
3. J.Schwinger. Phys.Rev., 74, 1439 (1948).
4. K.Bleuler. Helv.Phys.Acta, 23, 567 (1950).
5. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения, ИЛ, Москва, 1957, стр.155.
6. K.Haller, L.Landovitz. Phys.Rev., 171, 1749-1761 (1968); Radiative Corrections to Bound States in Quantum Electrodynamics, preprint, 1969; Catostrophic Events and Gauge Invariance, preprint 1969.
7. C.N.Yang, R.L.Mills. Phys.Rev., 96, 191 (1954); S.L.Glashow, M.Gell-Mann. Ann. Phys., (N.Y.), 15, 437 (1961); J.Schwinger. Phys.Rev., 125, 1033 (1962); 127, 324. (1962);

   В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Ann. Phys. (N.Y.), 25, 358 (1963); Nucl.Phys., 76, 677 (1966).
8. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 46, 2102. (1964).
9. Л.Д. Фаддеев, В.Н. Попов. Phys.Lett., 25B, 29 (1967); Препринт ИТФ-67-36, Киев, 1967.
10. S.N. Gupta. Proc.Phys.Soc., A65, 161, 608 (1952); Rev.Mod. Phys., 29, 334 (1957).
11. B.S.Dewitt. Rev.Mod.Phys., 29, 377 (1957); J.A.Wheeler. Ann. Phys., (N.Y.), 2, 604 (1957); S.Deser. Rev.Mod.Phys., 29, 417 (1957); S.W.Misner. Rev.Mod.Phys., 29, 497 (1957); R.Arnowitt, S.Deser. Phys.Rev., 113, 745 (1959); P.A.M. Dirac. Proc.Roy. Soc., A246, 333 (1958); Phys.Rev., 114, 924 (1959); И.Ю. Кобзарев, Л.Б. Окунь. ЖЭТФ, 43, 1904 (1962); Сборник "Recent developments in general relativity", Pergamon Press, 1962, с. 175, 251; Сборник "Гравитация и относительность", Мир, Москва, 1965,стр.435,468; J.Schwinger. Phys.Rev., 130, 1253, (1963); 132, 1317, (1963); В.И. Захаров. ЖЭТФ, 48, 303 (1965).

12. R.P.Feynman. Acta Phys. Polon., 24, 697 (1963).

13. K.Just. Nuovo Cim., 34, 567 (1964).

14. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Труды XII Межд. конференции по физике высоких энергий, 1964. Дубна, т.1, стр. 755; Ann.Phys., (N.Y.), 35, 167 (1965).

15. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2692, Дубна, 1966.

16. S.N. Gupta. Can.Journ.Phys., 35, 961 (1957).

17. И.В. Полубаринов. Диссертация, ЛТФ, Дубна, 1964. Дополнение ; Препринт ОИЯИ, Р-2421, Дубна, 1965.

18. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ, Москва, 1957.

19. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, Физматгиз, Москва, 1959.

20. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, Москва, 1963.

21. Р. Стритер, А. Вайтман. РСТ, спин, статистика и все такое. Наука. Москва, 1966; А. Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, Наука, 1968.

22. E.C.G.Stueckelberg. Phys.Rev., 81, 130 (1951).

23. М.И. Широков. ЯФ, 4, 1077 (1966).

24. K.Hepp. Preprint, ИТФ-68-62, Киев, 1968.

25. В.И. Огиевецкий, И.В. Прлубаринов. ЖЭТФ, 41, 247 (1961); см. также W.Zimmermann. Preprint New York University, 1957.

26. J.Schwinger. Phys.Rev., 75, 651 (1949).

27. Z.Koba, T.Tati, S.Tomonaga. Progr.Theor.Phys., 2, 101 (1947).

28. I.Bialynicki-Birula. Phys.Rev., 155, 1414 (1966).

29. R.P.Feynman. Phys.Rev., 76, 769 (1949).

30. И.В. Полубаринов. Сообщение ОИЯИ, Р2-4362, Дубна, 1969.

31. E.Freese. Zs. für Naturf., 8a, 776 (1953); K.Nishijima, Progr. Theor.Phys., 10, 549 (1952); W. Heisenberg. Zs.f Naturf., 9a, 292 (1954),

32. D.Rivier, E.C.G.Stueckelberg. Phys.Rev., 74, 218 (1948); D.Rivier. Helv.Phys.Acta., 22, 265 (1949); E.C.G.Stueckelberg, T.A.Green. Helv.Phys.Acta, 24, 153 (1951); E.C.G.Stuecklberg, A.Petermann. Helv.Phys.Acta, 26, 499 (1953).

33. Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ, Москва, 1948, стр. 56.

34. G.Källen. Quantenelektrodynamik, Handbuch der Physik V/I, Springer Verlag, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1969 года.