ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4546

Г.В.Ефимов

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СХОДИМОСТЬ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4546

Г.В.Ефимов

НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И СХОДИМОСТЬ РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в журнал "Теоретическая

и математическая физика"

В в е д е н и е

Еще несколько лет назад существенно нелинейные лагранжианы взаимодействующих квантованных полей считались экзотическим явлением в теории поля и их изучение представляло чисто академический интерес. Однако за последнее время требование инвариантности относительно киральной группы, изучение нелинейных представлений этой группы привело к тому, что нелинейные кирально-инвариантные лагранжианы получили прямое физическое содержание (см., например,[1]). Возникла проблема, как работать с такими лагранжианами? Первоначальная идея, по сути дела связанная с желанием уйти от квантовополевых трудностей при рассмотрении такого типа лагранжианов, состояла в том, чтобы п р и н ц и п и а л ь н о считать такие лагранжианы феноменологическими, вычисления проводить т о л ь к о в первых неисчезающих порядках по лагранжиану взаимодействия, полностью пренебрегать вкладами от так называемых замкнутых петель[2].

Нам кажется несостоятельной такая идеология, ее можно считать лишь первым шагом при изучении нелинейных лагранжианов. С другой стороны, к настоящему времени уже имеется ряд попыток сформулировать теорию возмущений при существенно нелинейном взаимодействии[3,4].

Хотя их тоже еще нельзя рассматривать как законченную формулировку теории, эти попытки уже представляют собой реальный инструмент изучения S – матрицы в высших порядках теории возмущений.

В последнее время уже начали появляться первые исследования, посвященные применению методов работы с существенно нелинейными лагранжианами в теории киральных симметрий /5/.

В настоящей работе мы покажем, что в рамках нелокальной квантовой теории поля для существенно нелинейных лагранжианов взаимодействия S – матрица не только конечна и унитарна в каждом порядке теории возмущений, но и весь ряд абсолютно сходится для определенного класса лагранжианов взаимодействия.

§ 1. Постановка задачи

В работах /6/ показано, что нелокальную унитарную теорию однокомпонентного скалярного поля можно построить следующим образом. Предположим, что справедлива

Ф и з и ч е с к а я г и п о т е з а. Принципиально ничего нельзя сказать о поведении частиц на достаточно малых пространственновременных расстояниях.

Математически это означает, что к пропагатору свободной скалярной частицы

$$\Delta_c(x_1 - x_2) = \langle 0 | T(\phi(x_1)\ \phi(x_2)) | 0 \rangle \qquad (1.1)$$

можно добавить обобщенную функцию из подходящего класса нелокальных обобщенных функций /7/, так как выражение (1.1) не определено в малой области пространства-времени около точки $x_1 = x_2$. Имеем вместо пропагатора $\Delta_c(x_1 - x_2)$

$$D_c(x_1 - x_2) = \Delta_c(x_1 - x_2) + \frac{1}{i} K(x_1 - x_2) , \qquad (1.2)$$

где

$$K(x_1 - x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \Box^n \delta^{(4)}(x_1 - x_2) . \qquad (1.3)$$

$K(x_1 - x_2)$ – обобщенная функция из подходящего класса нелокальных обобщенных функций /7/. В импульсном пространстве получим

$$i\tilde{D}_o(p^2) = \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \tilde{\tilde{K}}(\ell^2 p^2) = \frac{\tilde{\tilde{V}}(-\ell^2 p^2)}{m^2 - p^2 - i\epsilon} , \qquad (1.4)$$

где ℓ имеет смысл элементарной длины.

В работах /6,7/ показано, что если:

I. функция $\tilde{\tilde{V}}(-z)$ – целая в плоскости комплексного z точного порядка роста меньше единицы, т.е.

$$\overline{\lim_{|z| \to \infty}} \frac{\ell n\, \ell n\, |\tilde{\tilde{V}}(|z|)|}{\ell n\, |z|} < 1 . \qquad (1.5)$$

$$\text{II.} \quad \tilde{\tilde{V}}(-z) = 0\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{при} \quad z \to -\infty . \qquad (1.6)$$

$$\text{III.} \quad \tilde{\tilde{V}}(-\ell^2 m^2) = 1 , \qquad (1.7)$$

тогда существует такая несобственная процедура предельного перехода, что можно перейти в евклидову метрику пространственноподобных внешних импульсов или пространственноподобных координат. S -матрица в евклидовой метрике оказывается конечной в каждом порядке теории возмущений. Переход в физическую область осуществляется путем аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным.

Оказывается, что S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений [6,7].

В евклидовой формулировке S – матрица может быть представлена в виде следующего формального выражения:

$$S[\phi] = \exp\left\{\frac{1}{2}\iint d^4x_1\, d^4x_2 D_0(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\phi(x_1)\,\delta\phi(x_2)}\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{g\int d^4x\, U(\phi(x))\right\}, \qquad (1.8)$$

$$D_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k\,\tilde{\tilde{V}}(\ell^2k^2)}{m^2+k^2}\,e^{ikx}. \qquad (1.9)$$

В данном представлении S – матрица рассматривается как функционал от действительно поля ϕ (не оператора). Все интегрирование в формулах (1.8) и (1.9) проводится по четырехмерному евклидову пространству x и k.

Если разложить по константе взаимодействия g, тогда получим

$$S[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int d^4x_1\ldots\int d^4x_n S_n(x_1,\ldots,x_n), \qquad (1.10)$$

$$S_n(x_1,\ldots,x_n) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_0(x_i-x_j)\frac{\delta^2}{\delta\phi(x_i)\,\delta\phi(x_j)}\right\}\prod_{j=1}^{n}U(\phi(x_j)), \qquad (1.11)$$

Обычно в теории поля лагранжиан взаимодействия

$$L_I(x) = g\, U(\phi(x)) \tag{1.12}$$

выбирается в нормальной форме. Это означает, что в формуле (1.11) в сумме дифференциальных операторов, стоящей в показателе экспоненты, опускаются диагональные члены, т.е. полагается

$$D_c(0) = 0 . \tag{1.13}$$

Непосредственная причина такого выбора понятна, поскольку в обычной локальной теории величина $D_c(0)$ определяется расходящимся интегралом и поэтому смысла не имеет.

Если лагранжиан взаимодействия (1.12) представляет собой полином вида $U(\phi) = \phi^m$, тогда оператор в (1.11) хорошо определен в каждом порядке по g. Однако о свойствах всего ряда сказать ничего нельзя.

В настоящей работе мы будем изучать существование функций $S_n(x_1,\dots, x_n)$ в (1.11) и всего функционала $S[\phi]$ как целого в зависимости от вида лагранжиана взаимодействия (1.12).

Сделаем дополнительно два существенных предположения. Во-первых, будем считать, что формфактор $\tilde{\tilde{V}}(z)$ в (1.4) и (1.9) удовлетворяет еще условиям

IV. В евклидовой области ($z = x + iy$, $x > 0$)

$$\tilde{\tilde{V}}(x) > 0 ; \tag{1.14}$$

$$\text{V.}\quad D_c(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k\ \tilde{\tilde{V}}(\ell^2 k^2)}{m^2 + k^2} < \infty . \tag{1.15}$$

Во-вторых, не будем выбирать лагранжиан в нормальной форме. В рамках нелокальной теории мы можем себе это позволить, поскольку $D_c(0) < \infty$ согласно предположению (1.15). Ниже мы увидим, к чему приводит это предположение.

§2. Условия существования $S_n(x_1, \ldots, x_2)$

Мы будем предполагать, что функция $U(\phi)$ в лагранжиане взаимодействия аналитична в окрестности точки $\phi = 0$, так что ряд

$$U(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_m}{m!} \alpha^m \tag{2.1}$$

сходится в некотором круге $|\alpha| < \rho$. Коэффициенты u_m – вещественные числа. Функция $U(\alpha)$ может быть представлена в виде

$$U(\alpha) = \int e^{i\alpha\cdot\zeta} d\sigma(\zeta), \tag{2.2}$$

где $\sigma(\zeta)$ – некоторая вполне аддитивная мера в комплексной плоскости ζ такая, что сходится интеграл

$$\int e^{\rho|\zeta|} |d\sigma(\zeta)| < \infty, \tag{2.3}$$

где ρ – радиус сходимости ряда (2.1).

Тогда для функции $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ в (1.10) получим:

$$S_n(x_1,\ldots,x_n) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} D_c(x_i - x_j)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j}\right\}\prod_{j=1}^{n} U(\alpha_j) = \tag{2.4}$$

$$= \int d\sigma(\zeta_1)\ldots\int d\sigma(\zeta_n)\, e^{i\sum_j \alpha_j\zeta_j} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\zeta_i D_c(x_i - x_j)\zeta_j\right\}.$$

Найдем условия, при которых это представление математически определено.

Прежде всего заметим, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j} a_i D_c(x_i - x_j)\, a_j$ является положительно определенной при любых вещественных $a_1, \dots, a_n$, так как

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i D_c(x_i - x_j)\, a_j = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k\, \tilde{\tilde{V}}(\ell^2 k^2)}{m^2 + k^2} \left| \sum_{j=1} a_j e^{ikx_j} \right|^2 > 0. \tag{2.5}$$

С другой стороны, для этой формы легко получить оценку сверху:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i D_c(x_i - x_j)\, a_j \le \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k\, \tilde{\tilde{V}}(\ell^2 k^2)}{m^2 + k^2} (a_1 + \dots + a_n)^2 \le \tag{2.6}$$

$$\le n\, D_c(0)\, (a_1^2 + \dots + a_n^2),$$

причём эта оценка не может быть улучшена. Итак,

$$0 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_i D_c(x_i - x_j)\, a_j \le n\, D_c(0)\, (a_1^2 + \dots + a_n^2), \tag{2.7}$$

Воспользовавшись этим неравенством и полагая в формуле (2.4) $\zeta_j = \zeta_j + i\,\eta_j$, получим следующую оценку:

$$|S_n(x_1,\dots,x_n)| \leq \int |d\sigma(\zeta_1)| \dots \int |d\sigma(\zeta_n)| \; e^{\sum_j a_j \eta_j} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \xi_i D_0(x_i-x_j)\,\xi + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\eta_i D_0(x_i-x_j)\,\eta_j\right\} \leq \qquad (2.8)$$

$$< \prod_{j=1}^{n} \int |d\sigma(\zeta_j)| \exp\left\{ a_j \eta_j + \frac{n}{2} D_0(0)\,\eta_j^2 \right\}$$

Отсюда немедленно следует, что выражение (2.4) математически определено, если сходится интеграл

$$\int |d\sigma(\zeta)| \; e^{N\eta^2} < \infty \qquad (2.9)$$

при любых $N > 0$.

Найдем теперь класс функций $U(\alpha)$, удовлетворяющих условиям (2.3) и (2.9). Полагая $\alpha \to \alpha + i\beta$, получим:

$$|U(\alpha+i\beta)| = \left|\int d\sigma(\zeta)\; e^{i(\alpha+i\beta)(\zeta+i\eta)}\right| \leq$$

$$\leq \int |d\sigma(\zeta)|\; e^{|\alpha||\eta|+|\beta||\xi|} < \max_{|\eta|,|\zeta|} e^{|\alpha||\eta|-N|\eta|^2} e^{|\beta||\xi|-\rho|\zeta|} \int |d\sigma(\zeta)|\, e^{N\eta^2+\rho|\zeta|}$$

$$\leq \mathrm{Const}\; e^{\frac{1}{N}\alpha^2} \max_{|\zeta|} e^{(|\beta|-\rho)|\xi|} \qquad (2.10)$$

при любых $N > 0$.

Из этой оценки следует, что функция $U(a + i\beta)$ должна быть

1) аналитической в некоторой полосе

$$-\infty < a < \infty \quad , \quad -\rho < \beta < \rho \quad ; \tag{2.11}$$

2) расти внутри полосы медленее любой гауссовской экспоненты, т.е.

$$\lim_{a \to \pm \infty} | U (a + i \beta) | e^{-\epsilon a^2} = 0 \tag{2.12}$$

для $|\beta| < \rho$ и любых $\epsilon > 0$.

Для других функций $U(a)$, в частности для функций, имеющих особенности на вещественной оси a, представление (2.4) математически не определено.

Итак, для класса функций $U(a)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, S – матрица будет конечна, унитарна и макропричинна в каждом порядке теории возмущений.

Из оценки (2.8) легко получить, что

$$| S_n (x_1, \ldots, x_n) | < e^{s(n)} , \tag{2.13}$$

где

$$s(n) > A n^2 . \tag{2.14}$$

Отсюда следует, что ряд теории возмущений довольно сильно расходится. Необходимы какие-либо мощные методы суммирования, чтобы получить конечную полную S – матрицу теории.

Аналогичный результат был получен при построении конечного ряда теории возмущений для произвольных лагранжианов взаимодействия [4].

§3. Сходимость ряда теории возмущений

В классе функций $U(\alpha)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, особое место занимают функции, которые убывают при $\alpha \to \pm\infty$, т.е.

$$\lim_{\alpha \to \pm \infty} U(\alpha) = 0 . \tag{3.1}$$

Это означает, что для этих функций справедливо представление в виде интеграла Фурье:

$$U(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; e^{i\alpha\xi} \; \tilde{U}(\xi) , \tag{3.2}$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; e^{|\alpha||\xi|} \; |\tilde{U}(\xi)| < \infty \tag{3.3}$$

для $|\alpha| < \rho$.

Для таких функций представление (2.4) для $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ всегда существует.

$$S_n(x_1,\ldots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n \, U(\xi_1) \ldots U(\xi_n) \; e^{i\sum_j a_j \xi_j} \times \tag{3.4}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \, D_c(x_i - x_j) \, \xi_j \right\} .$$

Согласно оценке (2.7) имеем:

$$| S_n (x_1,\dots, x_n) | < \{ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, | \tilde{\tilde{U}} (\xi)| \}^n \quad . \tag{3.5}$$

Итак, в этом случае выражение (3.4) хорошо определено. Кроме того, оценка (3.5) говорит о том, что ряд теории возмущений сходится.

Введем в разложение S – матрицы по теории возмущений (1.9) вместо константы связи g функцию g(x), характеризующую степень включения взаимодействия, такую, что

$$\int d^4 x \quad g(x) < \infty \quad . \tag{3.6}$$

Тогда ряд

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \; g(x_1)\dots g(x_n) \; S_n (x_1,\dots, x_n) \tag{3.7}$$

мажорируется рядом

$$S_M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \int d^4 x \; g(x) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, | U (\xi) | \, \}^n =$$
$$= \exp \{ \int d^4 x \; g(x) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, |\tilde{\tilde{U}}(\xi)| \, \} . \tag{3.8}$$

Следовательно, ряд (3.7) абсолютно сходится. Величина

$$\int d^4 x \; g(x) = g \cdot V_4 \quad , \tag{3.9}$$

где V_4 имеет смысл четырехмерного объема, при $g(x) \to g$ расходится, так как $V_4 \to \infty$. В обычной квантовой теории поля эти расходимости связаны с переходами вакуум-вакуум, и они выделяются из всего ряда теории возмущений в виде несущественного фазового множителя (см., например, [8]).

§4. Нормальная форма лагранжиана взаимодействия

При получении представления (3.4) и оценки (3.5) предполагалось, что лагранжиан взаимодействия

$$L_I(x) = g \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; e^{i\xi\phi(x)} \; \tilde{\tilde{U}}(\xi) \tag{4.1}$$

выбран не в нормально упорядоченной форме. Если же, как обычно, выбрать лагранжиан взаимодействия в нормально упорядоченной форме :

$$L_I(x) = g \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; \colon e^{i\xi\phi(x)} \colon \; \tilde{\tilde{U}}(\xi) \;, \tag{4.2}$$

тогда вместо (3.4) получим

$$S_n(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_n \prod_{j=1}^{n} \tilde{\tilde{U}}(\xi_j) \quad e^{\frac{1}{2} D_c(0)\xi_i^2 + i a_j \xi_j} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i D_c(x_i - x_j)\, \xi_j \right\}. \tag{4.3}$$

Для сходимости интегралов в (4.3) необходимо, чтобы сходился интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; | \tilde{\tilde{U}}(\xi) | \; e^{\frac{1}{2} D(0) \xi^2} < \infty . \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что функция $U(a)$ в плоскости комплексного a должна быть целой аналитической функцией порядка $\rho \leq 2$.

С другой стороны, если в лагранжиане взаимодействия (4.1) перейти к нормальной форме, то получим:

$$: U(\phi) : = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \; : e^{i\xi\phi(x)} : \; e^{-\frac{1}{2} D(0)\xi^2} \tilde{\tilde{U}}(\xi) . \tag{4.5}$$

Таким образом, нормально упорядоченный лагранжиан взаимодействия: $:U(a):$ является в плоскости a целой функцией порядка $\rho \leq 2$, если даже лагранжиан $U(a)$ имел в плоскости a любые особенности.

Кроме того, следует заметить следующее. Если лагранжиан взаимодействия выбран не в нормальной форме, тогда после перехода к нормальному произведению в лагранжиане взаимодействия и в каждом порядке теории возмущений для S – матрицы каждый член ряда теории возмущений $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ зависит от элементарной длины ℓ таким образом, что

$$\lim_{\ell \to 0} S_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 . \tag{4.6}$$

Итак, в рассматриваемом подходе при переходе к точечному взаимодействию реальное взаимодействие полностью исчезает, тогда как в обычной нелокальной теории при $\ell \to 0$ возникают обычные ультрафиолетовые расходимости локальной квантовой теории поля.

Заключение

Таким образом, для определенного класса существенно нелинейных лагранжианов взаимодействия в рамках нелокальной квантовой теории поля удалось построить S – матрицу теории в виде сходящегося ряда теории возмущений в евклидовой формулировке теории. Ранее было доказано, что при продолжении в физическую область S – матрица будет унитарна в каждом порядке теории возмущений. Дальнейшей задачей является изучение поведения амплитуд физических процессов в рамках всего сходящегося ряда, представляющего полную S -матрицу теории.

Литература

1. F.Gursey. Nuovo Cim., 16, 230 (1960); J.Schwinger. Phys. Letters, 24B, 473 (1967); S.Coleman, J.Wess, B.Zumino. Phys. Rev., 177, 2239 (1969). C.G.Callen, S.Coleman, J.Wess, B.Zumino. Phys. Rev., 177, 2247 (1969).
2. J.Schwinger. Phys. Rev., 158, 1391 (1967); S.Weinberg. Phys. Rev. Letters, 18, 188 (1967).
3. Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 44, 2107 (1963); E.S.Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963); G.V.Efimov. Nuovo Cim., 32, 1046, (1964); Г.В.Ефимов. ЖЭТФ, 48, 598 (1965); G.V.Efimov. Nucl. Phys., 74, 657 (1965); M.K.Volkov. Commun. Math. Phys., 7, 289 (1968).

4. Г.В.Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р2-4472, Дубна, 1969.

5. R.Delbourgo, A.Salam, J.Strathdee. Preprint Trieste, IC-69-17, 1969; IC-69-28, 1969.

6. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 5, 42 (1967); Г.В.Ефимов. ЯФ, 4, 432 (1966); Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ-68-54, Киев, 1968.

7. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 7, 138 (1968); Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ-68-52, Киев, 1968.

8. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, М., 1957 .

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1969 года.