СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4543

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе

РОЖДЕНИЕ МЮОННЫХ ПАР В СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА СУММ

1969

P2 - 4543

В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе

РОЖДЕНИЕ МЮОННЫХ ПАР В СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРАВИЛА СУММ

1. В в е д е н и е

В последнее время в ряде теоретических работ отмечалось, что изучение глубоко неупругих процессов рассеяния лептонов на протонах является одним из основных средств изучения структуры частиц на малых расстояниях /1-3/. Недавние эксперименты на стэнфордском ускорителе /4/ выявили весьма интересную картину поведения амплитуд неупругого электророждения и послужили основой для выдвижения и проверки ряда теоретических идей /5-7/. С другой стороны, в работах /8,9/ получен ряд ограничений на асимптотическое поведение амплитуд неупругих процессов с участием лишь сильновзаимодействующих частиц, исходя из общих принципов теории поля. Обобщение этих результатов на неупругие процессы с участием лептонов даст возможность получения точных ограничений для формфакторов неупругих процессов.

В настоящей работе изучается процесс образования мюонных пар при глубоко неупругом столкновении двух адронов при высоких энергиях. 1) Показано, что при больших энергиях и передачах импульса формфакторы этого процесса связаны с матричными элементами одновременных коммутаторов электромагнитного тока. Полученные при этом асимптотические правила сумм могут послужить основой для проверки структуры электромагнитного тока адронов. 2) В частности, для поляризации мюонов предсказания алгебры кварковых токов и алгебры полей качественно различаются.

Изучение поляризации мюонов в рассмотренном процессе необходимо также при анализе экспериментов по поиску W -мезона в протон-протонных столкновениях при помощи детектирования поляризованных мюонов, разлетающихся на большие углы /10/. Тесная связь между процессом рождения W -мезона и электромагнитным рождением мюонных пар уже обсуждалась в литературе.

Во II части работы рассмотрена кинематика процесса и приведены необходимые определения и обозначения.

В III части показано, каким образом сечение физического процесса связано с коммутатором электромагнитных токов.

В IV части получены правила сумм, связывающие предельные значения формфакторов с одновременными коммутаторами пространственных компонент электромагнитного тока и производных по времени. В приложении I рассмотрен вопрос о выделении вклада несвязанных диаграмм; Приложение II посвящено кинематическим вопросам.

II. Кинематика, обозначения и определения

Рассмотрим процесс неупругого столкновения адрона a с протоном, в результате которого рождается мюонная пара и некоторая система адронов N. В низшем порядке по электромагнитному взаимодействию процесс протекает через испускание и распад вирутального фотона γ^*.

$$a + p \to \underset{\mu^+\ \mu^-}{\gamma^*} + N . \tag{2.1}$$

Налетающим адроном могут быть $\pi^{\pm}$ -мезон, протон или антипротон $a = \pi^{\pm}, p, \bar{p}$. Введем обозначения для импульсов согласно рис. 1:

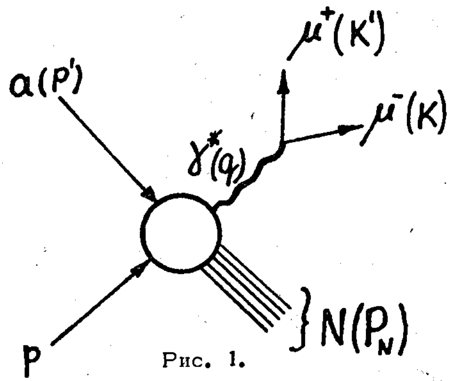


Рис. 1.

Законы сохранения 4-импульса имеют вид:

$$p' + p = q + p_N , \tag{2.2}$$

$$q = k' + k . \tag{2.3}$$

Соответствующий матричный элемент Т-матрицы определяется выражением:

$$T_{if} = \frac{4\pi\alpha}{q^2} \epsilon^{\mu} < N out \mid J_{\mu}(0) \mid p p' \, in >^{c}, \tag{2.4}$$

где $\epsilon^{\mu} = \bar{u}(k)\gamma^{\mu} v(k')$ – электромагнитный ток мюонной пары; $J_{\mu}(x)$ – оператор электромагнитного тока адронов; $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$ – постоянная тонкой структуры. Символ "c" означает, что необходимо отбросить несвязанные части в матричном элементе тока.

Полное сечение процесса (2.1) при столкновении неполяризованных частиц a и p, просуммированное по поляризациям лептонной пары, может быть представлено в виде

$$\sigma = \frac{4\pi^2\alpha^2}{\sqrt{(pp')^2 - m^2 m'^2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\pi(q^2)}{q^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu} q^{\nu}}{q^2}\right) \rho_{\mu\nu} , \tag{2.5}$$

где m и m' – массы протона и частицы a соответственно. Здесь использованы следующие обозначения и определения:

$$\rho_{\mu\nu}(p, p', q) = \sum_N (2\pi)^4 \delta(p + p' - q - p_N) < p p' in \mid J_{\mu}(0) \mid N out >^{c} < N out \mid J_{\nu}(0) \mid p p' in >^{c} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \Sigma \int \frac{d\vec{k}\, d\vec{k}'}{(2\pi)^6 \, 2k_0 2k_0'} (2\pi)^4 \delta(k' + k - q) \epsilon^{\mu} \epsilon^{\nu} &= \\ = \sqrt{\frac{q^2 - 4m_{\mu}^2}{q^2}} \int \frac{d\Omega}{8\pi^2} \left(k_{\mu} k_{\nu}' + k_{\nu} k_{\mu}' - g_{\mu\nu} \frac{q^2}{2}\right) &= \\ = \pi(q^2)(-q^2 g^{\mu\nu} + q^{\mu} q^{\nu}), & \end{aligned} \tag{2.7}$$

$\partial^{\mu} \langle | [J_{\mu}(x), J_{\nu}(0)] | p \rangle$

где

$$\pi(q^2) = \frac{1}{4\pi}\left(1 - \frac{q^2 - 4m_\mu^2}{3q^2}\right)\sqrt{\frac{q^2 - 4m_\mu^2}{q^2}}\Big|_{m_\mu = 0} = \frac{1}{6\pi}. \tag{2.8}$$

Здесь $d\Omega$ –элемент телесного угла, связанный с направлением импульса одного из мюонов в системе центра масс мюонной пары $\vec{q} = 0$: m_μ – масса мюона.

Из условия сохранения тока следует, что тензор $\rho_{\mu\nu}(p, p'q)$ может быть разложен по пяти линейно-независимым градиентно-инвариантным структурам

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu}(p, p', q) = \rho_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) + \rho_2 \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + \rho_3 \mathcal{P}'_\mu \mathcal{P}'_\nu + \\ + \rho_4 (\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}'_\nu + \mathcal{P}_\nu \mathcal{P}'_\mu) + i\rho_5 (\mathcal{P}_\mu \mathcal{P}'_\nu - \mathcal{R}_\nu \mathcal{P}'_\mu), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu \qquad \mathcal{P}'_\mu = p'_\mu - \frac{p' \cdot q}{q^2} q_\mu. \tag{2.10}$$

Все формфакторы ρ_i являются вещественными скалярными функциями четырех независимых инвариантных переменных, построенных из векторов p , p' и q. Например, можно выбрать переменную q^2 – квадрат массы вирутального фотона и обычные мандельстамовские переменные s, t , u :

$$\begin{aligned} s &= (p + p')^2 = m^2 + m'^2 + 2m\epsilon \\ t &= (p' - q)^2 = \Delta^2 \\ u &= (p - q) = m^2 + q^2 - 2\nu, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где инвариант $\nu = p \cdot q$ в лабораторной системе $(\vec{p} = 0)$ пропорционален энергии виртуального фотона и $\epsilon = \frac{1}{m}(pp')$ – энергия налетающей частицы в лабораторной системе. Если ввести еще один инвариант $m_N^2 = p_N^2$, представляющий квадрат инвариантной массы системы адронов, то между пятью инвариантами будет иметь место линейное соотношение

$$s+t+u=q^2+m_N^2+m^2+m'^2. \tag{2.12}$$

В дальнейшем оказывается полезным разложение тензора $\rho_{\mu\nu}$ по структурам, соответствующим определенным поляризациям виртуального фотона. Определим направления векторов поляризации виртуального фотона в лабораторной системе $(\vec{p}=0)$ согласно рис. 2.

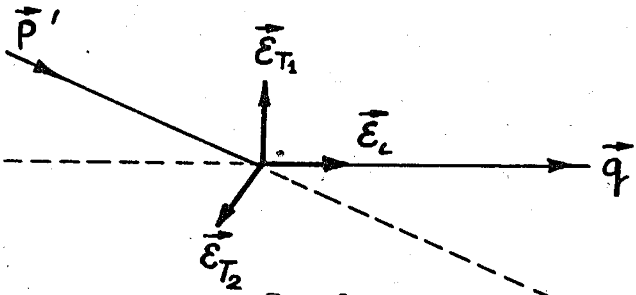


Рис. 2.

Соответствующие релятивистские четырехмерные векторы поляризаций имеют вид:

$$\epsilon_\mu^{(L)}=\frac{1}{\sqrt{-\mathcal{P}^2}}\mathcal{P}_\mu, \tag{2.13а}$$

$$\epsilon_\mu^{(T_1)}=\left[\frac{\mathcal{P}^2}{(\mathcal{P}\mathcal{P}')^2-\mathcal{P}^2\mathcal{P}'^2}\right]^{1/2}\left(\mathcal{P}'_\mu-\frac{\mathcal{P}\cdot\mathcal{P}'}{\mathcal{P}^2}\mathcal{P}_\mu\right), \tag{2.13б}$$

$$\epsilon_\mu^{(T_2)}=\frac{1}{\sqrt{q^2}}\frac{1}{\sqrt{(p\cdot p')^2-m^2m'^2}}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,p_\nu\,p'_\lambda\,q_\rho, \tag{2.13в}$$

где

$$\mathcal{P}^2=\frac{1}{q^2}(m^2q^2-\nu^2),$$

$$\mathcal{P}'^2=\frac{1}{q^2}(m'^2q^2-(p'q)^2), \tag{2.14}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{P}'=\frac{1}{q^2}(m\,\epsilon\,q^2-\nu(p'q)).$$

Нетрудно видеть, что векторы поляризаций имеют следующие свойства:

$$\epsilon_\mu^{(i)} q^\mu = 0 \ , \quad \epsilon_\mu^{(i)} \epsilon^{(k)\mu} = -\delta_{ik} \qquad (i,k = T_1 \ , T_2, L \ ),$$

$$\sum_{i=T_1, T_2, L} \epsilon_\mu^{(i)} \epsilon_\nu^{(i)} = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}. \tag{2.15}$$

Используя формулы (2.13) и (2.15), можно привести разложение (2.9) к виду

$$\rho_{\mu\nu} = \rho_{T_1} \epsilon_\mu^{(T_1)} \epsilon_\nu^{(T_1)} + \rho_{T_2} \epsilon_\mu^{(T_2)} \epsilon_\nu^{(T_2)} + \rho_L \epsilon_\mu^{(L)} \epsilon_\nu^{(L)} +$$
$$+ \rho_{TL}^{(+)} (\epsilon_\mu^{(L)} \epsilon_\nu^{(T_1)} + \epsilon_\nu^{(L)} \epsilon_\mu^{(T_1)}) + i \rho_{TL}^{(-)} (\epsilon_\mu^{(L)} \epsilon_\nu^{(T_1)} - \epsilon_\nu^{(L)} \epsilon_\mu^{(T_1)}), \tag{2.16}$$

причем

$$\rho_L = \rho_1 - \mathcal{P}^2 \rho_2 - \frac{(\mathcal{P}\cdot\mathcal{P}')^2}{\mathcal{P}^2} \rho_3 - 2\mathcal{P}\mathcal{P}' \rho_4 \ , \tag{2.17а}$$

$$\rho_{T_1} = \rho_1 - \frac{(\mathcal{P}\mathcal{P}')^2 - \mathcal{P}^2 \mathcal{P}'^2}{\mathcal{P}^2} \rho_3 \ , \tag{2.17б}$$

$$\rho_{T_2} = \rho_1 \ , \tag{2.17в}$$

$$\rho_{TL}^{(+)} \pm i \rho_{TL}^{(-)} = \frac{\mathcal{P}\mathcal{P}'}{\mathcal{P}^2} [\mathcal{P}^2 \mathcal{P}'^2 - (\mathcal{P}\cdot\mathcal{P}')^2]^{1/2} \rho_3 +$$
$$+ [\mathcal{P}^2 \mathcal{P}'^2 - (\mathcal{P}\mathcal{P}')^2]^{1/2} (\rho_4 \pm i \rho_5). \tag{2.17г}$$

Подставляя разложение (2.16) в формулу для полного сечения процесса (2.5), получим:

$$\sigma = \frac{4\pi^2 \alpha^2}{\sqrt{(p\cdot p')^2 - m^2 m'^2}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\pi(q^2)}{q^2} \rho(s, q^2, \Delta^2, \nu), \tag{2.18}$$

где

$$\rho = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^{\mu} q^{\nu}}{q^{2}}\right) \rho_{\mu\nu} = \rho_{T_1} + \rho_{T_2} + \rho_{L}. \tag{2.19}$$

Интегрирование в формуле (2.18) по импульсу виртуального фотона может быть сведено к интегрированию по инвариантным переменным, например:

$$d^4 q = \frac{1}{4\sqrt{(p.p')^2 - m^2 m'^2}}\, dq^2\, d\Delta^2\, d\nu\, d\phi, \tag{2.20}$$

где ϕ –азимутальный угол.

Пределы интегрирования находятся из законов сохранения, определяющих физическую область процесса (2.1) (см. приложение II).

Имея в дальнейшем в виду случай высоких энергий сталкивающихся адронов, когда $\epsilon \gg m$, $\epsilon \gg m'$, получим:

$$\sigma(\epsilon) = \frac{a^2}{8\pi} \frac{1}{m\epsilon^2} \int_0^{2m\epsilon} \frac{dq^2}{q^2}\, \pi(q^2) \int_{q^2-2m\epsilon}^{0} d\Delta^2 \int_{-\frac{\Delta^2}{2m}}^{\epsilon^* + \frac{\Delta^2}{4\epsilon^*}} d\delta\, \rho(s, q^2, \Delta^2, \delta), \tag{2.21}$$

где $\epsilon^* = \epsilon \dfrac{\Delta^2}{\Delta^2 - q^2}$, $\delta = \dfrac{1}{m} p \cdot \Delta$ – передача энергии в лабораторной системе.

Отметим, что полное сечение процесса (2.1) определяется лишь суммой форм-факторов $\rho_{T_1} + \rho_{T_2} + \rho_L$ и не зависит от $\rho^{(\pm)}_{TL}$. Измерение всех форм-факторов в отдельности возможно при изучении углового распределения по направлениям импульса мюонов в системе центра масс пары, где $\vec{q} = 0$.

Выбирая в системе покоя пары направление импульса $\vec{p}$ вдоль оси z, а направление к плоскости рождения – по оси y, получим

$$\vec{k} = -\vec{k}' = |\vec{k}|\,(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta). \tag{2.22}$$

В результате для отнормированного углового распределения получим следующее выражение /11/ (см. также /12/):

$$W(\theta,\phi)=\frac{1}{4\pi\rho}\,\frac{1}{(1-\frac{v^2}{3})}\,\{\rho_{T_1}(1-v^2\sin^2\theta\cos^2\phi)+$$

$$+\rho_{T_2}(1-v^2\sin^2\theta\sin^2\phi)+\rho_L(1-v^2\cos^2\theta)-\rho^{(+)}_{TL}v^2\sin 2\theta\cos\phi\},\tag{2.23}$$

где $\rho=\rho_L+\rho_{T_1}+\rho_{T_2}$, $v=\frac{|\vec{k}|}{k_0}=\sqrt{\frac{q^2-4m_\mu^2}{q^2}}$ – скорость мюонов в системе $\vec{q}=0$.

Как отмечено в /11/, формфактор $\rho^{(-)}_{TL}$ пропорционален поляризации одного из мюонов вдоль нормали к плоскости рождения, т.е. вдоль оси y. Отметим также, что измерение форфакторов $\rho_T\equiv\rho_{T_1}+\rho_{T_2}$ и ρ_L может быть произведено изучением распределения лишь по по углу θ:

$$W(\theta)=\int_0^{2\pi}d\phi\;W(\theta,\phi)=$$

$$=\frac{1}{2\rho(1-\frac{v^2}{3})}\{\rho_L(1-v^2\cos^2\theta)+\rho_T(1-\frac{v^2}{2}\sin^2\theta)\}.\tag{2.24}$$

III. Коммутаторы токов

Свяжем величину $\rho_{\mu\nu}(p,p',q)$, входящую в определение сечения процесса (2.1), с Фурье-образом диагонального матричного элемента коммутатора электромагнитных токов:

$$A_{\mu\nu}(p,p',q)=\int dx\,e^{-iqx}\langle pp'\,in\,|[J_\mu(x),J_\nu(0)]|\,pp'\,in\rangle^c=$$

$$=a_{\mu\nu}(p,p',q)-a_{\nu\mu}(p,p'-q).\tag{3.1}$$

Подразумеваем, что частицы в обкладках на поляризованы; символ "c" означает, что берется связанная в целом часть матричного элемента коммутатора двух токов. Очевидно, что $A_{\mu\nu}$ и $a_{\mu\nu}$ могут быть разложены по пяти независимым градиентно-инвариантным структурам, аналогично разложению (2.9), причем

$$\underset{i=1,2,3,4}{A_i}(p,p',q) = a_i(p,p',q) - a_i(p,p'-q) \tag{3.2a}$$

$$A_5(p,p',q) = a_5(p,p',q) + a_5(p,p',-q). \tag{3.2б}$$

Отметим, что величины A_i не имеют определенных свойств симметрии по переменной ν при фиксированных переменных s ,q^2 и Δ^2. Действительно, при подстановке $q \to -q$ имеем

$$\Delta^2 \to \Delta'^2 = (p'+q)^2 = 2(m'^2 + q^2) - \Delta^2. \tag{3.3}$$

Однако, если вместо переменной Δ^2 фиксировать отношение

$$a = \frac{p' \cdot q}{p \cdot q} = \frac{m'^2 + q^2 - \Delta^2}{2\nu}, \tag{3.4}$$

то величины $A_{i=1,2,3,4}(s, q^2, a, \nu)$ становятся нечетными, а величина $A_5(s, q^2, a, \nu)$ – четной функциями ν соответственно.

Рассмотрим теперь более подробно величину $a_{\mu\nu}$. Используя условие полноты векторов " out " – состояний, получим

$$a_{\mu\nu}(p,p',q) = \sum_N^c (2\pi)^4 \, \delta(p+p'-q-p_N) \langle pp'\mathrm{in} | J_\mu(0) | N\,\mathrm{out} \rangle \langle N\,\mathrm{out} | J_\nu(0) | pp'\mathrm{in} \rangle, \tag{3.5}$$

где символ "с" над знаком суммы означает, что выбираются лишь связанные в целом матричные элементы произведения двух токов.

Разобьем матричный элемент тока $\langle N\,\mathrm{out} | J_\mu(0) | pp'\,\mathrm{in} \rangle$ на связанные и несвязанные части согласно рис. 3 (см. приложение I).

В результате величина $a_{\mu\nu}$ может быть представлена в виде

$$a_{\mu\nu}(p,p',q) = \rho_{\mu\nu}(p,p';q) + \tilde{\tilde{\rho}}_{\mu\nu}(p,p';q), \tag{3.6}$$

где величина $\rho_{\mu\nu}$ есть полностью связанная часть матричного элемента произведения двух токов, определенная формулой (2.6), а через $\tilde{\tilde{\rho}}_{\mu\nu}$ обозначен вклад 15 слабо связанных обобщенных "z"-диаграмм, символически изображенных на рис. 4.

При этом из закона сохранения импульса и условия спектральности следует, что при $q^2 > 0$:

1. $\rho_{\mu\nu}$ отлична от нуля при

$$\nu > 0 \; ; \; m_N^2 \le (\sqrt{s} - \sqrt{q^2})^2; \tag{3.7а}$$

2. $\tilde{\tilde{\rho}}_{\mu\nu}$ отлична от нуля при

$$\nu < 0 \; ; \; m_N^2 \ge (\sqrt{s} + \sqrt{q^2})^2. \tag{3.7б}$$

Как видно из (3.7б), в пределе $s \to \infty$ при $q^2 > 0$ величина $\tilde{\tilde{\rho}}_{\mu\nu}$, соответствующая вкладам "z"-диаграмм, определяется промежуточными состояниями адронов N с бесконечно тяжелыми эффективными массами $m_N = \sqrt{p_N^2}$. Отсюда, в частности, следует, что при $q^2 > 0$

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ \frac{m_N^2}{s}\to 0}} \tilde{\rho}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.8}$$

IV . Динамика при бесконечном импульсе и асимптотические правила сумм

Ниже мы покажем, что вопрос о поведении формфакторов процесса рождения мюонных пар (2.1) при высоких энергиях сталкивающихся адронов и больших энергиях и массах виртуального фотона, когда

$$\underbrace{s,\ q^2,\ \nu}\to\infty$$

$$a = \frac{p'\cdot q}{p\cdot q} = \text{фиксировано}\quad,\ \omega = \frac{q^2}{2\nu} = \text{фиксировано}, \tag{4.1}$$

может быть сведен к изучению одновременных коммутационных соотношений между пространственными компонентами операторов электромагнитных токов адронов и их производными по времени.

Использование одновременных коммутационных соотношений значительно упрощается в системе центра масс мюонной пары, где $q = (q_0\ ,0)$. Отметим, что в данной системе лишь пространственные компоненты градиентно-инвариантных тензоров $A_{\mu\nu}$ и $\rho_{\mu\nu}$ отличны от нуля.

Интегрируя обе части равенства (3.1) по dq_0 , можно получить ряд соотношений

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\,q_0\, A_{lk}(p,p',q_0) = B_{lk}\ (\vec{p},\vec{p}\,'), \tag{4.2а}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_0\, dq_0\, A_{lk}(p,p',q_0) = C_{lk}\ (\vec{p},\vec{p}\,') \tag{4.2б}$$

и т.д.

Здесь

$$B_{ik}(\vec{p},\vec{p}') = \int d\vec{x} < p, p'\,in\,|[J_i(\vec{x},0)\,J_k(0)]|\,pp'\,in>, \tag{4.3а}$$

$$C_{ik}(\vec{p},\vec{p}') = \frac{1}{i}\int d\vec{x} < pp'\,in\,|[\,\dot{J}_i(\vec{x},0),\,J_k(0)]\,|\,pp'\,in>, \tag{4.3б}$$

где одновременные коммутаторы определяются конкретной моделью алгебры токов.

Отметим, что в избранной системе, где $\vec{q} = 0$, инвариантные переменные, от которых зависят формфакторы, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} s &= m^2 + m'^2 + 2(p_0 p'_0 - \vec{p}\vec{p}'), \\ q^2 &= q_0^2, \\ \nu &= p_0 q_0, \\ a &= \frac{p'_0}{p_0}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что интегрирование в формулах (4.2) производится вдоль параболы $q^2 = \frac{\nu^2}{p_0^2}$ в плоскости (q^2, ν) при фиксированных значениях переменных s, a.

Подобные правила сумм при произвольных фиксированных импульсах p и $\vec{p}'$ содержат, вообще говоря, вклады "z" -диаграмм. Как было отмечено в предыдущем параграфе, в пределе $s \to \infty$ при $q^2 > 0$ вклады "z" - диаграмм определяются промежуточными состояниями адронов N с бесконечно тяжелыми эффективными массами m_N.

В соответствии с общепринятой идеологией метода алгебры токов мы будем предполагать, что вклады "z" -диаграмм исчезают в пределе $s \to \infty$.

Это предположение оказывается справедливым в случае, когда можно изменить порядок перехода к пределу $s \to \infty$ и интегрирования в формулах (4.2). Действительно, в случае, например, правил сумм (4.2а) вклад "z"-диаграмм определяется выражением типа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_0\, \tilde{\tilde{\rho}}_{ik}(p,p',q_0) = -\int_{s}^{\infty} \frac{d\,m_N^2}{2E_N}\, \tilde{\tilde{\rho}}_{ik}\ (p,p',q_0). \tag{4.5}$$

Переходя к пределу $s \to \infty$ под знаком интеграла при фиксированном значении m_N^2 и учитывая формулу (3.8), найдем, что вклад "z" -диаграмм в правилах сумм исчезает в этом пределе.

В системе центра масс лептонной пары переход к пределу $s \to \infty$ реализуется при условии

$$p_0\,,\, p_0' \to \infty\,,$$
$$\alpha = \frac{p_0'}{p_0} = \text{фикс.} \quad \beta = \frac{p_z'}{p_0'} = \text{фикс.} \tag{4.6}$$

при следующем выборе направлений импульсов

$$\vec{p} = \{\,0,\,0,\,p_z\,\} \qquad \vec{p}\,' = \{\,p_x'\,,0,\,p_z'\,\} \tag{4.7}$$

Отметим, что при фиксированном значении переменной $\omega = \frac{q^2}{2\nu}$ в пределе (4.6) имеем

$$s\,,q^2 \quad \nu \to \infty \qquad \frac{s}{2\nu} = \frac{\alpha(1-\beta)}{2\omega} = \text{фикс.} \quad ; \quad \frac{q^2}{2\nu} = \omega = \text{фикс.} \tag{4.8}$$

Предположим теперь, что существуют пределы

$$B_{ik}(\alpha,\beta) = \lim_{\substack{p_0\,,\,p_0' \to \infty \\ \alpha,\beta = \text{фикс.}}} 2p_0\, B_{ik}(\vec{p},\vec{p}\,') \tag{4.9а}$$

$$C_{ik}(\alpha,\beta) = \lim_{\substack{p_0\,,\,p_0' \to \infty \\ \alpha,\beta = \text{фикс.}}} C_{ik}(\vec{p},\vec{p}\,'), \tag{4.9б}$$

где тензоры в левых частях уравнений (4.9) являются безразмерными величинами, зависящими от выбора конкретной модели.

Переходя в правилах сумм (4.2) к интегрированию по переменной $\omega = \dfrac{q^2}{2\nu}$, можно показать при этом, что в пределе (4.8) формфакторы $\rho_i\,(s, q^2, a, \nu)$ имеют следующее поведение:

$$\rho_i\,(s, q^2, a, \nu) \to \frac{\omega^2}{q^2} F_i\,(a, \beta, \omega). \qquad i = T_1, T_2, L, TL \tag{4.10}$$

При этом выполняются соотношения:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} \omega\, d\omega\, F_{T_1}\,(a, \beta, \omega) = C_{xx}\,(a, \beta), \tag{4.11а}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} \omega\, d\omega\, F_{T_2}\,(a, \beta, \omega) = C_{yy}\,(a, \beta), \tag{4.11б}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} \omega\, d\omega\, F_{L}\,(a, \beta, \omega) = C_{zz}\,(a, \beta), \tag{4.11в}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} \omega\, d\omega\, F^{(+)}_{TL}\,(a, \beta, \omega) = C_{xz}\,(a, \beta) = C_{zx}\,(a, \beta), \tag{4.11г}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_0} d\omega\, F^{(-)}_{TL}\,(a, \beta, \omega) = B_{xz}\,(a, \beta) = -\,B_{zx}\,(a, \beta), \tag{4.11д}$$

где

$$\omega_0 = \frac{p_0 + p'_0}{2p_0} = \frac{1}{2}(1 + a).$$

Здесь выписаны лишь те соотношения, которые не являются тривиальными по соображениям четности относительно переменной q_0. Соотношения (4.11) модельно-независимы и являются основным результатом работы.

В модели кварков, взаимодействующих посредством нейтрального векторного поля ("глюонная" модель), коммутаторы имеют вид:

$$[J_i(\vec{x},0),\ \dot{J}_j(0)] = 2i\,\delta(\vec{x})\,\epsilon_{ijk}\ \bar{\Psi}\gamma_0\Sigma_k Q^2\Psi\ , \tag{4.12а}$$

$$[\dot{J}_i(\vec{x},0),\ J_j(0)] = -\delta(\vec{x})\,\{ i(\gamma_i\partial_j + \gamma_j\partial_i - 2\vec{\gamma}\vec{\partial}\,\delta_{ij}) -$$

$$- 2g(\gamma_i B_j + \gamma_j B_i - 2\vec{\gamma}\vec{B}\,\delta_{ij}) + 4M\delta_{ij}\,\}\,Q^2\Psi\ , \tag{4.12б}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\ ,\quad Q^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3}Q. \tag{4.13}$$

В модели векторных полей коммутаторы равны

$$[J_i(\vec{x},0),\ J_j(0)] = 0, \tag{4.14а}$$

$$[\dot{J}_i(\vec{x},0),\ J_j(0)] = \delta(\vec{x})\,C_{ab}\ J_i^a(0)\ \ J_j^b(0) + \text{c числа} \tag{4.14б}$$

Учитывая (4.14а), из правила сумм (4.11а) получим, что модель алгебры полей приводит к равенству

$$\int_0^{\omega_0} d\omega\ F_{TL}^{(-)}(\alpha,\beta,\omega) = 0. \tag{4.15}$$

Таким образом, можно заключить, что отличие от нуля левой части правила сумм (4.11д) однозначно свидетельствовало бы в пользу алгебры кварковых полей. В дальнейшем важно более подробно изучить структуру величин B_{ij} и C_{ij}.

В заключение авторы выражают благодарность Н.Н. Боголюбову за многочисленные стимулирующие обсуждения и Б.А. Арбузову, С.М.Биленькому, Д.И. Блохинцеву, С.Б. Герасимову, А.А. Логунову, М.А. Маркову, М.А. Мествиришвили, Л.Д. Соловьеву, Ф.Г. Ткебучаве, Р.Н.Фаустову за плодотворные дискуссии и ценные замечания.

Приложение I

Вычисление вклада слабо связанных диаграмм

Если состояние $<N\,out|$ содержит частицу p или p′, то матричный элемент $<N\,out|\,J_\mu(0)\,|p\,p'\,in>$ будет содержать несвязанные части, соответствующие свободному распространению этих частиц. Именно,

$$< N\,out|\,J_\mu(0)\,|pp'in> = < N\,out|\,J_\mu(0)\,|pp'\,in>^c + <p|p><N\,out|\,J_\mu(0)\,|p'>^c +$$

$$+ <p'|p'><N\,out\,|J_\mu(0)\,|p>^c + <pp'out\,|\,pp'in>< N\,out\,|\,J_\mu(0)\,|\,0>,$$

что графически можно представить так:

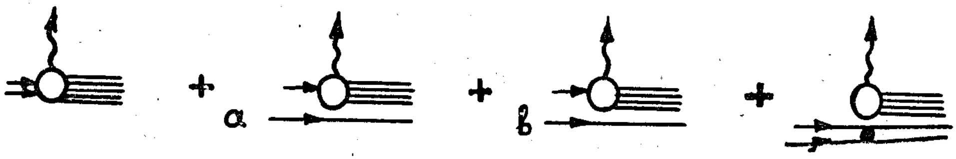


Рис. 3.

Первый член здесь представляет полностью связанную часть матричного элемента и входит в определение сечения (см. формулу (2.4)), а остальные три представляют собой несвязанные части и приводят к появлению так называемых обобщенных "z" -диаграмм. Если подставить это значение матричного элемента в выражение (3.3) для $a_{\mu\nu}(p,p',q)$, то в результате будем иметь 16 различных вкладов в $a_{\mu\nu}$:

$$a_{\mu\nu}(p,p',q) = \sum_N (2\pi)^4 \{ <pp'in|J_\mu\,|N\,out>^c<N\,out|\,J_\nu\,|pp'in>^c\,\delta(p+p'-q-p_N)+ \quad 1$$

$$+<pp'in|\,J_\mu\,|\,N,p\,out>^c<N\,out\,|J_\nu\,|p'>^c\,\delta(p'-q-p_N)+$$

$$+<p\,p'in|\,J_\mu\,|Np'out>^c< N\,out|\,J_\nu\,|\,p>^c\,\delta\,(p-q-p_\nu)+$$

$$+<pp'in\,|J_\mu\,|Npp'out>^c< N\,out\,|J_\nu\,|\,0>\delta\,(p_N+q)+$$

$$+ <p\,|J_\mu|\,N\,out>^c< Np'|J_\nu|\,pp'in>^c\,\delta\,(p-q-p_N)+$$

$$+ <p\,|J_\mu|\,N,p\;out>^c< Np'\,|J_\nu|\,p'in>^c\,\delta(q+p_N)+$$

$$+ <p\,|J_\mu|\,Np'out>^c< Np'|J_\nu|\,p\,in>^c\delta\,(p-p'-q-p_N)+$$

$$+ <p\,|J_\mu|\,Np\,p'out>^c< Np'|\,J_\nu\,|\,0>\delta(p'+q+p_N)+$$

$$<p'|J_\mu|\,N\,out>^c< Np\,|\,J_\nu|\,p\,p'in>^c\,\delta(p'-q-p_N)+ \qquad 2$$

$$<p'|\,J_\mu\,|N,p,out>^c< Np\,|J_\nu|\,p'>^c\delta\,(p'-p-q-p_N)+$$

$$<p'|J_\mu|\,Np'out>^c< Np\,|\,J_\nu\,|p>^c\delta(\,q+p_N)$$

$$<p'|\,J_\mu\,|\,N,p\,p',out>^c< Np\,|\,J_\nu|\,0>\;\delta(p+q+p_N)$$

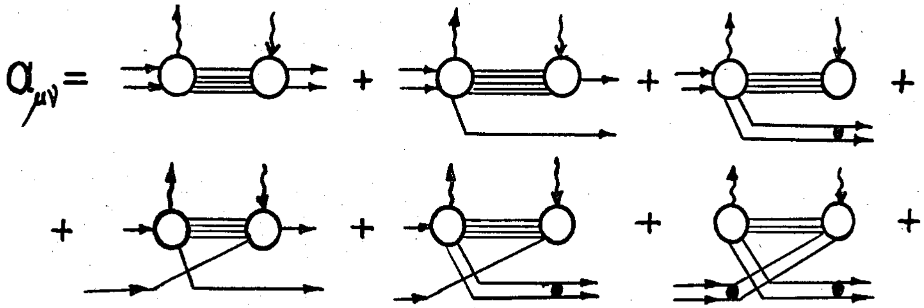
$$<0\,|\,J_\mu\,|\,N\,out>< N\,pp'|J_\nu\,|\,p\,p'in>^c\delta\,(q+p_N)$$

$$<0\,|\,J_\mu|\,Np\,out>< N\,pp'|\,J_\nu|p'>^c\delta\,(p+q+p_N)$$

$$<0\,|\,J_\mu|\,Np'out>< Npp'|\,J_\nu\,|\,p>^c\delta(p'+q+p_N)$$

$$<0\,|\,J_\mu\,|\,Npp'out>< N\,pp'|J_\nu\,|\,0>\delta(p+p'+q+p_N)\}$$

Это разложение символически изображено на рис. 4.



+ диаграммы, получающиеся симметризацией начального и конечного состояний.

Рис. 4.

Таким образом, имеем:

$$a_{\mu\nu} = \rho_{\mu\nu} + \tilde{\tilde{\rho}}_{\mu\nu} ,$$

где через $\tilde{\tilde{\rho}}_{\mu\nu}$ обозначена сумма 15 слабо-связанных "z" -диаграмм. Исследование свойств этих диаграмм проведено в основном тексте.

Приложение II

Определение границ физической области [x)]

Закон сохранения 4-импульса имеет вид

$$p' + p = q + p_N . \qquad (\Pi.1)$$

Введем вектор $\Delta = p' - q$. Тогда

$$p + \Delta = p_N . \qquad (\Pi.2)$$

---

x) Имеется интересная кинематическая аналогия между рассматриваемой здесь реакцией и реакцией неупругого нейтронорождения. Именно, если в приложении к работе Адлера /2/ заменить квадрат массы лептона на наше q^2 , а q^2 Адлера – на наше Δ^2 , то мы по существу сведем обе задачи друг к другу.

Откуда

$$\Delta^2 = m_N^2 - m^2 - 2m\delta,$$

где

$$\delta = \frac{1}{m} p \cdot \Delta = (\epsilon - q_0) \quad .$$

Случай $m_N \equiv m$ соответствует случаю упругого рассеяния. Тогда Δ^2 и δ связаны однозначно, т.е. не являются независимыми переменными

$$\delta = - \frac{\Delta^2}{2m}.$$

Это минимальная δ_{min}, так как q_0 при этом максимально.

Рассмотрим случай, когда виртуальный фотон летит назад в лабораторной системе. При этом ясно, что при фиксированных инвариантах он получит минимальную энергию $(q_0)_{min}$, а значит

$$\delta_{max} = \epsilon - (q_0)_{min}. \tag{П.3}$$

Найдем эту $(q_0)_{min}$ из равенства

$$\Delta^2 = m'^2 + q^2 - 2\epsilon (q_0)_{min} - 2\sqrt{\epsilon^2 - m'^2}\ \sqrt{(q_0)^2_{min} - q^2}\ . \tag{П.4}$$

Положим $m' \equiv 0$, тогда, решая это уравнение, найдем

$$(q_0)_{min} = \frac{q^2 - \Delta^2}{4\epsilon} + \frac{\epsilon q^2}{q^2 - \Delta^2} \tag{П.5}$$

$$\delta_{max} = \epsilon - (q_0)_{min} = \epsilon \left(1 - \frac{q^2}{q^2 - \Delta^2}\right) - \frac{q^2 - \Delta^2}{4\epsilon} = \tag{П.6}$$

$$= \epsilon^* + \frac{\Delta^2}{4\epsilon^*},$$

где

$$\epsilon^* = \epsilon \frac{\Delta^2}{\Delta^2 - q^2}.$$

Таким образом, в физической области

$$- \frac{\Delta^2}{2m} \leq \delta \leq \epsilon^* + \frac{\Delta^2}{4\epsilon^*}. \tag{П.7}$$

Найдем теперь физическую область Δ^2 при фиксированных s и q^2. Она определится из условия

$$\delta_{min} = \delta_{max}, \tag{П.8}$$

откуда найдем

$$\Delta^{2(-)} \le \Delta^2 \le \Delta^{2(+)}, \tag{П.9}$$

где

$$\Delta^{2(\pm)} = \frac{q^2\epsilon + q^2 m - 2m\epsilon^2 \pm \epsilon\sqrt{4m^2\epsilon^2 + q^4 - 4q^2\epsilon m - 4q^2 m}}{2\epsilon + m}.$$

Литература

1. *М.А. Марков. Нейтрино, Изд. "Наука", Москва (1964); Препринт ОИЯИ Е2-4370, Дубна (1969).*
2. *S.Adler. Phys.Rev. 143, 1144 (1966).*
3. *J.D.Bjorken. SLAC-PUB-510 (1968); Varenna School, Course 41, Varenna. Italy (1967);*
4. *W.K.H.Panofsky. Rapporteur talk at 14th International Conference on High Energy Physics, Vienna, 1968.*
5. *J.D.Bjorken and E.A.Paschos. Preprint SLAC-PUB-572 (1969); J.D.Bjorken. Preprint SLAC-PUB-571 (1969).*
6. *C.Callan, D.Gross. Phys.Rev.Lett. 22, 156 (1969).*
7. *Р.М. Мурадян. Труды Международного симпозиума по теории элементарных частиц (Варна, Болгария, 1968).*
8. *A.A.Logunov, N.V.Hieu, I.T.Todorov, O.A.Khrustalev. Phys.Lett. 7, 69 (1963); A.A.Logunov, M.A.Mestvirishvili, Ngyen van Hieu. Phys.Lett. 25B, 661 (1967).*

9. *А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили. Препринт ИФВЭ, СТФ, 69-34(1969).*
10. *Г.Г. Бунатян, Ю.П. Добрецов, Б.А. Долгошеин, Е.Д. Жижин, В.Г. Кириллов-Угрюмов, Ю.П. Никтин. Письма в ЖЭТФ. 8, 325 (1969).*
11. R.J.Oakes. Nuovo Cim. 44, 440 (1966).
12. *Ю.С. Суровцев, Ф.Г. Ткебучава. Препринт ОИЯИ Р2-4524, Дубна (1969).*

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1969 года.