СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4515

Р.П.Зайков

# ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ПОЛЕЙ ПОЛУЦЕЛОГО СПИНА БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

7935/1 пр.

**Р2 - 4515**

Р.П.Зайков

# ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ПОЛЕЙ ПОЛУЦЕЛОГО СПИНА БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

# 1. Введение

В последнее время привлекает к себе внимание теория бесконечно-компонентных (б.к.) полей /1,2/. Это теория одновременно описывает частицы с произвольным целым или полуцелым спином, однако она не лишена недостатков. Например, когда массовый спектр является не полностью вырожденным, нарушается условие локальности /3,4,5/. Совместное описание частиц с разными спинами можно осуществить и посредством конечно-компонентных (к.к) полей. Из-за того, что эти поля преобразуются по неунитарным представлениям группы $SL(2,C)$/6/, соответствующие динамические переменные, такие как оператор энергии, заряда и т.д. не имеют правильного спектра. То же самое относится и к бесконечно-компонентным полям, которые преобразуются по неунитарным представлениям группы $SL(2,C)$. В тех случаях, когда имеем дело с к.к. полями, путем наложения дополнительных условий (д.у) отбрасываются низшие спиновые состояния, что гарантирует правильный спектр динамических переменных.

Конечно-компонентные теории без наложения д.у. обсуждались в /4,5/, где было показано, что они являются локальными. В /7/ построен лагранжев формализм для тензорных полей без д.у.

В настоящей работе мы построили лагранжев формализм полей полуцелого спина как для к.к. полей, так и для б.к. полей (которые преобразуются по неунитарным представлениям группы $SL(2,C)$) без отбрасывания спинов. Из этого формализма следует, что динамические переменные имеют правильный спектр. Мы строим этот формализм таким образом, что одновременно рассматриваем, как к.к. поля, так и б.к.

Как и в работе [7], здесь мы существенно используем операторы проектирования на состояния определенного спина $s$. При помощи этих операторов поле $\Psi(x)$ разлагается на поля определенного спина $\Psi_s(x)$. Эти поля $\Psi_s(x)$ преобразуются по неприводимым представлениям $(m_s, s)$ группы Пуанкаре, где $m_s$ –масса поля $\Psi_s(x)$. Массы $m_s$ можно выбрать произвольным образом. В случае к.к. полей теория является локальной независимо от выбора массового спектра. В этом состоит ее отличие от бесконечно-компонентных теорий, где, согласно [3], поля с массовыми спектрами являются нелокальными [4,5].

Свободный лагранжиан выбираем в виде суммы свободных лагранжианов для полей $\Psi_s(x)$ с подходящим выбранным знаком. При этом рассматриваются только такие лагранжианы, которые приводят к уравнениям первого порядка. Лагранжиан является нелокальным относительно поля $\Psi(x)$ из-за нелокальности операторы проектирования.

В §2 обсуждаются спинорные поля и проекционные операторы.

В §3 обсуждаются уравнения первого порядка для поля $\Psi_s(x)$, инвариантные относительно группы Пуанкаре. При этом массовый спектр можно закладывать произвольным образом.

В §4 строится Лагранжев формализм. При этом оператор энергий имеет правильный спектр. Получены коммутационные соотношения для полей. Они согласуются с результатами работ [4,5]. Для к.к. полей формализм оказывается каноническим. Получены уравнения движения в гейзенберговской форме.

И, наконец, в §5 обсуждаются взаимодействия поля $\Psi(x)$ с тензорными полями с прямой связью. Обсуждаются возможные тензорные величины, которые получаются из поля $\Psi(x)$. Дан общий вид функции распространения поля $\Psi(x)$. Для взаимодействующих к.к. полей $\Psi(x)$ проверена локальная коммутативность с точностью до членов второго порядка по константе взаимодействия.

## 2. Спинорные представления группы SL(2 ,C) и операторы проектирования на состояния спина s

Мы ограничимся рассмотрением только полей полуцелого спина, удовлетворяющих уравнениям первого порядка. Кроме того потребуем, чтобы теория являлась инвариантной относительно пространственных отражений. В этом случае поле должно преобразовываться по прямой сумме неприводимых представлений группы SL(2,C) /6/, т.е. по неприводимому представлению полной группы Лоренца

$$\tau \oplus \tau',$$

где

$$\tau = [\widetilde{1/2},\ \ell_1]$$

и

$$\tau' = [-1/2, \ell_1]. \tag{2.1}$$

Для обозначения неприводимых представлений группы SL(2,C) будем применять обозначения Гельфанда /6/.

Для конечномерных представлений SL(2,C) можно положить $\ell_1 = n+3/2$ и $n \geq 0$ . При $n=0$ представление (2.1) совпадает с обычными дираковскими спинорами.

Нам кажется удобнее реализовать эти представления в базисе однородной функции /9/. Посредством этого базиса нам удается построить единым образом как к.к. теорию, так б.к. теорию. В этом базисе пространство представлений $D_\tau$ , $\tau = [\ell_0, \ell_1]$ реализуется на однородных функциях комплексного SL(2,C) спинора $(z_1, z_2)$.

$$\phi(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{\nu_1} \bar{\lambda}^{-\nu_2} \phi(z_1, z_2), \tag{2.2}$$

где степени однородности $\nu_1 = \ell_1 + \ell_0 - 1$ и $\nu_2 = \ell_1 - \ell_0 - 1$ . В случае, когда имеем дело с конечномерными представлениями группы SL(2,C) , мы рассматриваем подпространства $E_\tau$ пространства $D_\tau$ , которые состоят из однородных полиномов, степени однородности $\nu_1$ , $\nu_2$ .

Двухкомпонентные паулиевские спиноры $\phi(x)$ и $\chi(x)$ в этом базисе представляются как

$$\phi(x,z)=\sum_{a=1}^{2}\phi^{a}(x)z_{a}$$

$$\chi(x,z)=\sum_{\dot b,\dot c=1}^{2}\chi_{\dot b}\,\epsilon^{\dot b\dot c}z_{\dot c}, \tag{2.3}$$

где

$$\epsilon=i\sigma_{2}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

Удобно представить спиноры $\phi$ и $\chi$, которые преобразуются по представлениям $\tau$ и $\tau'$ как один би -спинор.

$$\Psi(x,z)=\begin{pmatrix}\phi(x,z)\\ \chi(x,z)\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

При преобразовании из группы $SL(2,C)$ $\Psi(x,z)$ преобразуется как

$$[V(A)\Psi](x,z)=\Psi(x,zA), \tag{2.5}$$

где $V(A)$ - представление группы $SL(2,C)$, а $A$ - комплексная матрица второго порядка с определителем 1, связанная с преобразованиями Лоренца следующим образом:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,\sigma^{\nu}=A\sigma^{\mu}A^{*}.$$

Оператор пространственного отражения можно представить как /1/

$$V(I_s)=\begin{pmatrix}0&\theta(I_s)\\ \theta(I_s)&0\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где

$$\theta(I_s)=\exp\{\ i\frac{\pi}{2}(\bar z\epsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial z}+\bar z\epsilon\frac{\partial}{\partial z})\}.$$

Поскольку эти представления являются неунитарными, для них не существует скалярное произведение /9/, но для представления $r\oplus r'$ существует инвариантная билинейная эрмитовая форма:

$$\{\Psi(x),\Psi(x)\}=\int\Psi^*(x,z_1,z_2)G(z_1,z_2,w_1,w_2)\Psi(x,w_1,w_2)d^2z_1d^2z_2d^2w_1d^2w_2 \tag{2.7}$$

Здесь

$$G(z_1,z_2;w_1,w_2)=\begin{pmatrix}0 & g^{[r'r]}\\ g^{[\bar r r']} & 0\end{pmatrix}\quad(\bar r=r').$$

Для конечномерных представлений $g$ можно представить в виде /10/

$$\begin{aligned}g^{[r,r]}&=\frac{1}{\nu_1!\nu_2!}\sum_{k,m=0}^{\nu_1\nu_2}\frac{(-1)^{k+m}}{k!(\nu_1-k)!\,m!(\nu_2-m)!}\times\\&\times\delta^{(k,m)}(z_1,\bar z_1)\delta^{(\nu_1-k,\nu_2-m)}(z_2,\bar z_2)\times\\&\times\delta^{(\nu_1-k,\nu_2-m)}(w_1,\bar w_1)\delta^{(k,m)}(w_2,\bar w_2),\end{aligned}\tag{2.8}$$

здесь

$$\delta^{(k,m)}(x,y)=\frac{d^k}{\partial x^k}\delta(x)\frac{d^m}{\partial y^m}\delta(y).$$

Для бесконечномерных представлений имеем, согласно /9/,

$$g^{[r,r]}=\left(\frac{i}{2}\right)^2(z_1w_2-z_2w_1)^{-\ell_1-\frac{1}{2}}\ \overline{(z_1w_2-z_2w_1)}^{\,-\ell_1+\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Как легко можно проверить, форма (2.7) для дираковского спинора $\Psi(x,z)$ дает:

$$\{\Psi(x)\ \chi(x)\} = \phi^{\dot{a}}(x)\ \chi_{\dot{a}}(x) + \chi^{a}(x)\phi_{a}(x).$$

Для представлений (2.1) существуют операторы $\Gamma^{\mu}$, обладающие следующими трансформационными свойствами /1,6/:

$$V(A)\Gamma^{\mu}\ V^{-1}(Z) = \Lambda\ |\ (A)^{\mu}_{\nu}\ \Gamma^{\nu},$$
$$V(I_s)\Gamma^{\mu}V^{-1}(I_s) = g^{\mu\mu}\Gamma^{\mu}. \tag{2.10}$$

В базисе однородных функций операторы $\Gamma^{\mu}$ можно представить как /1/

$$\Gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & g^{\mu\mu}\ z\,\sigma_{\mu}\ \epsilon\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \bar{z}\ \epsilon^{-1}\sigma^{\mu}\ \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Посредством этих операторов можно построить инвариантное уравнение первого порядка /6/

$$(i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \kappa)\ \Psi(x;z) = 0. \tag{2.12}$$

В случае, когда $n = 0$, уравнение (12.12) совпадает с уравнением Дирака.

Представления группы Пуанкаре, в которые неприводимые представления $\tau \oplus \tau'$ входят как представления ее подгруппы $SL(2,C)$, являются вообще приводимыми. Они разлагаются на представления со спином $s = 1/2, 3/2 \dots n + 1/2$, когда $\tau$ конечномерное и $s = 1/2, 3/2, \dots$ когда $\tau$ – бесконечномерное представление. Разложение этого представления на неприводимые представления группы Пуанкаре можно выполнить при помощи проекционных операторов на состояния со спином $s$

$$\Psi_s(x;z) = \{\Pi_s(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}};z)\ \Psi(x)\}\quad (s = 1/2, 3/2, \dots) \tag{2.13}$$

Здесь $\{\quad\}$ означают эрмитовую форму (2.7) и

$$\Pi_s\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}; z, w\right) = \begin{pmatrix} 0 & K_s^{[\pi']}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}; z, w\right) \\ K_s^{[\tau'\tau']}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}; z, w\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Явный вид операторов $K_s$ был получен в работе /4/ для произвольного неприводимого представления группы $SL(2,C)$. Его мы приводим в Приложении.

При преобразовании из группы Пуанкаре операторы поля $\Psi_s(x; z)$ преобразуются как

$$U(a, A)\, \Psi_s(x; z)\, U^{-1}(a, A) = \Psi_s(\Lambda x + a; zA). \tag{2.15}$$

## 3. Уравнения для частицы определенного спина

Уравнение (2.12) можно заменить на систему уравнений

$$(i\Gamma^\mu \partial_\mu - \kappa_s)\, \Psi_s(x; z) = 0 \quad (s = \tfrac{1}{2} + \ldots). \tag{3.1}$$

Здесь $\kappa_s$ –реальная константа, имеющая размерность обратной длины. Эти уравнения являются инвариантными относительно группы Пуанкаре. Массовый спектр, соответствующий системе (3.1), имеет вид:

$$m_s = \frac{\kappa_s}{s + \frac{1}{2}}. \tag{3.2}$$

Если $\kappa_s$ с возрастает быстрее, чем линейно, то, согласно (3.2), следует, что массы частиц растут вместе с ростом спина.

Решения уравнений (3.1) можно представить в виде разложений по операторам рождения и уничтожения

$$\Psi_s(x;z)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\int\frac{d^3p}{p^0}\frac{m_s}{\sqrt{\kappa_s}}\sum_{\zeta=-s}^{s}\left(a_{s\zeta}(\vec{p})e^{-ipx}u_{s\zeta}(\vec{p};z)+b^*_{s\zeta}(p)e^{ipx}v_{s\zeta}(\vec{p};z)\right). \quad (3.3)$$

Здесь $p^0=\omega^{(s)}_{\vec{p}}$, $\omega^{(s)}_{\vec{p}}=\sqrt{m_s^2+\vec{p}^{\,2}}$, что соответствует тому, что уравнения (3.1) имеют ненулевые решения только тогда, когда $m_s^2=p^2$ /6/, и $u_{s\zeta}(\vec{p};z)$ $v_{s\zeta}(\vec{p};z)$ являются нормированными решениями уравнения (3.1) с положительной и отрицательной энергией, которые одновременно являются собственными функциями оператора спина и его третьей проекцией с собственными значениями $s$ и $\zeta$ (рассматриваем только решения уравнения (3.1) с $p^2>0$ ). Для этих спиноров используем нормировку /1/

$$\{u_{s\zeta}(\vec{p})\Gamma^0 u_{s\zeta'}(\vec{p})\}=\{v_{s\zeta}(\vec{p})\Gamma^0 v_{s\zeta'}(\vec{p})\}=(-1)^{s-\frac{1}{2}}\,\delta_{\zeta\zeta'}\,\frac{\omega^{(s)}_{\vec{p}}\cdot\kappa_s}{m_s^2}. \quad (3.4)$$

Для операторов $a_{s\zeta}$ и $b_{s\zeta}$ принимаем обычные антикоммутационные соотношения

$$[a_{s\zeta}(\vec{p}),a_{s'\zeta'}(\vec{q})]_+=[b_{s\zeta}(\vec{p}),b_{s'\zeta'}(\vec{q})]_+=\omega^{(s)}_{\vec{p}}\,\delta_{ss'}\,\delta_{\zeta\zeta'}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}). \quad (3.5)$$

Остальные равны 0. Имея в виду условие полноты операторов проектирования, получаем:

$$\Psi(x;z)=\sum_{s=1/2}\Psi_s(x;z). \quad (3.6)$$

## 4. Лагранжев формализм свободного поля

Лагранжиан, из которого получаются уравнения (3.1) и для которого спектр энергии для обсуждаемых нами полей является положительно определенным, можно выбрать в виде:

$$\mathfrak{L}(x) = \sum_{s=1/2} (-1)^{s-1/2} (i : \{ \bar{\Psi}_s (x) \Gamma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi_s (x) \} : - \kappa_s : \{ \bar{\Psi}_s (x) \Psi_s (x) \} : ), \tag{4.1}$$

где : : – знак нормального произведения.

Варьируя этот лагранжиан и учитывая при этом полноту проекционных операторов, получаем

$$\sum_{s=1/2} (-1)^{s-1/2} (i \Gamma^{\mu} \partial_{\mu} - \kappa_s) \Psi_s (x) = 0. \tag{4.2}$$

Применяя к уравнениям (4.2) операторы проектирования $\Pi_s$, имея в виду, что $\Pi_s$ коммутирует с оператором $\Gamma^{\mu} \partial_{\mu}$, получаем уравнения (3.1).

Используя теорему Нётера из лагранжиана (4.1) при учете уравнения (3.1), получаем тензор энергий-импульса и 4-вектор тока:

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_{s=1/2} (-1)^{s-1/2}\, i : \{ \bar{\Psi}_s (x) \Gamma^{\mu} \partial^{\mu} \Psi_s (x) \} : \tag{4.3}$$

и

$$J^{\mu}(x) = e \sum_{s=1/2} (-1)^{s-1/2} : \{ \bar{\Psi}_s (x) \Gamma^{\mu} \Psi_s (x) \} : \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) получаем операторы энергии-импульса и тока, которые сохраняются:

$$P^{\mu} = \int d^3x\, T^{0\mu}(x) = \sum_{s=1/2} \int_{p^0=\omega^{(s)}_{\vec{p}}} \frac{d^3p}{p^0} p^{\mu} \sum_{\zeta=-s}^{s} ( a^*_{s\zeta}(\vec{p})\, a_{s\zeta}(\vec{p}) + b^*_{s\zeta}(\vec{p})\, b_{s\zeta}(\vec{p}) ) \tag{4.5}$$

и

$$Q = \int d^3x\, J^0(x) = e \sum_{s=1/2} \int_{p^0=\omega^{(s)}_{\vec{p}}} \frac{d^3p}{p^0} \sum_{\zeta=-s}^{s} ( b^*_{s\zeta}(\vec{p})\, b_{s\zeta}(\vec{p}) - a^*_{s\zeta}(\vec{p})\, a_{s\zeta}(\vec{p}) ). \tag{4.6}$$

При этом мы в (4.3) и (4.4) подставили разложение (3.3). При получении (4.5) и (4.6) мы воспользовались также условиями нормировки (3.4).

Выражение для оператора энергий (4.5) показывает, что его спектр является положительно определенным.

Из (4.3) следует, что величины:

$$\pi_s(x,z) = i(-1)^{s-1/2} \int \Psi^*_s(x;w)\, G(w,z)\, d^2w_1\, d^2w_2 \qquad (s = 1/2, \dots) \tag{4.7}$$

можно рассматривать как канонически сопряженные импульсы к полям $\Psi_s(x;z)$.

Из (3.6), используя антикоммутаторные соотношения (3.5), получаем

$$[\Psi(x;z), \Psi^*(y,w)]_+ = i \sum (-1)^{s-1/2} R_s(-i\partial^\mu; z,w)\, \Delta(x,y, m_s^2) \tag{4.8}$$

и

$$[\pi_s(x;z), \Psi(y;w)]_+ = i(-1)^{s-1/2}\, R_s \overleftarrow{\Gamma}^0\, \Delta(x-y; m_s). \tag{4.9}$$

Здесь $\Delta(x;m_s)$ – обычная функция Паули-Йордана для скалярного поля с массой $m_s$. Обозначение $\overleftarrow{\Gamma}^0$ показывает, что оператор $\Gamma^0$ действует на переменные $z$, содержащиеся в $R_s$.

Используя результаты /4/, имеем:

$$R_s = \sum_{\zeta=-s}^{s} u_{s\zeta}(p;z)\, u^*_{s\zeta}(p;w) = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{K}}_s^{[\dot{\tau},\tau]}(p;z\,w) & \tilde{\tilde{K}}_s^{[\tau,\tau]}(p;z,w) \\ \tilde{\tilde{K}}_s^{[\dot{\tau},\dot{\tau}]}(p;z,w) & \tilde{\tilde{K}}_s^{[\tau,\dot{\tau}]}(p;z,w) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Здесь

$$\tilde{\tilde{K}}_s = K_s(p^2 = m_s^2).$$

Явный вид операторов $K_s$ дан в Приложении.

Из-за того, что для к.к. полей в оператор $R_s$ входят производные только конечного порядка, антикоммутационные соотношения являются локальными. Это не так для б.к. полей /4,5/. Подставляя в (4.8) и (4.9) $x^0 = y^0$, в правой части получаем пространственную дельта-функцию и ее производные, коэффициенты перед которыми являются ограниченными. Для к.к. полей встречаются производные только конечного порядка. Согласно /9/, в этом случае формализм является каноническим.

Из (3.6) и (4.5) следует, что поле $\Psi(x;z)$ удовлетворяет гейзенберговским уравнения движения

$$i[P^{\mu}, \Psi(x;z)] = i \frac{\partial \Psi(x,z)}{\partial x_{\mu}} . \tag{4.11}$$

Они показывают, что оператор энергии-импульса действительно является генератором пространственно-временных сдвигов.

## 5. Взаимодействующие поля

Здесь мы обсудим некоторые возможные взаимодействия к.к. полей полуцелого спина с тензорными полями, для которых сохраняется условие локальной коммутативности. При этом мы ограничиваемся только взаимодействиями прямой связи. Подобное рассмотрение делалось в работе /10/.

Будем рассматривать лагранжианы взаимодействия, инвариантные относительно группы $SL(2,C)$

$$\mathfrak{L}_{int}(x) = f\{\Psi(x)\, 0^{\mu_1 \dots \mu_2}\, \Psi(x)\}\, \Phi_{\mu_1 \dots \mu_2}(x). \tag{5.1}$$

Здесь $f$ -константа взаимодействия, а $0^{\mu_1 \dots \mu_2}$ - симметрический тензор, построенный из операторов $\Gamma^{\mu}$. Максимальный ранг к тензора $0^{\mu_1 \dots \mu_k}$, при котором его компоненты являются независимым, определяется представлениями группы $SL(2,C)$. Например, для дираковского представления $k=1$. Можно показать, что максимальное значение $k$ для представления $[1/2, n+3/2] \oplus [-1/2, n+3/2]$ равно $2n+1$. Для этого нужно использовать явный вид операторов $\Gamma^{\mu}$ и базисные векторы пространства $E_{\kappa}$ /1/.

Уравнения, которые получаются из лагранжиана (4.1) при включении взаимодействия (5.2), имеют вид:

$$\sum_{s=1/2}^{n+1/2} (-1)^{s-1/2} (i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \kappa_s)\Psi_s(x;z) = -f\, 0^{\mu_1 \dots \mu_\ell}\,\Psi(x;z)\,\Phi_{\mu_1\dots\mu_\ell}(x) \qquad (5.2)$$

Уравнения для тензорного поля обсуждались в работе /7/.

Используя проекционные операторы $\Pi_s$, из уравнения (5.2) получаем:

$$(i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \kappa_s)\Psi_s(x;z) = -(-1)^{s-1/2} f\,\{\Pi_s\, 0^{\mu_1\dots\mu_\ell}\,\Psi(x)\,\Phi_{\mu_1\dots\mu_\ell}(x)\}$$
$$(s=1/2,\dots n+1/2).$$

Если

$$\{\Pi_s(\partial;z,w)\,0^{\mu_1\dots\mu_\ell}\,\Psi(x;z,w)\,\Phi_{\mu_1\dots\mu_\ell}(x)\} \neq 0 \qquad (5.3)$$

для $s=1/2, \dots, n+1/2$, тогда уравнение ни для одной $\Psi_s(x;z)$ не является свободным и, кроме того, согласно (5.3), они зацепляются.

Решение уравнения (5.3) можно представить как

$$\Psi_s(x;z) = \Psi_s^{out}(x;z) + f\int d^4x'\,\Delta_R(x-x';m_s)\times$$
$$\times\{R_s(\partial_{x'};z,w)\,0^{\mu_1\dots\mu_\ell}\,\Psi(x';w)\,\Phi_{\mu_1\dots\mu_\ell}(x')\}. \qquad (5.4)$$

Здесь $\Delta_R(x;m_s)$ – запаздывающая функция скалярного поля с массой $m_s$.

Используя представления (5.4), мы можем получить коммутационные соотношения для взаимодействующих полей $\Psi_s$ в виде разложения по константе взаимодействия $f$.

$$[\Psi_s(x;z),\Psi^*_{s'}(y;w)]_+ = [\Psi_s^{out}(x;z),\Psi^{*\,out}_{s'}(y;w)]_+ +$$

$$+ f A_{ss'}(x,y;z,w)+\ldots \qquad (5.5)$$

Принимая для $\Psi_s^{out}$ - коммутационные соотношения для свободных полей, имеем:

$$A_{ss'}(x,y;z,w) = i\,\delta_{ss'}(-1)^{s-1/2}\int d^4x'\,[\Delta_R(x-x';m_s)\times$$

$$\times\{R_s(\partial^\mu_{x'};z,w')O^{\mu_1\ldots\mu_\ell}\Phi_{\mu_1\ldots\mu_\ell}(x')R_s(\partial^\mu_{x'};w',w)\}\Delta(x'-y;m_s)+\Delta_R(y-x';m_s)\times \qquad (5.6)$$

$$\times\{R_s(\partial^\mu_{x'},w,w')O^{\mu_1\ldots\mu_\ell}\Phi_{\mu_1\ldots\mu_\ell}(x')R_s(\partial^\mu_{x'};w',z)\}\Delta(x-x';m_s)].$$

Оператор $R_s$ для к.к. полей содержит пространственно-временные производные только конечного порядка и поэтому $A_s$ является локальным.

Складывая (5.5) для $s = 1/2,\ldots,n+1/2$, получаем коммутационные соотношения для поля $\Psi(x;z)$. Функцию распространения поля $\Psi(x;z)$ можно выразить через двухточечную функцию этого поля

$$S_c(x-y;z,w) = i\langle 0\,|\,T(\Psi(x;z)\Psi^*(y;w))\,|\,0\rangle =$$

$$= i\,\Theta(x^0-y^0)\langle 0|\Psi(x;z)\Psi^*(y;w)|0\rangle + \Theta(y^0-x^0)\langle 0|\Psi^*(y;w)\Psi(x;z))|0\rangle. \qquad (5.7)$$

Используя полученные в /4/ представления двухточечных функций, получаем:

$$S_c(x-y;z,w) = \sum_{s=1/2}\frac{(-1)^{s-1/2}}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{R_s(p^\mu;z,w)e^{-ip(x-y)}}{p^2-m_s^2-i\epsilon}. \qquad (5.8)$$

При получении (5.8) и (5.7) мы отбросили все контактные члены, которые получаются при коммутации $\Theta$-функции с операторами $R_s$.

Из (5.8) следует, что при $n > 0$ теория является неперенормируемой.

Автор выражает глубокую благодарность Д.И. Блохинцеву, И.Т. Тодорову, Х.Я. Христову и Д.Ц. Стоянову за интерес к работе и ценные указания, а также К.В. Рериху за помощь при оформлении работы.

## *Приложение*

Для построения операторов проектирования $\Pi_s$ и операторов $R_s$, посредством которых выражаются коммутационные соотношения, нам необходим явный вид операторов $K_s$. Эти операторы были получены в работе /4/. Для рассматриваемых нами представлений они имеют вид:

$$
\begin{aligned}
K_s^{[rr]}(\underset{\approx}{p};z,w) &= (z\epsilon w)\,L_s^{(1,0)}(\underset{\approx}{p};z,w)\\
K_s^{[r'r']}(\underset{\approx}{p};z,w) &= \overline{(z\epsilon w)}\,L_s^{(1,0)}(\underset{\approx}{p};z,w)\\
K_s^{[rr']}(\underset{\approx}{p};z,w) &= (z\underset{\approx}{n}\bar{w})\,L_s^{(0,1)}(\underset{\approx}{p};z,w)\\
K_s^{[r'r]}(\underset{\approx}{p};z,w) &= (w\underset{\approx}{n}\bar{z})\,L_s^{(0,1)}(\underset{\approx}{p};z,w),
\end{aligned}
\tag{П.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
L_s^{(1,0)}(\underset{\approx}{p};z,w) &= (z\underset{\approx}{n}\bar{z})^{\ell_1-3/2}\,(w\underset{\approx}{n}\bar{w})^{\ell_1-3/2}\,P_{s-1/2}^{(1,0)}(\cos\theta)\\
L_s^{(0,1)}(\underset{\approx}{p};z,w) &= (z\underset{\approx}{n}\bar{z})^{\ell_1-3/2}\,(w\underset{\approx}{n}\bar{w})^{\ell_1-3/2}\,P_{s-1/2}^{(0,1)}(\cos\theta).
\end{aligned}
\tag{П.2}
$$

Здесь $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ – полиномы Якоби, а

$$
\underset{\approx}{n} = \frac{p^{\mu}}{\sqrt{p^2}}\,\sigma_\mu \quad ; \qquad \cos\theta = 1 - \frac{2\,|z\epsilon w|^2}{(z\underset{\approx}{n}\bar{z})\,(w\underset{\approx}{n}\bar{w})}.
$$

Переход в x –представление делается посредством замены

$$p^{\mu} = -i \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}.$$

## Л и т е р а т у р а

1. D.Tz.Stoyanov and I.T.Todorov. Jorn.Math.Phys., 9, 2146 (1968).

И.Т. Тодоров. Статья в сборнике "Вопросы теории элементарных частиц", Дубна (1968).

2. G.Feldman and P.T.Mattews , Ann. Phys., 40, 19 (1966).
Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. Ядерная физика 6, 186, (1967).
3. I.T.Grodsky and R.F.Streater. Phys. Rev.Letters 20, 695 (1968).
4. I.T.Todorov and R.P, Zaikov. ICTP Trieste Internal report IC/68/50 (1968).
5. H.D.I. Abarbanel and Frisham. Stanford preprint SLAC-PUB-390 (1968).
6. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос и З.Я. Шапиро. "Представления группы вращений и группы Лоренца". Физматгиз, Москва (1958).
7. Р.П. Зайков. Сообшение ОИЯИ Р-4301, Дубна 1969.
8. Д.И. Блохинцев. ЖЭТФ, 17, 545 (1947).
9. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Обобщение функций т.5. Физматгиз, Москва (1962).
10. Х.Я. Христов и др. в сборнике "Вопросы теорий элементарных частиц", Дубна (1968).
11. G.Källen. University of Lund, Lund, preprint (1968).
12. W.Bierter and K.W.Bitar. Nuovo Cim., 60, 22 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1969 года.