ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4508

Варужан Балуни, Нгуен Ван Хьеу

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

АНАЛИТИЧНОСТЬ ФОРМФАКТОРА И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ РАДИУСА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

1969

P2 - 4508

Варужан Балуни, Нгуен Ван Хьеу

АНАЛИТИЧНОСТЬ ФОРМФАКТОРА И ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ РАДИУСА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Направлено в "Physics Letters"

В ряде недавних работ /1-8/ были изучены экспериментально проверяемые следствия аналитичности формфактора. В частности, было показано, что если значение формфактора $F(t)$ в физической области канала рассеяния $t < 0$ по модулю меньше единицы, то соответствующий среднеквадратичный радиус

$$\langle r^2 \rangle = 6F'(0)$$

не может превзойти некоторый предел, зависящий от поведения формфактора на разрезе $t \geq 4m_\pi^2$ /4,6-7/.

В настоящей работе мы получим новые верхние оценки для $\langle r^2 \rangle$, которые в большинстве случаев являются улучшением ранее опубликованных результатов.

Предположим, что формфактор $F(t)$ аналитичен в комплексной плоскости t с разрезом $t \geq 4m_\pi^2$. Для простоты рассмотрим случай, когда $F(t)$ ограничен на разрезе. Наши основные результаты заключаются в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $F(t)$ удовлетворяет условиям

$$|F(t)| \leq \begin{cases} M & \text{при } t \geq 4m_\pi^2, \\ 1 & \text{при } t \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Тогда либо

$$|F'(0)| \leq \begin{cases} \dfrac{M}{16\, m_\pi^2} & \text{при } \lg M \leq \pi, \\[2ex] \dfrac{1}{8\, m_\pi^2} \quad \dfrac{1}{\Phi(a)} & \text{при } \lg M \geq \pi, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$a = \frac{2}{\pi} \lg M ,$$

а

$$\Phi(a) = a^2 - 2 - \sqrt{(a^2-2)^2 - 4} \quad \exp \left\{ -a \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{a^2-4}} \right\}, \tag{3}$$

либо

$$F'(0) < \frac{1}{16 m_a^2} \quad \frac{M^2 - 1}{M} . \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Посредством конформного отображения

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - t/4m_\pi^2}}{1 + \sqrt{1 - t/4\, m_\pi^2}} \tag{5}$$

мы преобразуем плоскость t в единичный круг D_z в плоскости z. Положим $f(z) \equiv F(t)$. Применим к функции $f(z)$ неравенство Коши

$$|f'(0)| \le \frac{\max\limits_{|z|=\rho} |f(z)|}{\rho}, \tag{6}$$

где $\rho \le 1$. Учитывая условие (1), используем известную теорему о двух константах[9]

$$|f(z)| \le M^{\omega(z,\, C_z,\, D_z)}, \tag{7}$$

где $\omega(z, C_z, D_z)$ — гармоническая мера единичной окружности C_z относительно круга D_z с разрезом вдоль радиуса $[-1, 0]$ – равна:

$$\omega(z, C_z, D_z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{2 \operatorname{Re} \sqrt{z}}{1 - |z|}. \tag{8}$$

Возвращаясь к неравенству (6), имеем

$$|f'(0)| \le \frac{1}{\rho} \exp\left(a \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right). \tag{9}$$

Найдя минимум выражения в правой части (9), получим

$$|f'(0)| \le \begin{cases} M & \text{при } \lg M \le \pi, \\ \dfrac{2}{\Phi(a)} & \text{при } \lg M > \pi, \end{cases} \tag{10}$$

откуда и вытекает неравенство (2).

Перейдем теперь к доказательству формулы (4). Функция $w(z) = \frac{1}{M}\rho(z)$ принимает значения в единичном круге D_w в плоскости w, и при этом ее значения на отрезке $a_z = [-1, 0]$ попадают в интервал $[-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}]$. Обозначим через $\omega(w, a_w D_w)$ гармоническую меру отрезка $a_w = [-1, \frac{1}{M}]$ относительно круга D_w. На основе принципа гармонической меры имеем

$$\omega(z, d_z, D_z) < \omega(w, a_w, D_w). \tag{11}$$

Нетрудно проверить с помощью выражения (8), что

$$\omega(z, a_z, D_z) = 1 - \omega(z, C_z, D_z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{1-|z|}{|1+z|}. \tag{12}$$

Легко видеть, что в переменных η,

$$\eta = \frac{w - w_0}{1 - w w_0}, \quad w_0 = \frac{1}{M}, \tag{13}$$

$\omega(w, a_w, D_w)$ определяется формулой (12). Таким образом, имеем

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,sin} \frac{1-|z|}{|1+z|} < \operatorname{arc\,sin} \frac{1-|\eta|}{|1+\eta|}. \tag{14}$$

Сравнивая выражения в левой и правой частях при малых $|z|$, приходим к неравенству

$$f'(0) < \frac{M^2-1}{M}, \qquad (15).$$

откуда и вытекает формула (4).

Обобщим теперь доказанную теорему на случай, когда $F(t)$ при $t \to +\infty$ растет, как полином:

$$|F(t)| < \mathrm{const}\ t^N, \quad t \to +\infty.$$

Вместо $f(z)$ рассмотрим функцию $g(z) = f(z)(z+1)^{2N}$. Она аналитична в единичном круге и ограничена на его границе. Кроме того, $|g(z)| < 1$ при $z < 0$, если $|f(z)| < 1$ на этом интервале. Поэтому к функции $g(z)$ применимы все рассуждения в доказательстве приведенной выше теоремы. Вместо условия $|f(z)| < M$ при $|z| = 1$ мы имеем теперь условие $|g(z)| < M$. Итак, мы получили

Следствие. Пусть функция $F(t)$ меньше единицы по модулю при $t < 0$, а на разрезе удовлетворяет условию

$$\left|\frac{2}{1+\sqrt{1-t/4m_\pi^2}}\right|^{2N} |F(t)| \le M, \quad t \ge 4m_\pi^2, \qquad (16)$$

Тогда либо

$$\left| F'(0) + \frac{N}{8 m_\pi^2} \right| \leq \begin{cases} \dfrac{M}{16 \, m_\pi^2} & \text{при } \lg M \leq \pi , \\[2ex] \dfrac{1}{8 m_\pi^2} \; \dfrac{1}{\Phi(a)} & \text{при } \lg M \geq \pi , \end{cases} \tag{17}$$

либо

$$F'(0) + \frac{N}{8 m_\pi^2} < \frac{1}{16 \, m_\pi^2} \; \frac{M^2 - 1}{M} . \tag{18}$$

В настоящее время имеются данные по значению модуля формфактора $F_\pi(t)$ в небольшом интервале $t > 4m_\pi^2$ /10/. Предположим, что $F_\pi(t)$ ограничен и его модуль достигает максимума в точке $t = m_\rho^2$. Тогда из формул (2) и (4) получаем

$$\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle} < 2,1 \text{ ферми},$$

в то время как, по последним экспериментальным данным /11/,

$$\sqrt{r_\pi^2} \approx 0,8 - 0,9 \text{ ферми}.$$

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, М.К.Поливанову и А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе.

Л и т е р а т у р а

1. A.Martin. Nuovo Cim., 37, 671 (1965).
2. A.M.Jaffe. Phys. Rev. Lett., 17, 661 (1966).
3. B.V.Geskenbein and B.L.Ioffe, JETP, 46, 902 (1964).
4. Нгуен Ван Хьеу. ЯФ, 7, 5, 1111 (1968).
5. Нгуен Ван Хьеу. ДАН СССР, 182, 6 (1968).
6. T.N.Tran, R.Vinh, Mau and P.X.Yem. Phys. Rev., 172 (1968).
7. В.Балуни, Нгуен Ван Хьеу, В.А.Сулейманов. ЯФ, 9, 635 (1969); Report at the XIV International Conf. on High Energy Physics, Vienna, 1968.
8. Г.Г.Волков, В.В.Ежела, М.А.Мествиришвили, ЯФ, 9, 857 (1969).
9. С.Стоилов. Теория функции комплексного переменного, т.2, ИЛ, 1962.
10. Y.L.Auslender et al.. Phys. Lett., 25B, 433 (1967).
11. C.W.Akerlof et al.. Phys. Rev., 163, 1482 (1967).

Рукопись поступила в издательский отдел

28 мая 1969 года.