ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4472

Г.В.Ефимов

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4472

Г.В.Ефимов

СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Направлено в ЖМТФ

1. Введение

В теории возмущений современной квантовой теории поля S -метрица строится в виде функционального разложения по степеням константы связи:

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int d^4 x_1 \ldots \int d^4 x_n \; S_n(x_1, \ldots x_n), \tag{1.1}$$

где $S_n(x_1, \ldots, x_n)$ являются операторными выражениями, зависящими от функций поля. При определении конкретного вида функций $S_n(x_1, \ldots x_n)$, кроме общих требований релятивистской инвариантности, унитарности, причинности и др. (см., например,/1/), используются следующие два принципа, на которых нам хотелось бы более подробно остановиться.

I. Принцип соответствия: при бесконечно малых константах взаимодействия S -матрица должна иметь вид

$$S(g) = 1 + i g \int d^4 x \; \mathcal{L}_I(x), \tag{1.2}$$

где $\mathcal{L}_I(x)$ - лагранжиан взаимодействия квантованных полей. Этот принцип определяет $\mathcal{L}_I(x)$.

II. Определение T-произведения: необходимо точно математически определить, что понимается под знаком хронологического упорядочивания в произведении

$$T(\mathcal{L}_I(x_1)\, \mathcal{L}_I(x_2)) = ? \tag{1.3}$$

или

$$T(\mathcal{L}_I(x_1)\ldots\mathcal{L}_I(x_2)) = ? \,, \tag{1.3a}$$

поскольку эта операция не определена при совпадающих аргументах $x_1 = x_2$.

Знание одного только лагранжиана взаимодействия еще не позволяет найти S- матрицу теории. Более того, по одному лагранжиану взаимодействия можно построить несколько различных S -матриц. Необходимо привлекать дополнительные принципы, чтобы обеспечить единственность построения S -матрицы по заданному $\mathcal{L}_I(x)$. В случае обычных так называемых перенормируемых взаимодействий таким принципом является требование перенормируемости. В случае неперенормируемых взаимодействий такого принципа уже нет, и поэтому совсем не ясно, как строить теорию возмущений от порядка к порядку по константе связи – возникает фактически функциональный произвол при построении конечной S -матрицы теории.

Существенно заметить, что при переходе к классическому пределу в S -матрице квантованных полей при $\hbar \to 0$ (где $\hbar$ – постоянная Планка) исчезают все вклады от так называемых замкнутых петель, т.е. от тех частей S -матрицы, для которых наиболее существенно определение T -произведения при совпадающих аргументах/2,3/. Это означает, что определение T – произведения имеет чисто квантовую природу. Поэтому эта проблема должна быть решена только в рамках квантовой теории поля.

К сожалению, в настоящее время, кроме принципа перенормируемости, пригодного лишь для весьма узкого класса взаимодействий, никаких других физических или достаточно убедительных математических принципов не существует. Сейчас начинают появляться работы, где эту проблему пытаются решить для специально выбранных неперенормируемых лагранжианов взаимодействия (см., например,/4,5/), однако она даже для этих частных лагранжианов не решена полностью.

В настоящей работе мы покажем на примере однокомпонентного скалярного поля, как в рамках нелокальной теории для л ю б о г о лагранжиана взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_I(x) = g \sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \phi^n(x) : , \tag{1.4}$$

где $u_3, u_4, ..$ – произвольная последовательность вещественных чисел, можно построить нелокальную S -матрицу, конечную и унитарную в каждом порядке теории возмущений.

Основной постулат будет состоять в определении "хронологического" оператора т о л ь к о для произведения двух лагранжианов во втором порядке теории возмущений

$$T(\mathcal{L}_I(x)\, \mathcal{L}_I(y)). \tag{1.5}$$

Если справедлива физическая гипотеза, что принципиально нельзя ничего сказать о поведении частиц на достаточно малых пространственно-временных расстояниях, тогда к выражению (1.5) можно добавить операторозначную обобщенную функцию из некоторого пространства нелокальных обобщенных функций/6,7/.

Естественно, введение добавочных нелокальных обобщенных функций – процедура крайне неоднозначная. Нами будет введен "принцип минимальной области роста", в рамках которого будет существенно ограничен произвол в выборе вводимой регуляризации.

Нам кажется, что предлагаемый нами единый метод рассмотрения практически любых лагранжианов взаимодействия окажется полезным для дальнейшего изучения структуры квантовой теории поля.

2. Постановка задачи

В теории квантованного скалярного поля нами будет предложен метод построения конечной S -матрицы по теории возмущений для лагранжианов взаимодействия, которые зависят от скалярного поля $\phi(x)$ существенно нелинейным образом. При этом лагранжиан свободного поля остается обычным, так что никаких трудностей с квантованием теории не возникает. Плотность лагранжиана записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_I(x), \tag{2.1}$$

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{2}\left(m^2\phi^2(x) - \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\nu}\right), \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_I(x) = g U(\phi(x)), \tag{2.3}$$

где $U(\phi)$ представима в виде ряда

$$U(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} : \phi^n(x) :. \tag{2.4}$$

Здесь $\{u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots\}$ – некоторая последовательность вещественных чисел. Мы не будем накладывать никаких ограничений на рост чисел u_n. Будем говорить, что аналитическая функция $g(\xi)$ является порядком роста последовательности $\{u_n\}$, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|u_n|}{g(n)} = 1. \tag{2.5}$$

В функциональном анализе показывается, что для любой последовательности чисел $\{u_n\}$ всегда существует комплексная вполне аддитивная мера $\sigma(\xi)$ в плоскости комплексного переменного ξ, такая, что

$$u_n = \int \xi^n \, d\sigma(\xi). \tag{2.6}$$

Из условия (2.5) легко получить, что

$$\int e^{G(|\xi|)} |d\sigma(\xi)| < \infty, \tag{2.7}$$

где

$$G(|\xi|) = \max_{n>0} (n \ln|\xi| - g(n)). \tag{2.8}$$

Тогда, учитывая (2.6), лагранжиан взаимодействия $\mathfrak{L}_I(x)$ можно представить в виде[x/]

$$\mathfrak{L}_I(x) = g \int : e^{\xi\phi(x)} : d\sigma(\xi). \tag{2.9}$$

Задача построения по заданному лагранжиану взаимодействия конечной S-матрицы ставится следующим образом/10/:

Возможно ли нелинейному лагранжиану взаимодействия типа (2.4) поставить в соответствие унитарную S-матрицу, свободную от ультрафиолетовых расходимостей в каждом порядке теории возмущений?

Еще раз подчеркнем, что слова "поставить в соответствие" связаны с определением T-произведения при совпадающих аргументах, о чем говорилось во введении. Следует заметить, что в случае нелокальных теорий смысл T как строгого упорядочивания операторов поля во времени уже теряет смысл. Мы сохраним символ T, но под ним будем понимать некоторую операцию, согласно которой мы будем строить $S_n(x_1 \ldots x_n)$ по заданному лагранжиану $\mathfrak{L}_I(x)$. Эта операция является как раз тем дополнительным постулатом теории, которая гарантирует единственность построения S-матрицы по заданному лагранжиану взаимодействия.

---

x/ Заметим, что полученное представление формально, поскольку интеграл $\int e^{\xi\phi} d\sigma(\xi)$,

где ϕ -просто число, может расходиться. Поэтому формула (2.9) должна рассматриваться лишь как иная запись формального степенного ряда (2.4).

3. Введение формфактора в теорию

Прежде всего нам хотелось бы привести ряд общих соображений, которые бы прояснили, что мы можем ожидать в случае успешного построения конечной унитарной S-матрицы по нелинейному лагранжиану взаимодействия.

Расмотрим S-матрицу в первом порядке по константе связи g. Имеем

$$gS_1 = i\int d^4x\,\mathcal{L}_I(x) = g\int d^4x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{u} :\phi^n(x): . \tag{3.1}$$

S_1 описывает любые упругие и неупругие процессы с любым числом входящих и выходящих частиц, причем амплитуды всех этих процессов являются константами.

Во втором порядке теории возмущений имеем:

$$S_2 = \frac{i^2}{2}\iint dx_1 dx_2 T(\mathcal{L}_I(x_1)\,\mathcal{L}_I(x_2)) =$$
$$= \frac{i^2}{2}\iint d x_1\, d x_2 \sum_{m_1 m_2=0}^{\infty} F^{(2)}_{m_1 m_2}(x_1-x_2) : \frac{\phi^{m_1}(x_1)}{m_1!}\,\frac{\phi^{m_2}(x_2)}{m_2!} : \tag{3.2}$$

Зная представление (2.4), легко можно получить для $F^{(2)}_{m_1 m_2}$ выражение

$$F^{(2)}_{m_1 m_2}(x_1-x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{m_1+n}\, u_{m_2+n}}{n!}[\Delta^c_m(x_1-x_2)]^n, \tag{3.3}$$

где $\Delta^c_m(x_1-x_2)$ – причинная функция скалярного поля

$$\Delta^c_m(x_1-x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{d^4p\, e^{ip(x_1-x_2)}}{m^2-p^2-i\epsilon}. \tag{3.4}$$

Полученный ряд обладает особенностями двух сортов. Во-первых, существуют такие последовательности коэффициентов $\{u_n\}$, для которых ряд расходится при любых Δ^c , во-вторых, даже в случае сходимости ряда функция, которую этот ряд представляет, имеет существенную особенность при $x_1 = x_2$. Поэтому вычисление фурье-образа представляет собой непростую задачу. Собственно это и составляет главную трудность при изучении неперенормируемых теорий.

Предположим, что мы как-то умеем вычислять интегралы

$$\overset{\approx}{F}{}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2) = i\int d^4x\, e^{ipx}\, F^{(2)}_{m_1 m_2}(x). \tag{3.5}$$

Предположим, что эти функции конечны. Какими свойствами должны обладать функции $\overset{\approx}{F}{}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$, если условия унитарности и причинности выполнены?

Для простоты рассмотрим амплитуду упругого рассеяния $\overset{\approx}{F}{}^{(2)}_{22}(p^2)$. Согласно (3.3) она может быть представлена в некотором смысле как бесконечная сумма диаграмм Фейнмана

Если S -матрица унитарна в каждом порядке теории возмущений, тогда мнимая часть $\overset{\approx}{F}{}^{(2)}_{22}(p^2)$ при $p^2 > 4m^2$ должна быть равна:

$$\mathrm{Im}\,\overset{\approx}{F}{}^{(2)}_{22}(p^2) = \rho_{22}(p^2) = \sum_{n=2}^{\left[\frac{\sqrt{p^2}}{m}\right]} \frac{u^2_{n+2}}{n!}\,\Omega_n(p^2), \tag{3.6}$$

где $\Omega_n(p^2)$ – фазовый объем n скалярных частиц с массой m :

$$\Omega_n(p^2) = \frac{1}{(2\pi)^{3(n-1)}}\int\frac{d\vec{k}_1}{2\omega_1}\dots\int\frac{d\vec{k}_n}{2\omega_n}\,\delta^{(4)}(p-k_1-\dots-k_n). \tag{3.7}$$

Поскольку коэффициенты u^2_{n+2} положительны, мнимая часть (3.6) растет с ростом p^2 быстрее, чем любая конечная степень p^2 , если все $u_n \neq 0$. В таблице приведены примеры зависимости роста функции $\rho_{22}(p^2)$ от вида коэффициентов u_n .

Таблица

$U(\phi)$	u_n	$G(\|\xi\|)$	$\ln \rho_{22}(\kappa^2)$ $_{\kappa\to\infty}$
$\sin\phi$	$\approx a^n$	$G(\|\xi\|)=\infty$	$\mathrm{const}\ \kappa^{2/3}$
$e^{-\phi^2}$	$\approx\Gamma(\frac{n}{2})$	$\|\xi\|^2$	$\mathrm{const}\cdot\kappa$
$e^{-\phi^4}$	$\approx\Gamma(\frac{3}{4}n)$	$\|\xi\|^{3/4}$	$\frac{5}{3}\kappa\ln\kappa$
$\frac{\phi}{\sqrt{1+f\phi^2}}$	$\approx\Gamma(n)$	$\|\xi\|$	$\kappa\ln\kappa$
$\sum_n^\infty n!\ \phi^n$	$\approx\Gamma(2n)$	$\|\xi\|^{1/2}$	$4\kappa\ln\kappa$
$\sum_n^\infty e^{n^2}\phi^n$	$\approx e^{n^2}$	$(\ln\|\xi\|)^2$	$2\kappa^2$
ϕ^N	$u_n=0;\ n>N$	$G(\|\xi\|)=\infty$ при $\|\xi\|>\epsilon$	$\ln\kappa^{2N}$

Фактически в теории с существенно нелинейным лагранжианом взаимодействия единственной хорошо определенной математически величиной является функция

$$\rho_{m_1 m_2}(p^2) = \sum_{n=2}^{[\sqrt{p^2}/m]} \frac{u_{n+m_1} u_{n+m_2}}{n!} \Omega_n(p^2), \tag{3.8}$$

так как она определяется конечной суммой и имеет смысл для любых последовательностей коэффициентов $\{u_n\}$. По существу, наша задача состоит в том, чтобы восстановить теорию по этим спектральным функциям, пользуясь общими принципами квантовой теории поля.

Что теперь можно сказать о поведении всей амплитуды $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$? Ее реальная часть может быть найдена лишь только после определения интеграла (3.5). Однако из общих соображений следует, что $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$, являясь амплитудой второго порядка теории возмущений, должна иметь простой полюс в точке $p^2 = m^2$ с вычетом $u_{1+m_1} u_{1+m_2}$ и точку ветвления при $p^2 = 4m^2$. Скачок на этом разрезе равен $2i\rho_{m_1 m_2}(p^2)$. Других особенностей в конечной плоскости p^2 эта амплитуда не должна иметь. Таким образом, функция $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p\ )$, если она существует, может быть представлена в виде

$$\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2) = \frac{u_{1+m_1} u_{1+m_2}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} + \tilde{\tilde{W}}(p^2) + \frac{\tilde{V}(p^2)}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{m_1 m_2}(\kappa^2)}{(\kappa^2 - p^2 - i\epsilon)\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)}, \tag{3.9}$$

где $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ и $\tilde{\tilde{W}}(p^2)$ – целые функции в плоскости комплексного p^2, вещественные при вещественных p^2 и такие, что интеграл в (3.9) сходится. Если $\tilde{\tilde{W}}(p^2)$ и $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ являются целыми функциями порядка роста меньше 1/2, тогда амплитуда $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$ соответствует локальной теории. Если же $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ и $\tilde{\tilde{W}}(p^2)$ – целые функции порядка роста 1/2 или выше, то $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$ соответствует нелокальной теории (см. /6,7/).

В дальнейшем мы положим следующее определение причинной амплитуды $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$:

$$\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2) = \tilde{\tilde{V}}(p^2)\{ \frac{u_{1+m_1}\; u_{1+m_2}}{\tilde{\tilde{V}}(m^2)(m^2-p^2-i\epsilon)} + \tag{3.10}$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{m_1 m_2}(\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)(\kappa^2-p^2-i\epsilon)} \}.$$

Проблемой, как выбрать формфактор $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$, мы займемся ниже.

Посмотрим теперь, к каким изменениям в конфигурационном пространстве приводит определение амплитуды $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$ согласно формуле (3.10). В x-пространстве получим

$$F^{(2)}_{m_1 m_2}(x_1-x_2) = \int d^4 y\, V(x_1-y)\{ u_{1+m_1}\, u_{1+m_2}\, \Delta^c_m(y-x_2) + \tag{3.11}$$

$$+ \frac{i}{\pi}\int_{4m_2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho_{m_1 m_2}(\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)} \Delta^c_\kappa(y-x_2) \},$$

где $V(x_1-x_2)$ – нелокальная обобщенная функция вида

$$V(x_1-x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Box^n \delta^{(n)}(x_1-x_2), \tag{3.12}$$

если $\tilde{\tilde{V}}(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (p^2)^n$. Такой тип нелокальных функций рассмотрен в/6,7/. Итак, полученная причинная функция является сверткой причинной функции умеренного роста и нелокальной обобщенной функции. Иначе, функция $F^{(2)}_{m_1 m_2}(x_1-x_2)$ представляет собой обычную хорошо определенную причинную функцию умеренного роста, которая как бы "размазана" с помощью нелокальной обобщенной функции $V(x_1-x_2)$.

Выражение (3.11) математически хорошо определено. Можно дать другое представление в x –пространстве для функции (3.10). Воспользовавшись тождеством

$$[\Delta^c_m(x_1-x_2)]^n = \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2\, \Omega_n(\kappa^2)\, \Delta^c_\kappa(x_1-x_2), \tag{3.13}$$

справедливым при $x_1 \neq x_2$, перепишем исходную формулу (3.3) в виде

$$F^{(2)}_{m_1 m_2}(x_1-x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1}\, u_{n+m_2}}{n!} \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2\, \Omega_n(\kappa^2)\, \Delta^c_\kappa(x_1-x_2). \tag{3.14}$$

Тогда регуляризованное выражение (3.10) запишется следующим образом:

$$F^{(2)}_{m_1 m_2}(x_1-x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+m_1}\, u_{n+m_2}}{n!} \int_{(nm)^2}^{\infty} d\kappa^2\, \Omega_n(\kappa^2)\, [\Delta^c_\kappa(x_1-x_2) + K_\kappa(x_1-x_2)], \tag{3.15}$$

где

$$K_\kappa(x_1-x_2) = \frac{i}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)} \int d^4p\, e^{ip(x_1-x_2)}\, \frac{\tilde{\tilde{V}}(p^2)-\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)}{p^2-\kappa^2}. \tag{3.16}$$

Здесь $K_\kappa(x_1-x_2)$ – нелокальная обобщенная функция, так как функция $\dfrac{\tilde{\tilde{V}}(p^2)-\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)}{p^2-\kappa^2}$ – целая.

Приведем одно из физических соображений, которое можно привлечь для интерпретации вводимой регуляризации. Пусть имеются два бесконечно тяжелых точечных источника, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Пусть взаимодействия между ними осуществляются через промежуточное мезонное поле. Пусть лагранжиан взаимодействия этой системы можно записать в виде

$$g\,\mathcal{L}_I = g\int d\vec{x}\, [\delta(\vec{x}-\vec{x}_1) + \delta(\vec{x}-\vec{x}_2)]\, U(\phi(\vec{x})). \tag{3.17}$$

S –матрица, описывающая взаимодействие этой системы, записывается по обычным правилам:

$$S = T \exp \{ + i g \int d^4x \, \mathcal{L}_I \, (x) \} . \tag{3.18}$$

Первая неисчезающая поправка к энергии каждого источника и энергии взаимодействия между двумя источниками дается матричными элементами S –матрицы во втором порядке теории возмущений и пропорциональна

$$\Delta E \sim \frac{1}{2\pi} \int d^4 (x_1 - x_2) < 0 \mid T (\mathcal{L}_I (x_1) \, \mathcal{L}_I \, (x_2 \,)) \mid 0 > = \tag{3.19}$$

$$= 2g^2 W_2(0) + 2g^2 \, W_2 \, (\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \,),$$

где

$$W_2 \, (\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \,) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d(x_{01} - x_{02}) < 0 \mid T \, \{ U(\phi(x_1)) U(\phi(x_2)) \} \mid 0 > . \tag{3.20}$$

Первый член в формуле представляет собой поправку к собственной энергии источника, а второй член – потенциальную энергию между двумя источниками за счёт обмена скалярными частицами.

Разумными физическими требованиями являются:

$$W_2 (0) < \infty \, , \tag{I}$$

$$W_2 (\vec{x}\,) \to 0 \tag{II}$$

$$\text{при} \quad | \, \vec{x} \, | \to \infty \, .$$

В обычной локальной квантовой теории поля этим требованиям удовлетворить не удается, оставаясь в рамках требований релятивистской инвариантности. В нелокальной теории эти требования автоматически выполняются. Действительно, согласно (3.20) и (3.11), имеем:

$$W_2(\vec{r}) = \frac{u_1^2}{\tilde{V}(m^2)} \int d\vec{\rho}\, V(|\vec{r}-\vec{\rho}|)\, \frac{e^{-m|\vec{\rho}|}}{|\vec{\rho}|} + \tag{3.21}$$

$$+ \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)} \int d\vec{\rho}\, V(|\vec{r}-\vec{\rho}|)\, \frac{e^{-\kappa|\vec{\rho}|}}{|\vec{\rho}|},$$

где функция $V(|\vec{r}-\vec{\rho}|)$ определена

$$V(|\vec{r}-\vec{\rho}|) = \int d\vec{q}\, e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{\rho})}\, \tilde{\tilde{V}}(-\vec{q}^{\,2}). \tag{3.22}$$

Если $\tilde{\tilde{V}}(-\vec{q}^{\,2}) = O\left(\frac{1}{(\vec{q}^{\,2})^2}\right)$ при $\vec{q}^{\,2} \to \infty$, тогда $V(0) < \infty$.

$$V(|\vec{r}-\vec{\rho}|) = O\left(e^{-G\left(\frac{|\vec{r}-\vec{\rho}|}{\ell}\right)}\right)$$

$$\text{при} \quad \frac{|\vec{r}-\vec{\rho}|}{\ell} \gg 1,$$

где параметр ℓ имеет смысл элементарной длины. Отсюда легко получить, что

$$W_2(0) = \frac{u_1^2}{\tilde{\tilde{V}}(m^2)}\, a(m) + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)}\, a(\kappa) < \infty, \tag{3.23}$$

так как

$$a(\kappa) = \int d\vec{\rho}\, V(|\vec{\rho}|)\, \frac{e^{-\kappa|\vec{\rho}|}}{|\vec{\rho}|} < \infty. \tag{3.24}$$

Таким образом, мы видим, что введение нелокальности в теорию изменяет потенциал Юкавы на малых расстояниях, происходит как бы "размазка" потенциала Юкавы на расстояниях порядка элементарной длины ℓ.

Требования макропричинности и унитарности определяет лишь тот класс функций, к которому должен принадлежать нелокальный формфактор $V(|\vec{\rho}|)$.

Полученные формулы можно рассматривать как физическое обоснование введения евклидовой метрики (см. следующий параграф): убывание формфактора $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ и, следовательно, пропагатора $\tilde{\tilde{F}}^{(2)}_{m_1 m_2}(p^2)$ при $p^2 \to -\infty$ приводит к тому, что взаимодействие двух бесконечно тяжелых точечных источников описывается несингулярным потенциалом, который представляет собой "размазанный" на расстояниях порядка ℓ потенциал Юкавы.

В случае $\tilde{\tilde{V}}(p^2) \to \infty$ при $p^2 \to +\infty$, что не противоречит основным принципам построения S-матрицы, потенциал $W(\vec{r})$ уже не описывался бы просто функцией, а был бы обобщенной функцией вида

$$W_2(\vec{r}) \approx \int d\vec{\rho}\, V(\vec{r}-\vec{\rho})\, \frac{e^{-m|\vec{\rho}|}}{|\vec{\rho}|}, \tag{3.25}$$

где

$$V(\vec{r}-\vec{\rho}) \approx \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{\rho}), \tag{3.26}$$

т.е. $V(\vec{r}-\vec{\rho})$ – нелокальная обобщенная функция, определенная на некотором пространстве целых функций. Это означает, что в этом случае бесконечно тяжелый источник не может быть точечным, так как распределение источника в пространстве должно описываться целой функцией. Следовательно, в этом случае мы не имеем той ясной физической интерпретации на языке потенциалов, которая возможна при условиях, обеспечивающих переход к евклидовой метрике (см. ниже).

4. Ряд теории возмущений для S-матрицы

Приступим теперь к построению ряда теории возмущений для S-матрицы теории. Проведем ряд формальных преобразований:

$$S = T\exp\{i\int d^4x\, \mathcal{L}_I(x)\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int d^4x_1 \ldots \int d^4x_n\, S_n(x_1,\ldots x_n), \tag{4.1}$$

$$S_n(x_1,\dots x_n) = \sum_{m_1\dots m_n=0}^{\infty} F_{m_1\dots m_n}(x_1\dots x_n) : \frac{\phi^{m_1}(x_1)}{m_1!}\dots\frac{\phi^{m_n}(x_n)}{m_n!}: \tag{4.2}$$

С другой стороны,

$$S_n(x_1,\dots x_n) = i^n T(\mathcal{L}_I(x_1)\dots\mathcal{L}_I(x_n)) =$$

$$= i^n \int d\sigma(\xi_1)\dots\int d\sigma(\xi_n)\, T(:e^{\xi_1\phi(x_1)}:\dots:e^{\xi_n\phi(x_n)}:) = \tag{4.3}$$

$$= i^n \int d\sigma(\xi_1)\dots\int d\sigma(\xi_n) : e^{\xi_1\phi(x_1)}:\dots:e^{\xi_n\phi(x_n)}: \prod_{1\le i<j\le n} e^{\xi_i\xi_j\Delta^c_m(x_i-y_j)}.$$

При получении последнего равенства мы воспользовались обычной теоремой Вика для перехода от T -произведения к N -произведению. Отсюда легко получить:

$$F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(x_1\dots x_n) = i^n \int d\sigma(\xi_1)\dots\int d\sigma(\xi_n)\, \xi_1^{m_1}\dots\xi_n^{m_n} \times \tag{4.4}$$

$$\times \prod_{1\le i<j\le n} \exp\{\xi_i\xi_j\Delta^c_m(x_i-x_j)\}.$$

Амплитуды физических процессов определяются интегралами вида

$$\tilde{\tilde{F}}^{(n)}_{m_1\dots m_n}(p_1\dots p_n) = \int d^4x_1\dots\int d^4x_n\, e^{i(p_1x_1+\dots+p_nx_n)} F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(x_1\dots x_n) \tag{4.5}$$

$$= (-i)^{n-1}(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+\dots p_n)\, T^{(n)}_{m_1\dots m_n}(p_1,\dots,p_n),$$

где

$$T^{(n)}_{m_1\dots m_n}(p_1\dots p_n)=i^{n-1}n^4\int d^4x_1\dots\int d^4x_n\,\delta^{(4)}(x_1+\dots+x_n)\times$$

$$\times e^{i(p_1x_1+\dots p_nx_n)}\qquad F^{(n)}_{m_1\dots m_n}(x_1\dots x_n). \tag{4.6}$$

Здесь p_i – внешние импульсы.

В полученном выражении не определены математически величины $\exp\{\xi_i\xi_i\Delta^c_m(x_i-x_j)\}$. Согласно сказанному в предыдущем параграфе мы определим, или постулируем следующее представление:

$$e^{\xi_i\xi_j\Delta^c_m(x_i-x_j)}=1+w(\xi_i\,\xi_j;\,x_i-x_j)\;, \tag{4.7}$$

где

$$w(\xi_i\xi_j;x_i-x_j)=\int d^4y\,V(x_i-y)\times$$

$$\times\Big[\frac{\xi_i\xi_j}{\tilde{\tilde{V}}(m^2)}\Delta^c_m(y-x_j)+\int_{4m^2}^{\infty}\frac{d\kappa^2\rho(\xi_i\xi_j\;\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)}\;\Delta^c_{\kappa}(y-x_j)\Big], \tag{4.8}$$

$$\rho(\xi_i\,\xi_j\;;\kappa^2)=\sum_{n=2}^{[\frac{\kappa}{m}]}\frac{(\xi_i\,\xi_j)^n}{n!}\;\Omega_n(\kappa^2). \tag{4.9}$$

В импульсном представлении получим:

$$w(\xi_i\xi_{ij};\,p^2)=i\Big[\frac{\tilde{\tilde{V}}(p^2)}{V(m^2)}\cdot\frac{\xi_i\,\xi_j}{m^2-p^2-i\epsilon}+\frac{\tilde{\tilde{V}}(p^2)}{\pi}\int_{4m^2}^{\infty}\frac{d\,\kappa^2\rho(\xi_i\,\xi_j\,\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)(m^2-p^2-i\epsilon)}\Big]. \tag{4.10}$$

Предполагается, что целая функция $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ такова, что интеграл в (4.10) хорошо сходится.

С точки зрения диаграммной техники Фейнмана функция $\tilde{\tilde{w}}(\xi_i \xi_j ; p^2)$ представляет собой пропагатор, соединяющий две точки, причем этот пропагатор учитывает любое количество частиц, распространяющихся из одной точки в другую.

Подставляя (4.7) в (4.4), получим

$$F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) = i^n \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_2} \prod_{1 \le i < j \le n} \{1 + w(\xi_i \xi_j ; x_i - x_j)\}. \tag{4.11}$$

Соответственно амплитуды $T^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(p_1 \dots p_n)$ можно записать в виде

$$T^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(p_1 \dots p_n) = \int d\sigma(\xi_1) \dots \int d\sigma(\xi_n) \xi_1^{m_1} \dots \xi_n^{m_n} \times$$
$$\times t^{(n)}(\xi_1 \dots \xi_n ; p_1 \dots p_n), \tag{4.12}$$

$$t^{(n)}(\xi_1 \dots \xi_n ; p_1 \dots p_n) = i^{n-1} n^4 \int d^4 x_1 \dots \int d^4 x_n \, \delta^{(4)}(x_1 + \dots + x_n) \times$$
$$\times e^{i(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n)} \prod_{1 \le i < j \le n} \{1 + w(\xi_i \xi_j ; x_i - x_j)\}. \tag{4.13}$$

Переходя к импульсному пространству, формально получим:

$$t^{(n)}(\xi_1 \dots \xi_n ; p_1, \dots p_n) = i^{n-1} (2\pi)^{4(n-1)} n^4 \times$$
$$\times \prod_{1 \le i < j \le n} \int d^4 q_{ij} \{\delta^{(4)}(q_{ij}) + \tilde{\tilde{w}}(\xi_i \xi_j, q_{ij}^2)\} \times \tag{4.14}$$
$$\times \int d^4 q \prod_{\ell=1}^{n} \delta^{(4)}(p_\ell + q - K_\ell(q_{ij})),$$

где

$$K_{\ell}(q_{ij}) = \sum_{j=1}^{\ell-1} q_{ij} - \sum_{j=\ell+1}^{n} q_{\ell j} \quad . \tag{4.15}$$

Полученный интеграл в (4.14) по промежуточным импульсам q_{ij} не определен, поскольку функции $\tilde{\tilde{w}}(\xi_i\ \xi_j\ ; q_{ij}^2)$ довольно быстро растут при $q_{ij}^2 \to +\infty$. Здесь мы встречаемся с проблемой определения Т-произведения лагранжианов взаимодействия:

$$T(\mathcal{L}_I(x_1)..\ \mathcal{L}_I(x_n)). \tag{4.16}$$

Введение формфактора $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ связано с определением лишь произведения

$$T(\mathcal{L}_I(x_1)\ \mathcal{L}_I(x_2)). \tag{4.17}$$

Определение только двухточечной функции не дает еще знания n -точечной функции (4.16).

С чисто математической точки зрения проблема состоит в следующем. Известна обобщенная функция $T(\mathcal{L}_I(x_1)\ \mathcal{L}_I(x_2))$, зависящая только от двух аргументов x_1 и x_2. Как определить обобщенную функцию $T(\mathcal{L}_I(x_1)...\mathcal{L}_I(x_n))$, которая зависит от n -аргументов $x_1 ... x_n$ и, по сути дела, является произведением двухточечных обобщенных функций $T(\mathcal{L}_I(x_1)\ \mathcal{L}_I(x_2))$? Короче, как определить квадрат обобщенной функции?

С общей точки зрения можно считать, что определения Т-произведения в случаях (4.16) и (4.17) не связаны одно с другим и, следовательно, в этих случаях можно действовать, вообще говоря, разными способами. Наша задача, однако, состоит в том, чтобы построить такой аппарат, который позволил бы автоматически получать n -точечные функции $T(\mathcal{L}_I(x_1)...\mathcal{L}_I(x_n))$, если нам известна регуляризация двухточечной функции $T(\mathcal{L}_I(x_1)\ \mathcal{L}_I(x_2))$.

Таким методом построения высших приближений теории по низшим является переход к евклидовой метрике пространственно-подобных импульсов, если амплитуды второго порядка теории возмущений (4.10) убывают при $p^2 \to -\infty$. В рассматриваемых нелокальных теориях переход к евклидовой метрике с математической точки зрения означает определение произведения обобщенных функций.

Если порядок целых функций $\tilde{V}(p^2)$ строго меньше единицы,

$$\overline{\lim_{|p^2|\to\infty}} \frac{\ln \ln |\tilde{\tilde{V}}(p^2)|}{\ln |p^2|} < 1, \tag{4.18}$$

тогда существует некоторая несобственная регулярная процедура перехода к евклидовой метрике /6,7,8,9/. Если же порядок целых функций $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ равен единице или больше ее, тогда никакой несобственной процедуры перехода к евклидовой метрике не существует. В этом случае мы просто будем постулировать, что формальный интеграл (4.14) должен быть с самого начала записан в евклидовых переменных (формальная замена $k_0 \to i k_4$). При этом внешние импульсы остаются псевдоевклидовыми. Интегралы будут сходиться, если

$$\tilde{\tilde{w}}(\xi_i \xi_j, p^2) = O\left(\frac{1}{(p^2)^2}\right), \quad p^2 \to -\infty, \tag{4.19}$$

или

$$\tilde{\tilde{V}}(p^2) = O\left(\frac{1}{p^2}\right), \quad p^2 \to -\infty. \tag{4.19a}$$

Для удобства (это не обязательно, но при этом мы избегаем ненужных усложнений в записи формул) будем считать, что внешние импульсы $p_1 \ldots p_n$, от которых зависит амплитуда $t^{(n)}(\xi_1 \ldots \xi_n;\ p_1 \ldots p_n)$, пространственноподобны и находятся в евклидовой области.

Совокупность пространственноподобных векторов p_j с наперед заданными скалярными произведениями $(p_i p_j)$ называется евклидовой, если при любом выборе вещественных неотрицательных чисел $a_1,..,a_n (a_j \geq 0)$ скалярный квадрат вектора $\sum_{j=1}^{n} a_j p_j$ неположителен:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j p_j\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (p_i p_j) \leq 0, \tag{4.20}$$

и только нулевой вектор имеет длину нуль. Иначе, если совокупность псевдоевклидовых пространственноподобных векторов $p_1 \dots p_n$ евклидова, то всегда можно выбрать такую совокупность евклидовых векторов $q_1 \dots q_n$, что выполняется равенство

$$(p_i p_j) = -(q_i q_j). \tag{4.21}$$

Здесь

$$p_i p_j = p_{i0} p_{j0} - \vec{p}_i \vec{p}_j ,$$

$$q_i q_j = q_{i4} q_{j4} + \vec{q}_i \vec{q}_j .$$

Итак, вместо (4.14) получим

$$t^{(n)} (\xi_1 \dots \xi_n , q_1 \dots q_n) = (2\pi)^{4(n-1)} n^4 \prod_{s \leq i < j \leq n} \int d^4 k_{ij} \times$$

$$\times \{ \delta^{(n)} (k_{ij}) + \tilde{\tilde{w}}_E (\xi_i \xi_j , k_{ij}^2) \} \int d^4 k \prod_{\ell=1}^{n} \delta^{(4)} (q_\ell + k - K_\ell (k_{ij})), \tag{4.22}$$

где

$$\tilde{\tilde{w}}_E(\xi_i\xi_j, k^2) = \frac{\tilde{\tilde{V}}(-k^2)}{\tilde{\tilde{V}}(m^2)} \frac{\xi_i\xi_j}{m^2+k^2} + $$
$$+ \frac{\tilde{\tilde{V}}(-k^2)}{\pi} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i\xi_j, \kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)} \frac{1}{\kappa^2+k^2}. \tag{4.23}$$

Все интегралы и δ –функции в (4.22) записаны в евклидовой метрике.

Итак, амплитуда $t^{(n)}(\xi_1 ... \xi_n, q_1 ..)$ определяется сходящимся интегралом и зависит от скалярных произведений евклидовых внешних импульсов $q_1 ... q_n$. Поскольку всевозможные скалярные произведения псевдоевклидовых и евклидовых импульсов задаются одним и тем же числом инвариантных переменных, то интеграл (4.23) определяет истинную амплитуду в евклидовой области пространственноподобных внешних импульсов, т.е. в области, где $(q_i q_j) = -(p_i p_j)$. В силу единственности аналитического продолжения можно получить амплитуду во всей области изменения инвариантных переменных путем аналитического продолжения.

Амплитуда $T^{(n)}_{m_1 ... m_n}(q_1 ... q_n)$ может быть записана в виде

$$T^{(n)}_{m_1 ... m_n}(q_1 ... q_n) = \int d\sigma(\xi_1) ... \int d\sigma(\xi_n) \times$$
$$\times \xi_1^{m_1} ... \xi_n^{m_n} t^{(n)}(\xi_1 ... \xi_n; q_1 ... q_n), \tag{4.24}$$

где функция $t^{(n)}$ дается формулой (4.23). Переходя в формуле (4.24) в евклидово x –пространство, получим:

$$T^{(n)}_{m_1 .. m_n}(q_1 ... q_n) = n^4 \int d^4x_1 ... \int d^4x_n \times$$
$$\times \delta^{(4)}(x_1 + ... + x_n) e^{i(q_1x_1 + ... + q_n x_n)} F^{(n)}_{m_1 .. m_n}(x_1, .. x_n), \tag{4.25}$$

$$F^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1\ldots x_n)=\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n)\times$$
$$\times\,\xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n}\prod_{1\le i<j\le n}\{1+w_E(\xi_i\xi_j;x_i-x_j)\}. \tag{4.26}$$

Здесь интегрирование проводится по евклидову x -пространству.

Нас сейчас будут интересовать условия, при которых функция $F^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1\ldots,x_n)$ определена в евклидовом x -пространстве.

Для функции $w(\xi_i\xi_j;x_i-x_j)$ получим следующую оценку сверху:

$$|w(\xi_i\xi_j;x_i-x_j)|\le\int_{m^2}^{\infty}\frac{d\kappa^2|\rho(\xi_i\xi_j;x^2)|}{\tilde{V}(\kappa^2)}\times$$

$$\times\left|\int d^4y\,V(x_i-y)\,\Delta_\kappa(y-x_j)\right|\le \tag{4.27}$$

$$\le\int_{m^2}^{\infty}\frac{d\kappa^2\,\rho(|\xi_i\xi_j|,\kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)}\int d^4y\,|V(y)|\,\Delta_\kappa(y)\le$$

$$\le|V(0)|\int_{m^2}^{\infty}\frac{d\kappa^2\,\rho(|\xi_i\xi_j|,\kappa^2)}{\kappa^2\tilde{V}(\kappa^2)}\le\mathrm{const}\;e^{h_1(\ln|\xi_i\xi_j|)},$$

где

$$h_1(a)=\max_r(ar-H_1(r)), \tag{4.28}$$

если

$$\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)=0\,(e^{H_1(\kappa)})\quad_{\kappa\to+\infty}. \tag{4.29}$$

Функция $h_1(a)$ - строго растущая функция. Всегда существует строго растущая функция $h_2(a)$, такая, что

$$h_1(\ell n|\xi_i| + \ell n|\xi_j|) \le h_2(\ell n|\xi_i|) + h_2(\ell n|\xi_j|). \tag{4.30}$$

Если $h_1(a)$ – выпуклая кверху функция, то

$$h_2(a) = h_1(a). \tag{4.31а}$$

Если $h_1(a)$ – выпуклая книзу функция, то

$$h_2(a) = \frac{1}{2} h_1(2a). \tag{4.31б}$$

Тогда для функции $F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)$ получим следующую оценку сверху:

$$|F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)| \le \text{const} \times \tag{4.32}$$

$$\times \prod_{\ell=1}^{n} \int |d\sigma(\xi_\ell)| \, |\xi_\ell|^{m_\ell} e^{(n-1) h_2(\ell n|\xi_\ell|)} .$$

Итак, достаточным условием сходимости будет

$$\int e^{n h_2(\ell n|\xi|)} |\xi|^m |d\sigma(\xi)| < \infty \tag{4.33}$$

для любых целых n и m.

Принимая во внимание формулы (2.7), (4.28) и (4.30), легко получить, что порядок роста формфактора должен быть строго больше:

$$H_1(p^2) > \max_{a>0} (p^2 a - G(e^a)) = \max_{|\xi|} (p^2 \, \ell n|\xi| - G(|\xi|)). \tag{4.34}$$

Это строгое неравенство не определяет функцию $H_1(p^2)$ однозначно по функции $G(|\xi|)$, а лишь указывает нижнюю границу порядка роста.

Введем функцию

$$\frac{s(n)}{n} = \max_{|\xi|} \left((n-1)h_2\,(\ell n|\xi|) - G(|\xi|)\right). \tag{4,35}$$

Функция $\frac{s(n)}{n}$ растет при $n \to \infty$ не медленнее, чем линейно по n, поэтому при $n \to \infty$

$$s(n) \geq A n^2, \tag{4,36}$$

где A – некоторая постоянная. Функция $s(n)$ определяет рост n –ого приближения теории возмущений. Имеем следующую оценку:

$$|F^{(n)}_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots x_n)| \leq \text{const}\; e^{s(n)}. \tag{4,37}$$

Хотя это оценка сверху, она все же, как нам кажется, правильно передает порядок роста n –ого приближения ряда теории возмущений для лагранжианов взаимодействия общего вида (2,4), когда все $u_n \neq 0$.

Мы видим, что рост n –ого приближения теории возмущений зависит от точного порядка роста формфактора $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$. Поэтому выбор порядка роста формфактора должен быть связан с проблемой суммирования всего ряда теории возмущений.

5. S – матрица в евклидовой метрике

Пусть нам известна матрица рассеяния S. Рассмотрим процесс столкновения m_i частиц с импульсами $\vec{p}_1, \dots \vec{p}_{m_i}$, когда в результате взаимодействия возникает m_f частиц с импульсами $\vec{p}\,'_1 \dots \vec{p}\,'_{m_f}$. Матричный элемент процесса определим следующим образом:

$$\frac{\langle f \mid S \mid i \rangle}{\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle} \equiv \frac{\langle \vec{p}_1{}' , \ldots \vec{p}_{m_f}{}' \mid S \mid \vec{p}_1 \ldots \vec{p}_{m_i} \rangle}{\langle 0 \mid S \mid 0 \rangle} =$$

$$= \langle f \mid i \rangle + \frac{(-i)^{m_f + m_i - 1}}{(2\pi)^{3/2(m_f + m_i) - 4} \sqrt{m_i ! \, m_f !}} \times \tag{5.1}$$

$$\times \frac{\delta^{(4)}(p_1 + \ldots + p_{m_i} - p_1' - \ldots - p_{m_f}')}{\sqrt{2p_{10} \ldots 2p_{m_i 0} \; 2p_{10}' \ldots 2p_{m_f 0}'}} T_{m_i + m_f}(p_1, \ldots p_{m_i}, -p_1' \ldots -p_{m_f}'),$$

где

$$T_n(k_1 \ldots k_n) = (i)^{n-1} n^4 \int d^4 x_1 \ldots \int d^4 x_n \, e^{-i(k_1 x_1 + \ldots + k_n x_n)} \times$$

$$\times \delta^{(4)}(x_1 + \ldots + x_n) \frac{1}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \langle 0 \mid \frac{\delta^n S}{\delta \phi(x_1) \ldots \delta \phi(x_n)} \mid 0 \rangle . \tag{5.2}$$

В формулах (5.1) и (5.2) мы имеем обычную псевдоевклидову метрику.

Задача теории - найти полную амплитуду процесса $T_{m_i + m_f}(p_i, -p_f')$.

Как говорилось в предыдущем параграфе, введение в теорию евклидовой метрики как метода определения произведения обобщенных функций приводит к тому, что удобно с самого начала записывать S -матрицу в евклидовой метрике, а в физическую область переходить путем аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным. В евклидовой метрике S -матрица может быть представлена в виде следующего ряда:

$$S_E[\phi] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int d^4 x_1 \ldots \int d^4 x_n \int d\sigma(\xi_1) \ldots \int d\sigma(\xi_n) \times \tag{5.3}$$

$$\times e^{\xi_1 \phi(x_1) + \ldots + \xi_n \phi(x_n)} \prod_{1 \le i < j \le n} \{ 1 + w(\xi_i \xi_j, x_i - x_j) \},$$

где

$$w(\xi_i \xi_j, x_i - x_j) = \int d^4 q\, e^{iq(x_i - x_j)} \; \tilde{\tilde{w}}(\xi_i \xi_j, q^2), \qquad (5.4)$$

$$\tilde{\tilde{w}}(\xi_i \xi_j, q^2) = \frac{\tilde{\tilde{V}}(-q^2)}{\tilde{\tilde{V}}(m^2)} \frac{\xi_i \xi_j}{m^2 + q^2} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{4m^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \rho(\xi_i \xi_j \kappa^2)}{\tilde{\tilde{V}}(\kappa^2)} \cdot \frac{\tilde{\tilde{V}}(-q^2)}{\kappa^2 + q^2}, \qquad (5.5)$$

$$\rho(\xi_i \xi_j, \kappa^2) = \sum_{n=2}^{[\frac{\kappa}{m}]} \frac{(\xi_i \xi_j)^n}{n!} \Omega_n(\kappa^2). \qquad (5.6)$$

В формулах (5.3-5) интегрирование проводится по евклидовым x – и q -пространствам; здесь $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$.

Кроме того, в формуле (5.3) мы считаем $\phi(x)$ не вторично квантованным скалярным полем $\phi(x)$, а просто некоторой вещественной функцией, зависящей от евклидовой координаты x . В этом случае S -матрица рассматривается просто как функционал от вещественной функции $\phi(x)$. Обычно этот функционал называется производящим.

Приведем теперь формулу, которая связывает физическую амплитуду (5.2), зависящую от физических псевдоевклидовых импульсов $k_1,..,k_n$, с евклидовой S -матрицей или производящим функционалом (5.3). Амплитуда (5.2) зависит от всевозможных скалярных произведений псевдоевклидовых 4-импульсов $k_1,.., k_n$ и является аналитической функцией этих произведений. В евклидовой области пространственноподобных импульсов $k_1,...,k_n$, т.е. в области, где существуют такие евклидовы импульсы $q_1,..,q_n$, такие, что

$$(k_i k_j) = -(q_i q_j), \qquad (5.7)$$

амплитуда $T_n(k_1,..,k_n)$ равна

$$T_n(k_1,\dots,k_n) = T_n^E(q_1,\dots,q_n) =$$

$$= n^4 \int d^4x \dots \int d^4x_n \, e^{-i(q_1x_1 + \dots + q_nx_n)} \times \tag{5.8}$$

$$\times \delta^{(4)}(x_1+,\dots x_n) \frac{1}{S_E[0]} \cdot \frac{\delta^n S_E[\phi]}{\delta\phi(x_1)\dots\delta\phi(x_n)}\Big|_{\phi=0} .$$

Переход в физическую область, как уже неоднократно говорилось, осуществляется методом аналитического продолжения по инвариантным импульсным переменным.

Как показано в/8-10/, S – матрица будет унитарна в каждом порядке теории возмущений по степеням константы взаимодействия g.

6. Выбор формфактора

Как видно, в нашей схеме построения теории поля регуляризующей функции $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$ отводится фундаментальная роль формфактора, устраняющего все расходимости, возникающие в теории. При построении же S -матрицы требуется выйти за пределы массовой оболочки при интегрировании по промежуточным виртуальным состояниям системы, поэтому амплитуды физических процессов зависят от явного вида функции $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$. Итак, возникает физический вопрос: как выбрать функцию $\tilde{\tilde{V}}(p^2)$? Можно ли ее выбрать единственным образом?

Из предыдущего следует, что функция $\tilde{\tilde{V}}(z)$ должна быть целой функцией точного порядка $H_1(r)$, кроме того, потребуем, чтобы

1. $\tilde{\tilde{V}}(x)$ – вещественна на вещественной оси и не имеет нулей при $x > 0$.
2. $\tilde{\tilde{V}}(x) = 0(e^{H_1(x_1)})$ при $x \to +\infty$.
3. $\tilde{\tilde{V}}(x) = 0(\frac{1}{x})$ при $x \to -\infty$.

Последнее требование необходимо для сходимости интегралов, определяющих высшие приближения теории возмущений при построении S -матрицы, как было видно выше.

Перечисленные выше требования еще не определяют функцию $\tilde{\tilde{V}}(z)$ однозначно.

Для того, чтобы ограничить произвол в выборе формфактора $\tilde{V}(z)$ воспользуемся следующей теоремой/12/.

Теорема

Пусть аналитическая функция $H_1(z)$ обладает следующими свойствами:

1. $H_1(x)$ – вещественная положительная монотонно растущая при $x \to +\infty$ функция.

2. $H_1(z)$ регулярна при $-\pi < \arg z < \pi$.

3. Существует такая область D , что

   а) $x \in D$ при достаточно больших $x > 0$,

   б) $\mathrm{Re}\, H_1(z) > 0$ для $z \in D$.

4. Пусть контур L охватывает область D , причём $\mathrm{Re}\, H_1(z) = 0$ для $z \in L$.

Введем функцию

$$\tilde{\tilde{V}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{d\xi\, e^{H_1(\xi)}}{\xi - z} \qquad (|\mathrm{Re}\, z| < R), \tag{6.1}$$

где контур L_R обходит в положительном направлении область:

$$D_R = D \cap C_R .$$

Здесь

$$C_R = (z: \ |z| > R).$$

Тогда функция $\tilde{\tilde{V}}(z)$ является целой аналитической функцией в плоскости z , для которой справедливы асимптотические оценки:

$$\tilde{\tilde{V}}(z) = e^{H_1(z)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad (z \to \infty, \ z \in D), \tag{6.2}$$

$$\tilde{\tilde{V}}(z) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad (z \to \infty,\ z \notin D). \tag{6.3}$$

Из теории аналитических функций известно, что чем выше рост функции $H_1(z)$, тем уже область D.

Поэтому построенная функция $\tilde{\tilde{V}}(z)$ единственна. Итак, условия

1. $\tilde{\tilde{V}}(z) = e^{H_1(z)} + O(\frac{1}{z})$ $(z \to \infty,\ z \in D)$,
2. $\tilde{\tilde{V}}(z) = O(\frac{1}{z})$ $(z \to \infty,\ z \notin D)$

определяют функцию $\tilde{\tilde{V}}(z)$ однозначно.

Перечисленные условия назовем принципом минимальной области роста.

Действительно, возможно существование более широких областей $D_1 \supset D$, таких, что на контуре L_1, охватывающем область D_1,

$$\mathrm{Re}\, H_1(z) = 0.$$

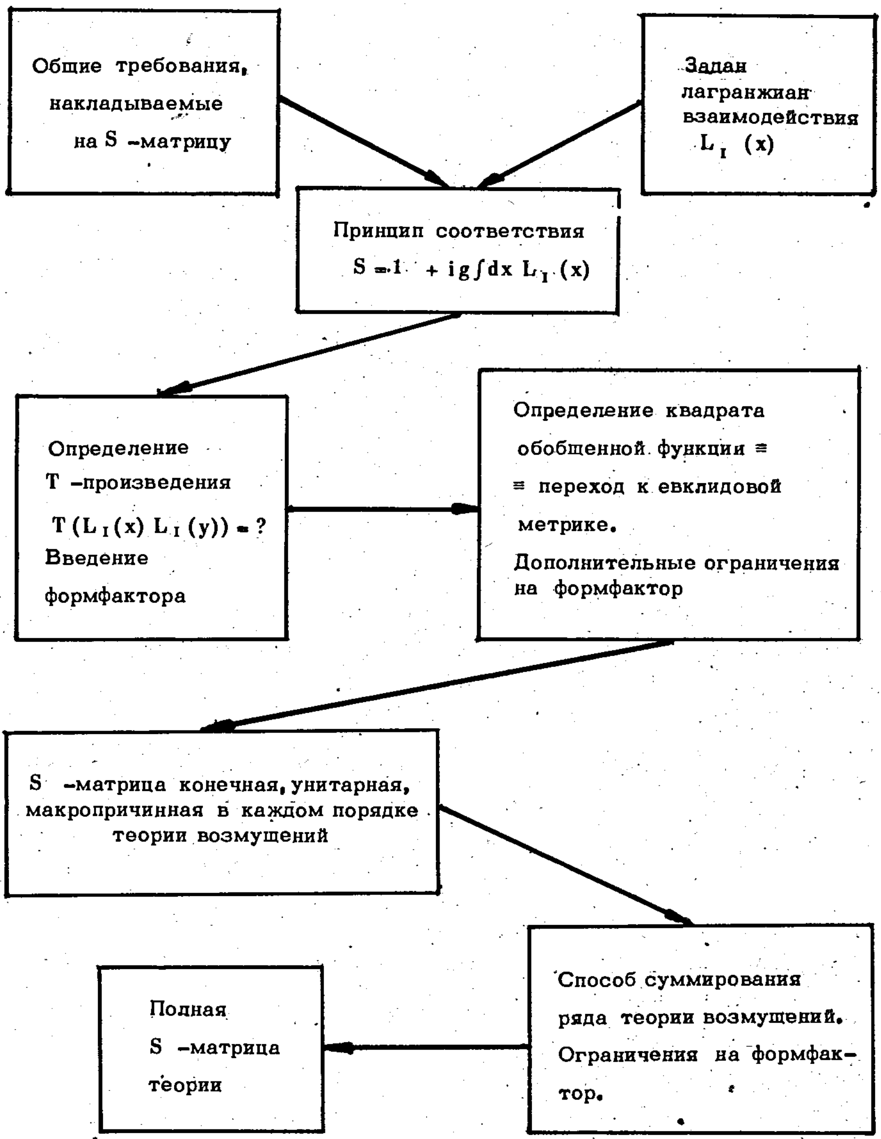
Тогда интеграл (6.1) по контуру L_{1R}, охватывающему область $D_{1R} = D_1 \cap C_R$, определяет функцию $\tilde{\tilde{V}}_1(z)$, которая будет расти в более широкой области D_1 при $z \to \infty$.

С другой стороны, добавление к функции $\tilde{\tilde{V}}(z)$ другой целой функции меньшего порядка роста также неизбежно расширяет область роста D.

Мы показали, что знание порядка роста $H_1(z)$ позволяет выбрать формфактор единственным образом. Однако, как говорилось в конце предыдущего параграфа, мы не можем определить $H_1(z)$ единственным образом без рассмотрения проблемы существования полной S-матрицы, а не только каждого отдельного порядка теории возмущений.

Заключение

Нами предложен вариант построения конечной и унитарной S-матрицы по теории возмущений для практически любого нелинейного лагран-


Общие требования, накладываемые на S -матрицу
Задан лагранжиан взаимодействия $L_I(x)$
Принцип соответствия $S = 1 + ig\int dx\, L_I(x)$
Определение T -произведения $T(L_I(x)\, L_I(y)) = ?$ Введение формфактора
Определение квадрата обобщенной функции ≡ ≡ переход к евклидовой метрике. Дополнительные ограничения на формфактор
S -матрица конечная, унитарная, макропричинная в каждом порядке теории возмущений
Способ суммирования ряда теории возмущений. Ограничения на формфактор.
Полная S -матрица теории

жиана взаимодействия скалярных частиц. Приведем в заключение схему построения S -матрицы, в которой мы еще раз обращаем внимание на основные моменты, где делаются дополнительные постулаты и предположения, которые необходимо было привлечь при построении S -матрицы теории.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в терию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957.
2. D.C. Bohlware, L.S.Brown. Phys. Rev ., 172, 5, 1628 (1968).
3. Y.Nambu. Phys. Lett., 26B, 628 (1968).
4. M.K.Volkov. Commun. Math. Phys., 7, 289 (1968).
5. T.D.Lee. Preprint CERN. TH-940, 1968.
6. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 7, 138 (1968).
7. Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ-68-52, Киев, 1968.
8. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 5, 42 (1967).
9. Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ-68-54, Киев, 1968.
10. Г.В.Ефимов. ЯФ, 4, 432 (1966).
11. Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ-68-55, Киев, 1968.
12. М.А.Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. Физматгиз, Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел

5 мая 1969 года.