СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4462

В.Н.Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ И ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА К НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМУ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ

1969

P2 - 4462

В.Н.Стрельцов

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ И ПЕРЕХОД ОТ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА К НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМУ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ

§1. Об инвариантности уравнения Шредингера относительно нерелятивистских преобразований координат

1. Рассмотрим формулы нерелятивистских преобразований координат[x]:

$$x' = (x - vt)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right), \quad t' = t\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c^2}\,x, \tag{1}$$

которые соответствуют случаю, когда членами порядка v^4/c^4 можно пренебречь по сравнению с 1.

Учитывая далее тот факт, что уравнение Шредингера так же, как нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби, отражает структуру нерелятивистской формулы для энергии, и принимая во внимание необходимость существования предельного перехода от первого уравнения ко второму, мы вправе утверждать следующее.

Уравнение Шредингера соответствует тому же самому приближению, что и выписанные выше нерелятивистские формулы преобразования координат. Поэтому следовало бы ожидать, что оно так же, как и нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби, должно удовлетворять требованию инвариантности относительно отмеченных преобразований.

Чтобы ответить на поставленный вопрос об инвариантности уравнения Шредингера относительно преобразований (1), возьмем указанное уравнение в форме

---

x) Для простоты мы ограничимся здесь рассмотрением одномерного случая. Обобщение его на трехмерный никакого труда не представляет.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{imc^2}{\hbar}\psi = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \tag{2}$$

которая получается из обычного уравнения Шредингера с помощью известной замены

$$\psi_{ш} = \psi \exp\left(\frac{imc^2}{\hbar} t\right) \tag{3}$$

и которую мы будем называть аналогом ковариантной формы [x)].

Переходя на основании формул (1) в другую (штрихованную) систему отсчета и пренебрегая заведомо малыми членами, придем к выражению вида:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t'} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \psi'}{\partial t'} - v\frac{\partial \psi'}{\partial x'}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{imc^2}{\hbar}\psi' =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left[\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{c^3}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} - 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial t'}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2}\right],$$

которое может быть переписано в форме:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t'} + \frac{imc^2}{\hbar}\psi' = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} -$$

$$- \frac{i\hbar}{m}\cdot\frac{v}{c^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial t'} + \frac{imc^2}{\hbar}\psi'\right) + \frac{i\hbar}{2m}\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial t'} + \frac{imc^2}{\hbar}\psi'\right).$$

Используя далее уравнение Шредингера в данной (штрихованной) системе отсчета, придем к выражению:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi'}{\partial t'} + \frac{imc^2}{\hbar}\psi' &= \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \\ &+ \frac{\hbar}{2m}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{v}{c^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^3 \psi'}{\partial x'^3} - \frac{\hbar^2}{4m^2}\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^3 \psi'}{\partial t' \partial x'}\end{aligned} \tag{4}$$

---

x) Смысл такого названия прояснится из дальнейшего (см. п. 2).

Таким образом, мы получили уравнение, которое отличается от уравнения Шредингера (2) наличием трех последних членов в правой части. При этом априори совершенно ниоткуда не следует, что указанные члены (или их сумма) должны быть малыми величинами и поэтому могут быть отброшены [x]. А коль скоро мы не можем их отбросить, то вынуждены сказать, что уравнение Шредингера не инвариантно относительно нерелятивистских преобразований координат (1).

Правда, здесь трудно не поддаться искушению и не ввести (кажущиеся естественными, а на самом деле имеющие смысл гипотез) дополнительные условия, которые и позволили бы отбросить (как малые) отмеченные выше члены. Оказывается однако, что этим дело не ограничивается. Встав на такой путь, мы должны ввести и еще одно гипотетическое условие (см.. например. /1/):

$$\frac{\partial^2 \psi_{\text{ш}}}{\partial t^2} \ll \frac{2 i m c^2}{\hbar} \frac{\partial \psi_{\text{ш}}}{\partial t}, \tag{5}$$

которое бы обеспечивало возможность перехода от уравнения Клейна-Гордона к уравнению Шредингера.

Стремление сохранить уравнение Шредингера можно понять. Ведь известно, что в наиболее важных случаях стационарных состояний оно дает безусловно правильные ответы. Однако мы все-таки должны решиться на такой шаг. Последующее рассмотрение должно еще больше убедить нас в этом.

2. Рассмотрим нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби в форме

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + mc^2, \tag{6}$$

которую мы будем называть ковариантной формой.

---

[x] Исключение составляет член вида $v^3/c^4 \dfrac{\partial \psi'}{\partial x' \partial t'}$. Его малость может быть доказана достаточно строго (см. §2).

Выразим затем координаты x и t через x' и t' с помощью формул (1) (и обратных им формул). В результате функция $S(x,t)$ перейдет в функцию $S'(x',t')$. При этом, как было специально отмечено ранее /2/, функция $S'(x',t')$ будет удовлетворять уравнению того же самого вида:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 + mc^2 . \qquad (6')$$

Иначе этот результат может быть истолкован следующим образом. Возьмем некоторое решение $S(x,t)$ -уравнения Гамильтона-Якоби. Оно (полностью) определяет собою поведение некоторого классического объекта в данной системе отсчета. По наблюдениям из другой системы отсчета, поведение того же самого объекта будет определяться функцией $S'(x',t')$. При этом, в согласии с принципом относительности, функция $S'(x',t')$ будет удовлетворять уравнению Гамильтона-Якоби (6') в новой системе отсчета.

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера в форме (2) и его решение вида (см., например, /3/):

$$\psi(x,t) = Ct^{-1/2}\exp\left(\frac{im}{2\hbar}\frac{x^2}{t} - \frac{imc^2}{\hbar}t\right), \qquad (7)$$

которое определяет собой закон поведения некоторого квантового объекта в данной системе отсчета.

По наблюдениям из другой системы отсчета, закон поведения данного квантового объекта должен определяться тогда функцией:

$$\psi'(x',t') = C\left[t'\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v}{c^2}x'\right]^{-1/2}\exp\left(\frac{im}{\hbar}\left\{\frac{(x'+vt')^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)^2}{2\left[t'\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v}{c^2}x'\right]} - c^2\left[t'\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v}{c^2}x'\right]\right\}\right),$$

которая получается из $\psi(x,t)$ в результате перехода от x и t к x' и t' на основании формул, обратных (1).

По аналогии со сказанным выше, функция $\psi'(x',t')$, согласно принципу относительности, должна удовлетворять уравнению Шредингера в новой системе отсчета:

$$\frac{\partial\psi'}{\partial t'}+\frac{imc^2}{\hbar}\psi'=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}. \tag{2'}$$

Однако прямая подстановка показывает, что это не всегда имеет место.

Полученный результат следует считать прямым следствием неинвариантности уравнения Шредингера относительно нерелятивистских преобразований координат.

2а. Обсудим далее вопрос о том, выполняется ли для решения вида (7) требуемое условие

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\approx v\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi,$$

вывод которого будет дан ниже.

В этом случае, например, для реальных частей, будем иметь следующее приближенное равенство

$$\frac{x}{t}\left[1+\frac{1}{c^2}\left(\frac{x}{t}\right)^2\right]\cos\phi+\frac{3}{2}\frac{\hbar x}{mc^2t^2}\sin\phi\approx v\cos\phi,$$

где $\phi=\dfrac{mx^2}{2\hbar t}-\dfrac{mc^2t}{\hbar}$, которое, как нетрудно видеть, будет с необходимостью нарушаться для

$$\operatorname{tg}\phi\approx-c^2/v^2\,\frac{mv^2t}{h}\approx-c^2/v^2,$$

что соответствует значению фазы $\phi\approx(N+\frac{1}{2})\pi$, где N –целое число.

Аналогичный результат будет следствием подстановки волновой функции вида (7) в выражение, определяющее собой сумму членов, появление которых после преобразования уравнения Шредингера к новой системе отсчета противоречит требованию инвариантности. В этом случае оказывается, что, скажем, для действительных членов условие их малости будет с необходимостью нарушаться вблизи значения $\phi \approx N\pi (\operatorname{tg}\phi \approx v^2/c^2)$. Поэтому пренебрегать рассматриваемыми членами нельзя, а следовательно, преобразованное уравнение Шредингера не может быть приведено к требуемому виду (2').

§2. Нерелятивистское волновое уравнение

1. Ниже мы попытаемся получить нерелятивистское волновое уравнение, которое бы не страдало отмеченными выше недостатками. При этом будем исходить из релятивистского волнового уравнения Клейна-Гордона:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi. \tag{8}$$

Далее же рассуждаем следующим образом.

Как известно, вид уравнения (8) отражает собой структуру релятивистской формулы для полной энергии. При этом левая часть соответствует квадрату полной энергии, первый член левой части – квадрату импульса, а второй член – квадрату массы. По аналогии с теми соображениями, которые применялись при переходе от релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби к нерелятивистскому /2/ x), в данном случае можно сказать, что в приближении, определяемом формулами преобразований (1), должно выполняться условие xx):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \approx \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi\right), \tag{I}$$

а также связанное с ним условие xxx)

---

x) Аналогия может быть еще более полной, если при этом опираться также на существование предельного перехода от уравнения Клейна-Гордона к (релятивистскому) уравнению Гамильтона-Якоби.

xx) Фактически справедливость этого условия, (как следствия неравенства (5)), подразумевалась и раньше.

xxx) Оба введенных условия естественно выполняются для случая плоской волны.

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \approx \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi. \tag{Ia}$$

Коль скоро мы приняли условие (I) , то можем после извлечения корня из обеих частей уравнения (8)

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^{1/2} = \frac{imc^2}{\hbar}\,\psi^{1/2}\sqrt{1-\left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi\right)^{-1}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}.$$

воспользоваться разложением в ряд. При этом получим следующее выражение:

$$-\left(\psi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)^{1/2} + \frac{imc^2}{\hbar}\,\psi = \frac{i\hbar}{2m}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{S}$$

которое, как увидим в дальнейшем, соответствует тому же самому приближению, что и формулы (1).

Полученное таким образом уравнение (5) отличается, очевидно, от вида уравнения Шредингера (2) формой первого члена в левой части.

2. Для того, чтобы убедиться в инвариантности полученного нами уравнения (S) относительно преобразований (1), необходимо сначала сделать следующий шаг.

Рассмотрим снова уравнение Клейна-Гордона и будем рассуждать так. Коль скоро это уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца, то оно с необходимостью (при малых скоростях) должно быть инвариантно и относительно (вытекающих из преобразований Лоренца) преобразований (1).

Переходя на основании формул (1) к другой (штрихованной) системе отсчета и пренебрегая заведомо малыми членами (порядка v^4/c^4 и меньше), придем к выражению вида:

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi' + \frac{v^3}{c^3}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'\partial x'}. \tag{9}$$

Чтобы удовлетворить далее выдвинутому требованию инвариантности, мы должны отбросить последний член в правой части. В рамках рассматриваемого приближения это, очевидно, можно сделать, если выполнено, например. условие

$$\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'} \approx v\ \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\psi', \tag{II}$$

учитывающее тот факт, что отношение отбрасываемого члена к наибольшему должно быть по порядку величины равно v^4/c^4.

3. Перейдем теперь к непосредственному доказательству инвариантности уравнения (S) относительно нерелятивистских преобразований координат (1).

Применяя преобразования (1) к уравнению (S) и пренебрегая заведомо малыми членами, придем к выражению вида:

$$-\left(\psi'\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}\right)^{1/2}\left[1+\frac{v^2}{c^2}-2v\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}\right)^{-1}\right]^{1/2}+\frac{imc^2}{\hbar}\psi' =$$

$$=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2}+\frac{i\hbar}{2m}\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}+\frac{i\hbar}{m}\left(-\frac{v}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}. \tag{S'}$$

Привлекая далее условие (II) с учетом (I a), разложим член в квадратных скобках в ряд. В результате будем иметь:

$$-\left(\psi'\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}\right)^{1/2}+\frac{imc^2}{\hbar}\psi' = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\left(\psi'\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}\right)^{1/2}+\frac{i\hbar}{2m}\frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}-v\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}\psi'^{1/2}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'^2}\right)^{-1/2}-\frac{itv}{mc^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x'\partial t'}.$$

Что касается суммы (Σ_{23}) второго и третьего членов в правой части, то она может быть представлена в виде

$$\Sigma_{23} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{v^2}{c^4}\psi'^{-1/2}\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'}\right)^{1/2}\left[\frac{imc^2}{\hbar}\psi'-\left(\psi'\frac{\partial^2\psi'}{\partial t'}\right)^{1/2}\right].$$

Опираясь далее на уравнение (S) в данной (штрихованной) системе отсчета, перепишем последнее выражение в форме

$$\Sigma_{23} = (\psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2})^{1/2} \frac{v^2}{c^2} \frac{1}{2} (\frac{imc^2}{\hbar} \psi') \quad \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} .$$

С учетом условия (I) теперь можно сказать, что отношение (σ_{23}) Σ_{23} к первому члену левой части

$$\sigma_{23} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} (\frac{imc^2}{\hbar} \psi')^{-1} \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2}$$

составляет по порядку величины v^4/c^4. Таким образом, вторым и третьим членами можно пренебречь.

Аналогичным путем для отношения четвертого и пятого членов к первому члену левой части получим величину

$$\sigma_{45} = (\frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2})^{-1} \; v \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial t'} (\frac{imc^2}{\hbar} \psi')^{-1} \; \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} ,$$

откуда на основании условий (II) и (I) будем иметь, что

$$\sigma_{45} \approx v^4/c^4 .$$

Но это означает, что четвертый и пятый члены также могут быть отброшены.

В результате в штрихованной системе отсчета вид уравнения (S′)

$$-(\psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t'^2})^{1/2} + \frac{imc^2}{\hbar} \psi' = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2}$$

будет теперь полностью аналогичен виду уравнения (S). А это означает, что инвариантность уравнения (S) относительно преобразований (1) доказана.

4. В заключение отметим следующее. Очевидно, что полученное нами уравнение (S) можно свести к уравнению Шредингера, если только выполнено такое специальное условие

$$-(\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2})^{1/2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

или, в частности,

$$\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2;$$

Решая полученное таким образом дифференциальное уравнение, найдем, что волновая функция, ему удовлетворяющая, должна иметь вид:

$$\psi (x,t) = C_1 (x) \exp [-C_2 (x) t],$$

откуда (на основании (3)) для $\psi_ш$ будем иметь:

$$\psi_ш = C_1 (x) \exp \{ [\frac{imc^2}{\hbar} - C_2 (x)] t \} .$$

Кроме того, следует отметить, что, несмотря на нелинейность уравнения (S), принцип суперпозиции для волн де Бройля сохраняет свою силу.

Автор благодарен В.Д. Рябцову и Б.П. Баннику за внимание к работе.

Литература

1. Л. Шифф. Квантовая механика. ИИЛ, М., стр. 365 (1959).

2. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ Р2-4461, Дубна (1969).

3. В. Паули. Общие принципы волновой механики ГИТТЛ М.-Л. стр.40,1947.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1969 года.