СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4461

В.Н.Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ И ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

1969

P2 - 4461

В.Н.Стрельцов

НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ И ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

§1. Преобразования Галилея и уравнение Гамильтона-Якоби в Галилеевом приближении

Как известно, формулы преобразований Галилея

$$x' = x - vt, \quad t' = t \tag{1.1}$$

вытекают из формул преобразования Лоренца для координат при условии отбрасывания членов порядка v^2/c^2 (и меньше) по сравнению с единицей.

В рамках Галилеева приближения импульс и полная энергия должны преобразоваться тогда по формулам:

$$p' = p - mv, \quad E' = E,$$

а полная энергия должна иметь вид $E = mc^2$.

Уже отсюда, вообще говоря, следует, что в рассматриваемом приближении уравнение Гамильтона-Якоби должно записываться в форме:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = 0.$$

Ввиду важности последнего результата ниже мы проследим, каким образом он вытекает из более последовательных рассуждений. Будем исходить из релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + m^2c^2. \tag{1.2}$$

Кроме того, будем опираться на тот факт, что если данное уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца, то оно должно быть инвариантно и относительно (вытекающих из них) преобразований Галилея (1.1).

В результате перехода от заданной системы отсчёта к другой (штрихованной) на основании формул (1.1) для уравнения (1.2) получим следующее выражение:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t'} - v\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 = \left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 + m^2c^2 ,$$

или

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t'}\right)^2 - 2\frac{v}{c^2}\frac{\partial S'}{\partial t'}\frac{\partial S'}{\partial x'} + \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 = \left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 + m^2c^2 .$$

Что касается третьего члена в левой части, то его, очевидно, сразу следует отбросить ввиду малости.

Далее будем рассуждать следующим образом. Чтобы удовлетворить требованию инвариантности, мы должны также отбросить второй член в левой части, скажем, по сравнению с первым. Это, очевидно, можно сделать при условии (А), что отношение второго члена к первому $\left(\frac{v}{c}\frac{\partial S'}{\partial x'}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S'}{\partial t'}\right]^{-1}\right)$ по порядку величины равно v^2/c^2. Но если это так, то в рамках рассматриваемого приближения следует отбросить и первый член в правой части. В результате уравнение Гамильтона-Якоби (опускаем штрихи) запишется в виде:

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2c^2$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} = mc^2 .$$

Определяя далее, как обычно,

$$S_1 = S - mc^2 t \tag{1.3}$$

в рамках рассматриваемого приближения для уравнения Гамильтона-Якоби окончательно получим выражение:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 ,$$

полностью совпадающее с приведенным выше.

Таким образом, уже сейчас можно сказать, что обычная постановка вопроса об инвариантности известного нерелятивистского уравнения Гамильтона-Якоби (2.3) относительно преобразований Галилея является не совсем корректной. Дело в том, что отмеченные уравнения и формулы преобразований соответствуют разным приближениям.

Последующие рассуждения сделают эти утверждения более понятными.

§2. *Нерелятивистские преобразования координат и инвариантность нерелятивитского уравнения Гамильтона-Якоби*

1. Рассмотрим следующие формулы преобразований координат:

$$x' = (x - vt)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right), \quad t' = t\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{v}{c^2}x , \tag{2.1}$$

которые вытекают из формул преобразования Лоренца при условии отбрасывания членов порядка v^4/c^4 по сравнению с 1.

Покажем далее, что общеизвестное нерелятивистское уравнение Гамильтона-Якоби соответствует именно данному приближению, а, следовательно, оно с необходимостью и инвариантно относительно преобразований (2.1).

Для этого мы снова будем исходить из релятивистского уравнения Гамильтона-Якоби (1.2) и опираться на факт его инвариантности относительно приближенных преобразований Лоренца (2.1).

Переходя от одной системы отсчёта к другой (штрихованной), на основании формул (2.1) для уравнения Гамильтона-Якоби получим следующее выражение:

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial S'}{\partial t'}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\partial S'}{\partial x'}(-v)\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^2=$$

$$=\left[\frac{\partial S'}{\partial x'}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\partial S}{\partial t'}\left(-\frac{v}{c^2}\right)\right]^2+m^2c^2 .$$

Раскрывая скобки и пренебрегая заведомо малыми членами, придем к уравнению вида:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S'}{\partial t'}\left[\frac{1}{c}\frac{\partial S'}{\partial t'}-\frac{v^3}{c^3}\frac{\partial S'}{\partial x'}\right]=\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2+m^2c^2.$$

Чтобы удовлетворить далее требованию инвариантности, мы должны отбросить второй член в левой части. Это, очевидно, в рамках рассматриваемого приближения можно сделать при условии, что величина $\frac{v^3}{c^3}\frac{\partial S'}{\partial x'}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial S'}{\partial t'}\right)^{-1}$ будет порядка $\frac{v^4}{c^4}$.

Итак, пренебрегая отмеченным членом и используя затем процедуры извлечения квадратного корня и разложения в ряд[x/], придем к выражению вида:

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+mc^2 . \tag{2.2}$$

Откуда на основании условия (1.3) получим известное нерелятивисткое уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 . \tag{2.3}$$

[x/] По степеням малой (порядка v^2/c^2) величины $(mc)^{-2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2$, малость которой легко доказывается с помощью предыдущего условия.

Вполне естественно, что инвариантность уравнений (2.2) и (2.3) относительно преобразований (2.1) может быть проверена непосредственно (для полноты это и проделано в приложении I).

Кроме того, надо заметить следующее. Так как преобразования Галилея являются частным случаем преобразований (2.1), то можно в каком-то смысле говорить об инвариантности уравнений (2.2) и (2.3) относительно Галилеевых преобразований. Однако мы снова хотим подчеркнуть, что сама постановка последнего вопроса не совсем корректна: уравнения и формулы преобразования следует брать в одном и том же приближении. (Результаты Приложения II дополняют эти утверждения).

Примечание: Обобщение полученных выводов на трехмерный случай труда не представляет.

Приложение I

1. Покажем сначала, что уравнение вида

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + mc^2 \qquad (2.2)$$

инвариантно относительно нерелятивистских преобразований координат (2.1)

Переходя к другой (штрихованной) системе отсчёта на основании формул (2.1) и пренебрегая заведомо малыми членами, для уравнения (2.2) будем иметь:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} + \left(1 - \frac{1}{mc^2}\frac{\partial S'}{\partial t'}\right)\left[\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial S'}{\partial t'} + (-v)\frac{\partial S'}{\partial x'}\right] = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 + mc^2 . \qquad (\Pi.1)$$

Опираясь далее на уравнение Гамильтона-Якоби в данной системе отсчёта

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 + mc^2 ,$$

перепишем выражение (П.1) в виде:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = mc^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{mc^2}\frac{\partial S'}{\partial t'}\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{mc}\frac{\partial S'}{\partial x'}\frac{v}{c}\right]. \qquad (\text{П}.2)$$

В полученном выражении (П.2) малость двух последних членов в квадратных скобках не вызывает сомнений. Ими можно пренебречь.

Таким образом, инвариантность уравнения (2.2) относительно преобразований (2.1) доказана (прямым путем).

2. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.3)$$

которое получается из уравнения (2.2) в результате перехода от "ковариантной" функции S к функции S_1, связанной с S выражением:

$$S_1 = S - mc^2 t + C .$$

Здесь C – постоянная.

Переходя на основании формул (2.1) к другой системе отсчёта, для уравнения (2.3) будем иметь:

$$\frac{\partial S_1'}{\partial t'} + \frac{\partial S_1'}{\partial x'}(-v) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_1'}{\partial x'}\right)^2. \qquad (\text{П}.3)$$

Здесь мы отбросили все заведомо малые члены.

Очевидно, что в результате указанного перехода сама функция S' будет уже иметь вид:

$$S_1' = S' - mc^2 t'\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - mvx' . \qquad (\text{П}.4)$$

Требование инвариантности в рассматриваемом случае будет выполнено, если в штрихованной системе отсчёта уравнению вида (2.3) будет удовлетворять функция S_1'', вид которой аналогичен виду S_1 :

$$S_1'' = S' - mc^2 t' + C'.$$

Записав выражение (П.4) в форме

$$S_1' = S_1'' - mc^2 t' \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - mvx'$$

и подставив его в уравнение (П.3), после пренебрежения малыми членами будем иметь:

$$\frac{\partial S_1''}{\partial t'} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_1''}{\partial x'} \right)^2.$$

Последний результат означает, что уравнение вида (2.3) действительно инвариантно относительно нерелятивистских преобразований координат.

Приложение II

1. Покажем сначала, к чему приводит применение требования инвариантности относительно преобразований Галилея (1.1) к уравнению вида (2.2).

Переход к другой системе отсчёта в этом случае приводит к выражению:

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S'}{\partial x'} \right)^2 + mc^2 + v \frac{\partial S'}{\partial x'}.$$

Чтобы удовлетворить требованию инвариантности, мы должны пренебречь последним членом в правой части (например, относительно mc^2). Но тогда надо отбросить и другой член такого же порядка малости – первый член в правой части. В результате, в согласии с выводами §1, будем иметь

$$\frac{\partial S'}{\partial t'} = mc^2$$

или

$$\frac{\partial S_1'}{\partial t'} = 0.$$

2. Применим теперь преобразование Галилея к уравнению вида (2.3). Результатом этого будет следующее выражение:

$$\frac{\partial S'_1}{\partial t'} + (-v)\frac{\partial S'_1}{\partial x'} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S'_1}{\partial x'}\right)^2.$$

Следует учитывать, что

$$S_1 = S - mc^2 t \quad ,$$

откуда вытекает, что S'_1 должна тогда иметь вид:

$$S'_1 = S' - mc^2 t'.$$

Чтобы удовлетворить требованию инвариантности, мы должны пренебречь вторым членом в левой части, а,следовательно, и членом (такого же порядка малости) в правой части.

Результат опять тот же $- \dfrac{\partial S'_1}{\partial t'} = 0$

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1969 года.