ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4436

И.Лукач, Я.А.Смородинский

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4436

И.Лукач, Я.А.Смородинский

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

Направлено в ЖЭТФ

Введение

Некоторые физические объекты, состоящие из многих частиц, такие, например, как молекулы и ядра, при определенных условиях можно рассматривать как твердое тело (волчок), свободно движущееся в пространстве и не изменяющее своего внутреннего состояния. При квантовомеханическом рассмотрении таких систем возникает задача отыскания ротационных спектров, соответствующих вращательным степеням свободы, и собственных волновых функций, определяющих вероятности переходов. Решение этой задачи приводится в большинстве учебников только для частных случаев шарового и симметрического волчков. Проблема асимметрического волчка решена путем разложения его волновых функций по волновым функциям симметрического волчка [/1/].

Однако оказывается, что эти ряды суммируются и представляют собой так называемые сферо-конические волновые функции, образованные из многочленов Ламе. Это можно показать, если к квантовомеханической проблеме волчков подойти с единой точки зрения, используя методы теории групп и разделение переменных в ортогональных криволинейных системах координат.

С вращением твердого тела, как будет показано в дальнейшем, связана группа трехмерных вращений $O(3)$, оставляющая инвариантной квадратичную форму

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \tag{1}$$

или, что то же самое, группа движений двумерного пространства постоянной положительной кривизны.

Квантовомеханическая проблема волчков

Как известно, классическая проблема свободного вращения твердого тела сводится к решению уравнений Эйлера для свободного волчка. При этом оказывается, что имеются два интеграла движения, представляющие собой законы сохранения момента импульса и энергии /2,3/. А именно:

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = M^2 \tag{2а}$$

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} = 2E, \tag{2б}$$

где M_1 , M_2 , M_3 – компоненты вектора момента импульса $\vec{M}$, E – вращательная энергия, $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ –главные моменты инерции тела. Твердое тело называют асимметрическим волчком, если $J_1 \neq J_2 \neq J_3$, симметрическим волчком, если $J_1 = J_2 \neq J_3$ (или $J_1 \neq J_2 = J_3$), и шаровым волчком, если $J_1 = J_2 = J_3$.

При квантовомеханическом рассмотрении вращения твердого тела поступают обычным образом: заменяют в системе уравнений /2/ классические составляющие момента импульса соответствующими квантовомеханическими операторами. При этом система уравнений /2/ переходит в операторную систему уравнений

$$\frac{M^2}{\hbar^2} = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \equiv \hat{L} \tag{3а}$$

$$\frac{2E}{\hbar^2} = aL_1^2 + bL_2^2 + cL_3^2 \equiv \hat{L}_E, \tag{3б}$$

где $a = \frac{1}{J_1}$, $b = \frac{1}{J_2}$, $c = \frac{1}{J_3}$, $(a \geq b \geq c)$ и L_1, L_2, L_3 – составляющие оператора момента количества движения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[L_i, L_k] = -i e_{ik\ell} L_\ell . \tag{4}$$

Таким образом, квантовомеханическое решение проблемы вращения свободного волчка сводится к отысканию собственных функций и собственных значений системы операторных уравнений /3/.

В работе /4/ рассмотрен вопрос об интегралах движения и соответствующих квантовых числах в группах $O(3)$, $O(2,1)$ и E_2, которые связаны с движением двумерных пространств постоянной кривизны (положительной, отрицательной и равной нулю соответственно). Там же показано, что в этих пространствах с каждой системой координат, допускающей разделение переменных в уравнении Лапласа, можно сопоставить интеграл движения, являющийся однородным эрмитовым полиномом, квадратичным в генераторах соответствующей группы.

В двумерном пространстве постоянной положительной кривизны (на сфере) существуют две системы, допускающие разделение переменных: полярная и эллиптическая /5/. Нетрудно показать (см. Приложение 1), что наряду с оператором Лапласа

$$-\Delta = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \equiv \hat{L} \tag{5}$$

в полярной системе координат

$$\xi = \sin\Theta\cos\phi, \quad \eta = \sin\Theta\sin\phi, \qquad \zeta = \cos\Theta \tag{6}$$

диагонален оператор

$$\hat{L}_s = L_3^2 \ , \tag{7}$$

и в эллиптической системе координат [x)]

$$\xi^2 = \frac{(\rho_1 - a)(\rho_2 - a)}{(a-b)(a-c)}, \quad \eta^2 = \frac{(\rho_1 - b)(\rho_2 - b)}{(b-a)(b-c)}, \quad \zeta^2 = \frac{(\rho_1 - c)(\rho_2 - c)}{(c-a)(c-b)} \tag{8}$$

диагонален оператор

$$\hat{L}_E = aL_1^2 + bL_2^2 + cL_3^2 \ , \tag{9}$$

где L_i -генераторы группы $O(3)$.

---

x) Полярной и эллиптической системам координат на сфере соответствуют трехмерные центрально-симметрические системы координат: сферическая и сферо-коническая с прямоугольными координатами $x = r\xi$, $y = r\eta$, $z = r\zeta$, где r -радиус, ξ, η, ζ определяются соответственно формулами /6/ или /8/. Ортогональными линиями полярной системы координат на сфере являются семейство концентрических окружностей ($\Theta = const$) и пучок прямых ($\phi = const$), проходящих через полюс сферы. Для эллиптической системы координат на сфере ортогональными линиями ($\rho_i = const, i = 1,2$) являются два семейства софокусных эллипсов и выпуклых гипербол.

Очевидно, что системы операторов (5),(7),(5),(9) представляют собой системы операторов квантовомеханической задачи соответственно для симметрического и асимметрического волчков. Для отыскания собственных функций и собственных значений систем операторов (5),(7) и (5),(9) необходимо выразить операторы L_i через инфинитезимальные дифференциальные операторы в соответствующих системах координат. Прежде всего, из общих теоретико-групповых соображений следует, что собственные значения оператора (5) равны $\ell(\ell+1)$, где ℓ –целое или полуцелое положительное число.

В полярной системе координат для операторов $\hat{L}$ и $\hat{L}_s$ получаем явные выражения /1,6/:

$$\hat{L} = -\left[\frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial\Theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\Theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] = \ell(\ell+1)$$

$$\hat{L}_s = -\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = m^2 ; \quad m = -\ell, -\ell+1, \dots \ell . \qquad (10)$$

Собственными функциями этой системы операторов являются линейные комбинации хорошо известных сферических функций $Y_{\ell m}(\Theta, \phi)$

$$Y^{(+)}_{\ell m}(\Theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{\ell m} + Y^*_{\ell m}] = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\, P^{|m|}_{\ell}(\cos\Theta)\cos m\phi$$

$$Y^{(-)}_{\ell m}(\Theta,\phi) = \frac{1}{i\sqrt{2}}[Y_{\ell m} - Y^*_{\ell m}] = \sqrt{\frac{2\ell+1}{2\pi} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}\, P^{|m|}_{\ell}(\cos\Theta)\sin m\phi \qquad (11)$$

$$Y_{\ell 0}(\Theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_{\ell}(\cos\Theta) .$$

Найдя явные выражения для операторов L_i в эллиптической системе координат

$$L_1 = \frac{2i}{\rho_1 - \rho_2} \sqrt{\frac{(\rho_1 - b)(\rho_1 - c)(\rho_2 - b)(\rho_2 - c)}{(a-b)(c-a)}} \left[(\rho_1 - a) \frac{\partial}{\partial \rho_1} - (\rho_2 - a) \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right]$$

$$L_2 = \frac{2i}{\rho_1 - \rho_2} \sqrt{\frac{(\rho_1 - c)(\rho_1 - a)(\rho_2 - c)(\rho_2 - a)}{(b-c)(a-b)}} \left[(\rho_1 - b) \frac{\partial}{\partial \rho_1} - (\rho_2 - b) \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right] \tag{12}$$

$$L_3 = \frac{2i}{\rho_1 - \rho_2} \sqrt{\frac{(\rho_1 - a)(\rho_1 - b)(\rho_2 - a)(\rho_2 - b)}{(c-a)(b-c)}} \left[(\rho_1 - c) \frac{\partial}{\partial \rho_1} - (\rho_2 - c) \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right],$$

находим, что операторы $\hat{L}$ и $\hat{L}_E$ имеют вид:

$$\hat{L} = -\frac{4}{\rho_1 - \rho_2} \left[\sqrt{-P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{-P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) + \sqrt{P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right] = \ell(\ell+1)$$

$$\hat{L}_E = -\frac{4}{\rho_1 - \rho_2} \left[\rho_2 \sqrt{-P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{-P(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) + \rho_1 \sqrt{P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{P(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right] = \epsilon, \tag{13}$$

где через $P(\rho)$ обозначен полином $P(\rho) = (\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)$.

Сферо-конические волновые функции

Обозначим $(2\ell+1)$ собственных волновых функций системы операторных уравнений (13), соответствующих $(2\ell+1)$, равным собственным значениям $\epsilon_\ell^{(s)}$ ($s = 1, 2, \ldots, 2\ell+1$, $\epsilon_\ell^{(1)} < \epsilon_\ell^{(2)} < \ldots < \epsilon_\ell^{(2\ell+1)}$), через $E_\ell^{(s)}(\rho_1, \rho_2)$. Будем их называть волновыми функциями асимметрического волчка или сферо-коническими волновыми функциями.

Если положить $E(\rho_1, \rho_2) = \Lambda_1(\rho_1) \cdot \Lambda_2(\rho_2)$, то из (13) находим, что каждая из функций $\Lambda_1(\rho_1)$ и $\Lambda_2(\rho_2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[4\sqrt{P(\rho)}\,\frac{d}{d\rho}(\sqrt{P(\rho)}\,\frac{d}{d\phi})-\ell(\ell+1)\phi+\epsilon]\Lambda(\rho)=0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) представляет собой дифференциальное уравнение Ламе в алгебраической форме x) /7,8/. Из теории дифференциального уравнения Ламе следует, что для целочисленных ℓ его решением является $(2\ell+1)$ линейно независимых и взаимно ортогональных функций, соответствующих $(2\ell+1)$ разным собственным значениям $\epsilon_{\ell}^{(s)}$, так называемых многочленов Ламе xx). Решения уравнения (14) представляются в виде степенных рядов

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\,(\rho-b)^{\frac{\ell}{2}-r}\,,\quad \sqrt{\rho-a}\sum_{r=0}^{\infty} B_r\,(\rho-b)^{\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}-r}$$

$$\sqrt{\rho-c}\sum_{r=0}^{\infty} C_r\,(\rho-b)^{\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}-r}\,,\quad \sqrt{(\rho-a)(\rho-c)}\sum_{r=0}^{\infty} D_r\,(\rho-b)^{\frac{\ell}{2}-1-r}\,. \qquad (15)$$

Подставляя ряды (15) в уравнение (14), получаем для коэффициентов A_r, B_r, C_r, D_r следующие рекуррентные соотношения

x) Наряду с алгебраической формой дифференциального уравнения Ламе в математической литературе встречаются и другие его формы: форма Вейерштрасса, Якоби и тригонометрическая форма /8/. В данном случае удобна алгебраическая форма уравнения Ламе, так как из нее непосредственно определяются уровни энергии асимметрического волчка.

xx) Решение уравнения Ламе существует также в случае полуцелых значений ℓ. В этом случае уравнение Ламе преобразуется в уравнение Гойна /7,8/. Собственные значения оказываются двукратно вырождены согласно теореме Крамерса, так как оператор энергии асимметрического волчка эквивалентен оператору квадрупольного взаимодействия.

$$2r(2\ell+1-2r)A_r=[\epsilon-b\ell(\ell+1)+(2b-a-c)(\ell+2-2r)^2]A_{r-1}-$$
$$-(a-b)(b-c)(\ell+4-2r)(\ell+3-2r)A_{r-2}$$
$$2r(2\ell+1-2r)B_r=[\epsilon-b\ell(\ell+1)+(b-c)(2\ell+3-4r)+(2b-a-c)(\ell+1-2r)^2]B_{r-1}-$$
$$-(a-b)(b-c)(\ell+2-2r)(\ell+3-2r)B_{r-2}$$
$$2r(2\ell+1-2r)C_r=[\epsilon-b(\ell+1)-(a-b)(2\ell+3-4r)+(2b-a-c)(\ell+1-2r)^2]C_{r-1}-\tag{16}$$
$$-(a-b)(b-c)(\ell+2-2r)(\ell+3-2r)C_{r-2}$$
$$2r(2\ell+1-2r)D_r=[\epsilon-b\ell(\ell+1)+(2b-a-c)(\ell+1-2r)^2]D_{r-1}-$$
$$-(a-b)(b-c)(\ell+2-2r)(\ell+1-2r)D_{r-2}.$$

В формулах (16) $A_n=B_n=C_n=D_n=0$, если $n<0$. Собственные значения $\epsilon_\ell^{(s)}$ получаются из условий конечности рядов (15). В случае четных ℓ, полагая

$$A_{\frac{\ell}{2}+1}=B_{\frac{\ell}{2}}=C_{\frac{\ell}{2}}=D_{\frac{\ell}{2}}=0,\tag{17}$$

получаем для ϵ одно уравнение степени $(\frac{\ell}{2}+1)$ и три уравнения степени $\frac{\ell}{2}$, решением которых является $(2\ell+1)$ разных собственных значений $\epsilon_\ell^{(s)}$. Аналогично, в случае нечетных ℓ, полагая

$$A_{\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}}=B_{\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}}=C_{\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2}}=D_{\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2}}=0,\tag{18}$$

получаем для ϵ три уравнения степени $(\frac{\ell}{2}+\frac{1}{2})$ и одно уравнение степени $(\frac{\ell}{2}-\frac{1}{2})$, решением которых является также $(2\ell+1)$ разных собственных значений $\epsilon_\ell^{(s)}$. Коэффициенты A_0, B_0, C_0, D_0 определяются из условия нормировки сферо-конических волновых функций

$$\frac{1}{4}\int_b^a\int_c^b [E_\ell^{(s)}(\rho_1,\rho_2)]^2 \frac{(\rho_1-\rho_2)\,d\rho_1\,d\rho_2}{\sqrt{-P(\rho_1)}\sqrt{P(\rho_2)}}=1. \tag{19}$$

Собственные значения и нормированные сферо-конические волновые функции для квантового числа $\ell = 0,1,2,3$, приведены в Приложении 2.

Оператор энергии асимметрического волчка /9/ вместе с коммутационными соотношениями /4/ инвариантен по отношению к одновременному изменению знаков любых двух из операторов L_1, L_2, L_3, что формально совпадает с симметрией точечной группы D_2. Согласно этому, волновые функции асимметрического волчка распадаются на четыре класса, преобразующиеся по неприводимым представлениям A_1, B_1, B_2, B_3 этой группы /1/. В связи с этим следует отметить также следующие соотношения для собственных значений $\epsilon_\ell^{(s)}$, которые нетрудно получить из формул (16). Имеет место: для четных ℓ

$$\sum_{(s)\in A}\epsilon_\ell^{(s)}=\frac{1}{6}\,\ell(\ell+1)(\ell+2)(a+b+c),\quad \sum_{(s)\in B_1,B_2,B_3}\epsilon_\ell^{(s)}=\frac{1}{2}\ell(\ell+1)^2(a+b+c), \tag{20}$$

а для нечетных ℓ

$$\sum_{s\in A}\epsilon_\ell^{(s)}=\frac{1}{6}\,\ell(\ell^2-1)(a+b+c),\quad \sum_{s\in B_1,B_2,B_3}\epsilon_\ell^{(s)}=\frac{1}{2}\ell(\ell+1)^2(a+b+c). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует также общее соотношение

$$\sum_{s=1}^{2\ell+1}\epsilon_\ell^{(s)}=\frac{1}{3}\,\ell(\ell+1)(2\ell+1)(a+b+c). \tag{22}$$

Заключение

Таким образом, на сфере существуют две системы ортогональных функций: сферические волновые функции (волновые функции симметрического волчка) и сферо-конические волновые функции (волновые функции асимметрического волчка). Эти две системы функций являются базисными векторами двух разных представлений группы трехмерных вращений $O(3)$, а именно: представлений, в которых, помимо оператора квадрата момента импульса, диагонален оператор $\hat{L}_s$ или $\hat{L}_E$. Соответственно, функции, заданные на единичной сфере, можно разлагать в ряды как по сферическим, так и по сферо-коническим волновым функциям. Можно также разложить базисные функции одного представления по базисным функциям второго. Именно таким образом в настоящее время решена проблема асимметрического волчка [1]. Сферо-конические волновые функции найдены как линейные комбинации сферических волновых функций. При этом уровни энергии асимметрического волчка получаются как решения секулярного уравнения, которое является условием разрешимости системы $(2\ell+1)$ линейных уравнений, определяющих коэффициенты разложения.

Модель асимметрического ротатора была успешно применена А.С. Давыдовым и С.Ф. Филипповым для объяснения вращательных состояний ядер эллипсоидальной формы [9,10].

Приложение 1

Докажем следующее утверждение. Каждой системе координат на сфере, допускающей разделение переменных в уравнении Лапласа

$$\Delta\Psi = -\lambda\Psi, \tag{23}$$

можно сопоставить самосопряженный оператор $\hat{L}$ -однородный квадратичный полином в генераторах группы движения соответствующего пространства, диагональный на системе решений уравнения (23). Разным системам координат соответствуют разные типы неэквивалентных операторов, причем два оператора $\hat{L}$ и $\hat{\tilde{L}}$ считаются эквивалентными, если существует преобразование

$$\hat{\tilde{L}} = \alpha \hat{L}' + \beta \Delta, \tag{24}$$

и движение пространства, переводящее $\hat{L}$ в $\hat{L}'$ (α , β -постоянные).

Общий симметричный полином второго порядка в генераторах группы $O(3)$ имеет вид

$$L = A_{ik} L_i L_k \ ; \quad A_{ik} = A_{ki} \ ; \ k, i = 1,2,3. \tag{25}$$

При движении (вращении) пространства генераторы L_i преобразуются как вектор $L'_i = a_{ik} L_k$, где a_{ik} -элементы вещественной ортогональной матрицы. Полином (25) при этом переходит в полином

$$\hat{L}' = A'_{ik} L_i L_k , \tag{26}$$

где $A'_{ik} = a_{\ell i} A_{\ell m} a_{mk}$, т.е. в матричных обозначениях $A' = a^T A a$, $a^T a = 1$ (индекс T обозначает транспонирование).

Известно, что любую симметрическую вещественную матрицу A_{ik} можно диагонализовать с помощью ортогонального преобразования. Пусть собственные значения матрицы A_{ik} равны a, b, c (они, конечно, всегда вещественны). Возможны три случая:

1). $a \neq b \neq c$, тогда

$$\hat{L}' = aL_1^2 + bL_2^2 + cL_3^2 \equiv \hat{L}_E, \tag{27}$$

2). $a = b \neq c$, тогда

$$\hat{L}' = b(L_1^2 + L_2^2) + cL_3^2$$

и

$$\hat{\hat{L}} = \frac{1}{c-b}[\hat{L}' - b\Delta] = L_3^2 \equiv \hat{L}_s \tag{28}$$

3). $a = b = c$, тогда

$$\hat{L}' = a(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)$$

и

$$\hat{L} = \hat{L}' - a\Delta \equiv 0.$$

Таким образом, для группы $O(3)$ имеем всего два неэквивалентных оператора (27) и (28), соответствующих эллиптической и полярной системам координат на сфере.

Приложение 2

Собственные значения $\epsilon_\ell^{(s)}$ для квантового числа $\ell = 0, 1, 2, 3$.

ℓ	s	$\varepsilon_\ell^{(s)}$	ℓ	s	$\varepsilon_\ell^{(s)}$
0	1	0	2	2	$a+b+4c$
1	1	$b+c$	2	3	$a+4b+c$
1	2	$c+a$	2	4	$4a+b+c$
1	3	$a+b$	3	4	$4(a+b+c)$
2	1, 5	$2(a+b+c) \mp 2\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}$			
3	1, 5	$2a+5b+5c \mp 2\sqrt{4(b-c)^2+(a-b)(a-c)}$			
3	2, 6	$5a+2b+5c \mp 2\sqrt{4(a-c)^2-(a-b)(b-c)}$			
3	3, 7	$5a+5b+2c \mp 2\sqrt{4(a-b)^2+(b-c)(a-c)}$			

Нормированные сферо-конические волновые функции для квантового числа =0,1,2,3 (ξ, η, ζ -определены формулами [8])

ℓ	s	$E_\ell^{(s)}(\rho_1,\rho_2)$	ℓ	s	$E_\ell^{(s)}(\rho_1,\rho_2)$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	2	2	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\xi\eta$
1	1	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\xi$	2	3	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\eta\zeta$
1	2	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\eta$	2	4	$\sqrt{\frac{15}{4\pi}}\,\xi\zeta$
1	3	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\zeta$	3	4	$\sqrt{\frac{105}{4\pi}}\,\xi\eta\zeta$

ℓ	s	$E_\ell^{(s)}(\rho_1,\rho_2)$
2	1, 5	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\frac{\left[3\rho_1-(a+b+c)\mp\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\right]\left[3\rho_2-(a+b+c)\mp\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\right]}{\sqrt{2\left[(a-c)^2-(a-b)(b-c)\right]\mp(2b-a-c)\left[2(a-c)^2+(a-b)(b-c)\right]\sqrt{(a-c)^2-(a-b)(b-c)}}}$
3	1, 5	$\xi\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\,\frac{\left[5\rho_1-(a+2b+2c)\mp\sqrt{4(b-c)^2+(a-c)(a-b)}\right]\left[5\rho_2-(a+2b+2c)\mp\sqrt{4(b-c)^2+(a-c)(a-b)}\right]}{\sqrt{2\left[2(b-c)^2+3(a-b)(a-c)\right]\left[4(b-c)^2+(a-c)(a-b)\right]\pm(b+c-2a)\left[8(b-c)^2-3(a-c)(a-b)\right]\sqrt{4(b-c)^2+(a-c)(a-b)}}}$
3	2, 6	$\eta\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\,\frac{\left[5\rho_1-(b+2a+2c)\mp\sqrt{4(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\right]\left[5\rho_2-(b+2a+2c)\mp\sqrt{4(a-c)^2-(a-b)(b-c)}\right]}{\sqrt{2\left[2(a-c)^2-3(a-b)(b-c)\right]\left[4(a-c)^2-(a-b)(a-c)\right]\pm(a+c-2b)\left[8(a-c)^2+3(a-b)(b-c)\right]\sqrt{4(a-c)^2-(a-b)(b-c)}}}$
3	3, 7	$\zeta\sqrt{\frac{21}{16\pi}}\,\frac{\left[5\rho_1-(c+2a+2b)\mp\sqrt{4(a-b)^2+(a-c)(b-c)}\right]\left[5\rho_2-(c+2a+2b)\mp\sqrt{4(a-b)^2+(a-c)(b-c)}\right]}{\sqrt{2\left[2(a-b)^2+3(a-c)(b-c)\right]\left[4(a-b)^2+(a-c)(b-c)\right]\pm(a+b-2c)\left[8(a-b)^2-3(a-c)(b-c)\right]\sqrt{4(a-b)^2+(a-c)(b-c)}}}$

Литература

1. А.С. Давыдов. Квантовая механика, ГИФМЛ, Москва (1963).
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика, Наука, Москва (1965).
3. Е. Уиттекер. Аналитическая динамика. ОНТИ (1937).
4. П. Винтернитц, И. Лукач, Я.А. Смородинский. ЯФ, 7, 192 (1968).
5. М.Н. Олевский. Мат. сб. 27, 379 (1950).
6. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, ГИФМЛ, Москва (1958).
7. Э. Уиттекер, Дж. Ватсон. Курс современного анализа, т.2, ГИФМЛ, Москва (1963).
8. Г. Бейтмен, А. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.3, Наука, Москва (1967).
9. А.С. Давыдов, Г.Ф. Филиппов. ЖЭТФ, 35, 440 (1958).
10. А.С. Давыдов. Возбужденные состояния атомных ядер, Атомиздат, Москва, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел

18 апреля 1969 года.