

4410

Экз. Чит. зала

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна.

P2 - 4410



ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.И. Широков

О КОРПУСКУЛЯРНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
МОДЕЛИ ВАН КАМПЕНА

1969

P2 - 4410

М.И. Широков

**О КОРПУСКУЛЯРНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
МОДЕЛИ ВАН КАМПЕНА**

Направлено в Nuclear Physics

В в е д е н и е

Модель Ван Кампена близка к квантовой электродинамике одной заряженной частицы. Частица модели находится в осцилляторной яме и взаимодействует с квантованным электромагнитным полем, причем только дипольно ^{/1/}. Ее можно называть электроном, если подразумевать нерелятивистский бесспиновый электрон. "Математический", "голый" вакуум Ω_0 и физический Ω в этой модели не совпадают.

Все задачи модели можно решить точно, в частности, следующую: возбужденный электрон переходит на основной уровень, испуская фотон. Найти вероятность высвечивания как функцию времени.

Обычно для описания возбужденного электрона и испущенного фотона используются собственные функции свободного гамильтониана H_0 ("голые состояния"). В первом разделе этой работы обсуждается неудовлетворительность такой постановки задачи с физической точки зрения. Обосновывается необходимость следующего подхода к полевым теориям в случае $\Omega \neq \Omega_0$.

Первой задачей теории взаимодействующих полей является представление операторов полей $A(x)$ через такие операторы рождения - уничтожения, вакуум которых совпадает с физическим вакуумом (определяемым как собственный вектор полного гамильтониана H с наимиз-

шей энергией). Эти операторы должны описывать физические частицы в любой момент времени, а не только при $t \rightarrow +\infty$, как in и out -операторы.

Для обсуждаемой модели операторы такого рода были получены в работе ^{/2/}. Физический смысл новой корпускулярной интерпретации обсуждается в первом разделе. Полученные в работе ^{/2/} новые операторы рождения-уничтожения не являются единственными операторами, чей вакуум совпадает с физическим. Основной задачей настоящей работы является обсуждение физических требований, позволивших бы выбрать единственным образом операторы рождения-уничтожения, которые следуют сопоставлять с наблюдаемыми частицами. Оказывается, что эта задача данной модели может быть охарактеризована как один из подходов к известной проблеме определения вектора состояния "нестабильной частицы" и ее характеристик: энергии и времени жизни. Сначала рассматривается определение энергии нестабильного состояния, основанное на рассмотрении энергетического спектра продуктов распада. Другое определение основывается на рассмотрении развития процесса распада во времени. В заключение предлагается новый подход к определению физической нестабильной частицы.

Вышеупомянутая задача о временном законе распада (второй раздел) представляет самостоятельный интерес. Известные аналогичные примеры точных решений в теории поля относятся к модели Ли и ее модификациям. Как и в этих примерах, результат настоящего расчета подтверждает качественное поведение, ожидаемое на основании обычных общих допущений ^{/3/}. Закон распада в основном является экспоненциальным, неэкспоненциальные добавки существенны только при очень больших временах.

1. Корпускулярная интерпретация взаимодействующего поля

Модель описывается таким гамильтонианом /1/:

$$H = \frac{1}{2m} [\vec{p} - e\vec{A}]^2 + V(\vec{q}) + H_{ph} ; \quad V(\vec{q}) = \frac{m\kappa_1^2}{2} \vec{q}^2 \quad (1)$$

$$H_{ph} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x [\vec{E}^2(\vec{x}) + (\text{rot } \vec{A}(\vec{x}))^2] \quad (2)$$

Дипольное приближение выражается в том, что оператор поля \vec{A} в квадратной скобке в (1) берется не в точке нахождения электрона \vec{q} , а в точке начала координат $x = 0$, в центре осцилляторного потенциала. Как обычно, $\hbar=1$, $c=1$. Используется поперечная (кулоновская) калибровка $\text{div } \vec{A}(\vec{x}) = 0$, (см., например, /8/).

Можно описать эту модель обычным для полевой теории выражением с использованием нерелятивистского оператора поля электронов $\psi(\vec{x})$:

$$H = \int d^3x \psi^*(\vec{x}) [-\nabla^2/2m + V(\vec{x})] \psi(\vec{x}) + H_{ph} - \frac{e}{m} \int d^3x \psi^*(\vec{x}) (-i\vec{\nabla}) \psi(\vec{x}) \vec{A}(\vec{x}) + \frac{e^2}{2m} \int d^3x \psi^* \psi \vec{A}^2 \quad (3)$$

Число электронов сохраняется, и с помощью обычной процедуры можно перевести уравнение Шредингера $H \Phi(t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t)$ в одноэлектронное конфигурационное пространство (для электромагнитного поля оставляем вторично-квантованное полевое описание); см., например, гл.6, §8 у Швебера /4/. Тогда уравнение примет вид уравнения Шредингера с гамильтонианом (1). Подставляя в (1) разложение $\vec{A}(\vec{x})$ по электрическим и магнитным мультиполям /5/, обнаруживаем, что во взаимо-

действии участвует только дипольная часть $\bar{A}_d(\bar{x})$ оператора $\bar{A}(\bar{x})$. Часть гамильтониана, содержащая операторы рождения-уничтожения фотонов высших мультиполей, является свободной и может быть отделена. Оставшийся гамильтониан содержит только операторы дипольных фотонов. Он представляется в виде суммы трех коммутирующих гамильтонианов, каждый из которых имеет такой вид ^{/2/}:

$$h = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m \kappa_1^2}{2} q_1^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty dk k (q_k^2 + p_k^2) - \frac{1}{m} \int_0^\infty dk e(k) p_1 p_k + \frac{1}{2m} \left[\int_0^\infty dk e(k) p_k \right]^2 \quad (4)$$

$$e(k) = 2e \sqrt{\frac{k}{3\pi}} f(k) ; \quad [q_1, p_1] = i ; [q_k, p_k] = i \delta(k - k') \quad (5)$$

Эрмитовские операторы q_k и p_k связаны с операторами рождения и уничтожения фотонов следующим образом:

$$a_k^+ = (p_k + i q_k) / \sqrt{2} ; \quad a_k = (p_k - i q_k) / \sqrt{2} \quad (6)$$

Вместо координаты и импульса электрона q_1 , p_1 тоже можно ввести аналогичные операторы a_1^+ , a_1 ; переводящие основное состояние осциллятора в возбужденное с энергией κ_1 . Назовем их фоновыми операторами. Вакуумный вектор a_k и a_1 , как обычно, является собственным состоянием Ω_0 свободного гамильтониана h_0 (первая строчка в (4)), соответствующим наименьшему собственному значению.

Гамильтониан h может быть приведен к виду

$$h = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega \omega (\hat{q}_{\omega}^2 + \hat{p}_{\omega}^2) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega \omega (\hat{a}_{\omega}^+ \hat{a}_{\omega} + \hat{a}_{\omega} \hat{a}_{\omega}^+) \quad (7)$$

с помощью такого канонического (т.е. сохраняющего коммутационные соотношения) преобразования операторов:

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_{1\omega} \hat{q}_{\omega} & p_1 &= P_{1\omega} \hat{p}_{\omega} \\ q_k &= Q_{k\omega} \hat{q}_{\omega} & p_k &= P_{k\omega} \hat{p}_{\omega} \end{aligned} \quad (8)$$

Подразумевается свертка-интеграл по ω . Q и P должны быть действительными (чтобы \hat{q} и \hat{p} тоже были эрмитовыми). Условие каноничности имеет вид $Q P^T = 1$. (7) имеет вид свободного гамильтониана. Если Ω -такой вектор, то $\hat{a}_{\omega} \Omega = 0$ для всех ω , то собственными векторами (7) являются Ω (физический вакуум), $\hat{a}_{\omega}^+ \Omega$, $\hat{a}_{\omega_1}^+ \hat{a}_{\omega_2}^+ \Omega$ и т.д. Зная собственные векторы h , мы в принципе можем точно решить любую задачу модели.

Рассмотрим, например, такую задачу Коши. Начальное состояние Ψ_1 (момент $t = 0$) имеет вид $\hat{a}_1^+ \Omega_0$ (электронный осциллятор однократно возбужден) или $\hat{a}_k^+ \Omega$ (есть один "голый" фотон) и т.п. Амплитуда вероятности обнаружения системы к моменту $t > 0$ в некотором состоянии Ψ_f того же вида, дается символическим выражением

$$b(t) = \langle \Psi_f, e^{-iht} \Psi_1 \rangle \quad (9)$$

Чтобы его вычислить, надо разложить Ψ_1 и Ψ_f по собственным векторам h :

$$\Psi_1 = \Phi_0^1 \Omega + \int_0^{\infty} d\omega \Phi_1^1(\omega) \hat{a}_{\omega}^+ \Omega + \frac{1}{\sqrt{2}} \iint d\omega_1 d\omega_2 \Phi_2^1(\omega_1, \omega_2) \hat{a}_{\omega_1}^+ \hat{a}_{\omega_2}^+ \Omega + \dots \quad (10)$$

Коэффициенты разложения в принципе можно найти, зная преобразование $a = \frac{1}{2}(P+Q)\hat{a} + \frac{1}{2}(P-Q)\hat{a}^+$, соответствующее (8). После этого

$$b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int d\omega_1 \dots \int d\omega_n \Phi_n^*(\omega_1 \dots \omega_n) e^{-i(\omega_1 + \dots + \omega_n)t} \Phi_n(\omega_1 \dots \omega_n) \quad (11)$$

Относительно математического существования разложения (10) для "голых" состояний заметим только, что (10) имеет место, если обрезание $f(k)$ в (4) достаточно эффективно.

Изложенная постановка задачи содержит физические пороки. Пусть $\Psi_1 = \Omega_0$ - вначале нет никаких квантов. Нет физических оснований для их появления в дальнейшем. Однако с помощью (11) можно установить, что в любой момент $t > 0$ есть ненулевая вероятность обнаружить в такой системе любое количество "голых" квантов: состояние Ω_0 является нестабильным. Далее, если вначале было некоторое количество "голых" квантов, то есть вероятность того, что впоследствии в системе мы не обнаружим никаких квантов. Чтобы таких явлений в теории не было, надо, чтобы наблюдаемые фотоны и фононы^{x)} рождались и уничтожались с помощью операторов, чей вакуум совпадает со стабильным физическим вакуумом Ω . Такого рода операторы были найдены в работе /2/. Оказывается, что разложение операторов электромагнитного поля по ним имеет вполне естественный физический смысл.

Подставим в разложение $\bar{A}_d(\vec{x})$ по "голым" дипольным операторам полученное в работе /2/ выражение "голых" операторов через новые, названные там "физическими". То же самое сделаем для канонически сопряженного оператора $-\bar{E}_d(\vec{x}) / 4\pi$. Получим

$$\bar{A}_d(\vec{x}) = \sum_m \int_0^{\infty} d\nu \sqrt{\frac{4\pi}{\nu}} \bar{B}_{\nu m}(\vec{x}) p_{\nu m}^z, \quad m = x, y, z \quad (12)$$

x) Поскольку речь идет о модельной теории, то точнее было бы говорить о фотонах, находящихся во взаимодействии с фононами.

$$\vec{E}_d(\vec{x}) = \sum_m \int_0^\infty d\nu \sqrt{\frac{4\pi}{\nu}} \nu \vec{B}_{\nu m}(\vec{x}) \tilde{q}_{\nu m} - \sum_m \tilde{q}_m \vec{G}_m(\vec{x}) \quad (13)$$

$$\vec{B}_{\nu m}(\vec{x}) = \int_0^\infty k dk \vec{A}_{klm}^e(\vec{x}) X_{k\nu} \quad (14)$$

$$\vec{G}_m(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{m_0 \omega_1}} \int k^2 dk \sqrt{\frac{4\pi}{k}} \xi(k) \vec{A}_{klm}^e(\vec{x}). \quad (15)$$

Новые функции разложения $\vec{B}_{\nu m}(\vec{x})$ ортогональны, и выражаются через действительные части дипольных электрических функций ^{/7/}.

$$\vec{A}_{klz}^e(\vec{x}) = \vec{A}_{k10}^e(\vec{x}); \vec{A}_{k1x}^e = \frac{1}{\sqrt{2}} [\vec{A}_{k1-1}^e + \vec{A}_{k1-1}^{e*}]; \vec{A}_{k1y}^e = \frac{i}{\sqrt{2}} [\vec{A}_{k1-1}^e - \vec{A}_{k1-1}^{e*}].$$

Функции $X_{k\nu}$, $\xi(k)$ и перенормированная собственная частота фотона ω_1 , определены в работе ^{/2/}.

Как видно, электромагнитное поле выражается не только через "физические" фотонные операторы $\tilde{p}_{\nu m} = (\tilde{a}_{\nu m}^- + \tilde{a}_{\nu m}^+)/\sqrt{2}$, $q_{\nu m} = i(\tilde{a}_{\nu m}^- - \tilde{a}_{\nu m}^+)/\sqrt{2}$, но и через электронные операторы \tilde{q}_m , $m = x, y, z$. Это представляется естественным, поскольку заряженный электрон должен давать свой вклад в полное электромагнитное поле.

Известны другие примеры подобных представлений для взаимодействующего электромагнитного поля. В случае, когда электрон свободный - $V(\vec{q})=0$, Ван Кампен получил

$$\vec{A}_d(\vec{x}) = \vec{A}'_d(\vec{x}) + T \frac{\vec{p}'}{m} \int \frac{\rho|\vec{q}|}{|\vec{x}-\vec{q}|} d^3q \quad (16)$$

(см. формулу (17) в работе ^{/1/}). Здесь $\vec{A}'(\vec{x})$ разлагается только по фотонным операторам, $\vec{p}'(q)/m$ можно назвать оператором тока электрона (T означает поперечную часть следующего за ним выражения). К сожалению, дипольное приближение трудно обосновать физически в случае свободного электрона ^{/8/}. Еще один пример дает мо-

дель "квантованное электромагнитное поле с внешним током" (см. раздел 2 в работе /9/). Естественно, что и момент электромагнитного поля и его импульс теперь тоже включают электронные операторы.

Заметим, что "голые" операторы a_k можно вообще изгнать из теории. Исходный гамильтониан (1) их не содержит, а в качестве исходного коммутационного соотношения можно принять

$$[A_1(\vec{x}), -E_1(\vec{y})/4\pi] = i\delta_{1j} \delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{i}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \quad (17)$$

(см., например, /6/. Напоминаем, что калибровка кулоновская). Разложение $\vec{A}(\vec{x})$ по "голым" операторам фотонов означает определенное конкретное представление оператора $\vec{A}(\vec{x})$, удовлетворяющее (17) (представление с голым вакуумом). Мы можем вместо него постулировать разложения (12), (13), которые тоже обеспечивают выполнение (17), но на базе физического вакуума.

Гамильтониан (4) через "физические операторы рождения-уничтожения" выражается следующим образом:

$$h = \frac{\omega_1}{2} (\tilde{a}_1^+ \tilde{a}_1 + \tilde{a}_1 \tilde{a}_1^+) + \frac{1}{2} \int d\nu \nu (\tilde{a}_\nu^+ \tilde{a}_\nu + \tilde{a}_\nu \tilde{a}_\nu^+) + \int_0^\infty d\nu \epsilon(\nu) [\tilde{a}_1^+ \tilde{a}_\nu + \tilde{a}_1 \tilde{a}_\nu^+] \quad (18)$$

$$\epsilon(\nu) \approx -2e \sqrt{\frac{\omega_1 \nu}{3\pi m}} \frac{\nu f(\nu)}{\nu + \omega_1} \quad (19)$$

К выражению (18) можно придти, подставляя в (1) разложения (12), (13), а также соответствующие выражения \vec{p} и \vec{q} через новые фоновые операторы.

К виду (7) выражение (18) можно привести с помощью канонического ортогонального преобразования

$$\hat{a}_1 = \int_0^\infty d\omega O_{1\omega} \hat{a}_\omega; \quad \hat{a}_\nu = \int_0^\infty d\omega O_{\nu\omega} \hat{a}_\omega, \quad (20)$$

найденного в работе /2/ (выражения для $O_{1\omega}$ и $O_{\nu\omega}$ можно извлечь из Приложения).

Операторы \hat{a}_1 и \hat{a}_ν не являются единственными операторами фонона и фотонов с вакуумом Ω . Подвергнем их преобразованию, при котором оператор уничтожения выражается только через операторы уничтожения, но не рождения:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= U_{11} \hat{a}'_1 + \int d\nu' U_{1\nu'} \hat{a}'_{\nu'}; \\ \hat{a}_\nu &= U_{\nu 1} \hat{a}'_1 + \int d\nu' U_{\nu\nu'} \hat{a}'_{\nu'}. \end{aligned} \quad (21)$$

У новых операторов \hat{a}' вакуум будет тот же. Преобразование U будет каноническим, если оно унитарно: $U^+ U = U U^+ = 1$.

На основании каких физических принципов можно сделать единственный выбор?

Выражение (18) само по себе задает модель, в которой вакуумы "голый" (вакуум первой строчки в (18) не путать с Ω_0 !) и физический совпадают, как и в модели Ли. Заметим, что однофононное состояние не может быть стабильным при любом определении: оно должно высвечиваться. Мы стоим перед проблемой, которая встречается в модели Ли с нестабильной V -частицей: как определить вектор состояния нестабильной физической частицы и ее характеристики - энергию и время жизни /10/. Воспользуемся двумя известными способами определения энергии нестабильного состояния.

Первое определение является в сущности экспериментальным: энергией возбужденного состояния атома называют энергию, соответствующую

шую максимуму в спектре испущенных фотонов. Найдем такую величину для однофотонного состояния $\bar{a}_1^+ \Omega$. Вычислим спектр испущенных фотонов при $t \rightarrow \infty$, если при $t=0$ имеем состояние $\bar{a}_1^+ \Omega$.

Амплитуда вероятности $b_\nu(t)$ обнаружить в момент $t > 0$ состояние $\Psi_t = \bar{a}_\nu^+ \Omega$ дается формулой (9). Из (20) следуют очень простые разложения $\bar{a}_1^+ \Omega$ и $\bar{a}_\nu^+ \Omega$ по собственным векторам h :

$$\bar{a}_1^+ \Omega = \int d\omega O_{1\omega} \hat{a}_\omega^+ \Omega; \quad \bar{a}_\nu^+ \Omega = \int d\omega O_{\nu\omega} \hat{a}_\omega^+ \Omega. \quad (22)$$

Поэтому $b_\nu(t) = \int d\omega O_{\nu\omega} O_{1\omega} \exp(-i\omega t)$. Используя выражения для $O_{\nu\omega}$ и $O_{1\omega}$ /2/, а также соотношение (11.726) из /4/ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{iEt}}{E - i\epsilon} = 2\pi i \delta(E),$$

получим для искомого распределения по ν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b_\nu^*(t) b_\nu(t) = \epsilon^2(\nu) \{ [\nu - \omega_1 + \pi D(\nu)]^2 + \pi^2 \epsilon^4(\nu) \}^{-1} = O_{1\nu}^2 \quad (23)$$

$$D(\nu) = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\epsilon^2(x)}{x - \nu} dx. \quad (24)$$

Оно совпадает с распределением $O_{1\omega}^2$ по собственным частотам полного гамильтониана. Точка максимума этого выражения должна удовлетворять уравнению

$$\nu - \omega_1 + \pi D(\nu) = \frac{\pi^2 \epsilon'(\nu) \epsilon^4(\nu)}{\epsilon'(\nu - \omega_1 + \pi D) - 2\epsilon(1 + \pi D')}. \quad (25)$$

Можно показать, что $\epsilon^2(\nu) < \frac{2\epsilon^2}{3\pi} \omega_1 \ll \omega_1$, если параметр обрезания μ в $f(\nu)$ - порядка m или меньше (можно, например,

принять $f^2(\nu) = \mu^2 / \nu^2 + \mu^2$). Аналогичную оценку имеет и $D(\nu)$. В первом приближении поэтому $\nu_{\max} = \omega_1$, а более точно (пренебрегая только правой частью (25), имеющей порядок ϵ^4),

$$\nu_{\max} = \omega_1 - \pi D(\omega_1). \quad (26)$$

Таким образом, энергия максимума не равна ω_1 , а сдвинута на $\approx \pi D(\omega_1)$. Отметим, что энергия фонона ω_1 , появившаяся при введении "физических" операторов, уже отличается от первоначальной $\kappa_1 / 2$.

Для рассмотрения другого определения энергии фонона надо сначала найти временной ход процесса высвечивания состояния $\tilde{a}_1^+ \Omega$.

Обсуждение поставленной проблемы определения физического нестабильного кванта будет закончено в Заключении.

2. Закон высвечивания возбужденного электрона

Пусть при $t = 0$ имеем состояние $\tilde{a}_1^+ \Omega$. Вычислим амплитуду вероятности $b_1(t)$ того, что в момент $t > 0$ электрон останется в том же возбужденном состоянии $\tilde{a}_1^+ \Omega$. Используя (22) и полученное в работе /2/ выражение для $O_{1\omega}$, имеем

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \langle \tilde{a}_1^+ \Omega, e^{-iht} \tilde{a}_1^+ \Omega \rangle = \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega t} O_{1\omega}^2 = \\ &= \int_0^\infty dx \frac{e^{-ixt} \epsilon^2(x)}{[x - \omega_1 + \pi D(x)]^2 + \pi^2 \epsilon^4(x)}. \end{aligned} \quad (27)$$

$D(x)$ связано с $\epsilon^2(x)$ формулой (24), т.е. является преобразованием Гильберта /11/ функции, равной $\epsilon^2(x)$ при $x > 0$ и равной нулю

при $x < 0$. Согласно теореме 95 из /11/, трансформанты Гильберта являются предельными значениями (при $\text{Im } z \rightarrow +0$) вещественной и мнимой частей функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2(\omega)}{\omega - z} d\omega. \quad (28)$$

Этот интеграл типа Коши аналитичен всюду, кроме отрезка $(0, \infty)$ вещественной оси (он называется также интегралом Шварца для полуплоскости /12/, п. 44). С помощью формулы $(a \pm i\epsilon)^{-1} = P1/a \mp i\pi \delta(a)$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +0} \Phi(z) &= D(x) + i\epsilon^2(x) \equiv \Phi_+(x) \\ \lim_{y \rightarrow -0} \Phi(z) &= D(x) - i\epsilon^2(x) \equiv \Phi_-(x), \end{aligned} \quad (29)$$

Такую величину, как $\epsilon^2(x)$, обычно обозначают через $\Gamma(x)$.

С помощью этого выхода в комплексную плоскость мы сможем вычислить основной вклад в (27), а также поправку к нему (с любой точностью).

Соотношения (29) позволяют представить (27) как интеграл от

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-izt}}{z - \omega_1 + \pi\Phi(z)} \equiv \psi(z) e^{-izt} \quad (30)$$

по контуру, проходящему по верхней границе разреза от $+\infty$ до $0(C_+)$ и далее по нижней границе от 0 до $+\infty(C_-)$:

^{x)} у Титчмарша /11/ действительная часть $\Phi(z)$ связывается с преобразованием, а не с образом преобразования Гильберта. Поэтому некоторые наши формулы отличаются от формул Титчмарша знаком.

$$\begin{aligned}
 b_1(t) &= \int_{C_+} \psi(z) e^{-lzt} dz + \int_{C_-} \psi(z) e^{-lzt} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{dx e^{-lxt}}{x - \omega_1 + \pi \Phi_+(x)} + \int_0^{\infty} \frac{dx e^{-lxt}}{x - \omega_1 + \pi \Phi_-(x)} \right].
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Нашей первоначальной целью будет замена контуров C_+ и C_- на другие, где $\exp(-lzt)$ будет уже быстро затухающей функцией. Такие контуры должны проходить в нижней z -полуплоскости. Для C_- это можно сделать путем вычисления интеграла от (30) по замкнутому контуру C_1 , изображенному на рис. 1 сплошной линией. Этот интеграл

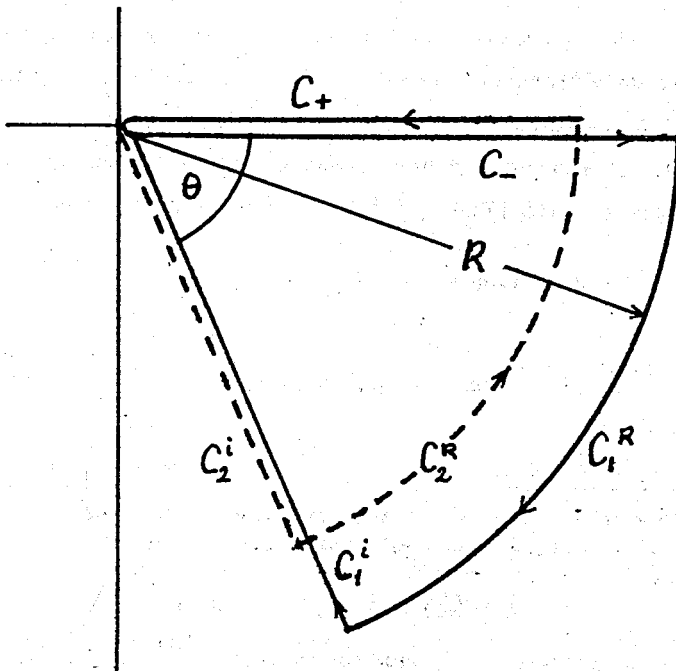


Рис. 1.

равен нулю, потому что $\psi(z)$ при комплексных z не имеет полюсов. Действительно, из (28) получаем, что

$$\operatorname{Im} \Phi(z) \equiv v(x, y) = \frac{iy}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^2(\omega) d\omega}{(\omega-x)^2 + y^2} \quad (32)$$

при $y > 0$ положительна, а при $y < 0$ отрицательна. Поэтому мнимая часть знаменателя $\psi(z)$, равная $y + \pi v(x, y)$, при $y \neq 0$ в нуль не обращается. Далее, интеграл от (30) по дуге C_1^R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, потому что $\psi(z) \rightarrow 1/z$ на C_1^R (из (28) следует, что $\Phi(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ /11/). Окончательно получаем:

$$\int_{C_+} \psi(z) e^{-izt} dz = - \int_{C_1} \psi(z) e^{-izt} dz \quad (33)$$

Контур C_+ — верхний край разреза, поэтому аналогичный контур C_2 должен проходить по риманову листу многозначной функции $\psi(z)$ (см. (29)), приклеенному к верхнему краю разреза (соответствует $\arg z < 0$). Аналитическое продолжение $\Phi(z)$ на этот (второй) лист имеет вид (ср. (3.11) в /10/):

$$\Phi_2(z) = \Phi(z) + 2i \Gamma(z), \quad (34)$$

где $\Gamma(z) \equiv \epsilon^2(z)$ так же зависит от z , как $\epsilon^2(\omega)$ от ω x). Соответственно

x) Действительно, если Γ — аналитическая функция, то Φ_2 является аналитической функцией в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, совпадающей на прямой $(0, \infty)$ с $\Phi(z)$

$$\Phi_2(x-i0) = \Phi_-(x) + 2i \Gamma(x) = \Phi_+(x)$$

По принципу непрерывного продолжения (см. /12/, п. 25) Φ_2 является поэтому аналитическим продолжением Φ .

$$\psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i} [z - \omega_1 + \pi\Phi(z) + 2i\pi\Gamma(z)]^{-1}. \quad (35)$$

Часть контура C_2 , проходящая по второму листу, показана на рис.1 пунктирной линией. Полюса $\psi_2(z)$ находятся в точках $z_0 = x_0 + iy_0$, где знаменатель $h(z) \equiv z - \omega_1 + \pi\Phi(z) + 2i\pi\Gamma(z)$ обращается в нуль. Полагая $\Gamma(z) = \gamma(x, y) + i\delta(x, y)$, получаем такую систему уравнений для x_0 и y_0 :

$$\begin{aligned} x_0 &= \omega_1 - \pi u(x_0, y_0) + 2\pi\delta(x_0, y_0) \\ y_0 &= -\pi v(x_0, y_0) - 2\pi\gamma(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (36)$$

Функции u, v, γ, δ содержат малый множитель $\epsilon^2 = 1/137$. Поэтому у (36) есть корень, близкий к точке $x_0 = \omega_1; y_0 = 0$. Более точное значение для него получим, взяв в (36) значения u, v, γ, δ в этой точке (точнее, их предельные значения при $x \rightarrow \omega_1, y \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} x_0 &\approx \omega_1 - \pi D(\omega_1) \\ y_0 &= \pi\Gamma(\omega_1) - 2\pi\Gamma(\omega_1) = -\pi\Gamma(\omega_1). \end{aligned} \quad (37)$$

Учтена действительность $\Gamma(z)$ на вещественной оси: $\delta(x, 0) = 0$.

С помощью "принципа аргумента" (см. /12/, п. 23) можно показать, что при подходящем выборе C_2 других корней у $h(z)$ нет. Выбор C_2 зависит от вида функции обрезания $f(\omega)$ в $\Gamma(\omega) = \epsilon^2(\omega)$, (см. (19)). В частности, $f^2(\omega) = \mu^2 / \omega^2 + \mu^2$ имеет полюса на мнимой оси. В качестве C_2^1 надо взять прямую, наклоненную к действительной оси, под углом $\theta = -45^\circ$, например. Тогда можно доказать,

что при движении z по контуру C_2 отображение $w = h(z)$ делает один оборот вокруг точки $w = 0$ (см. схематический рис. 2). Если у

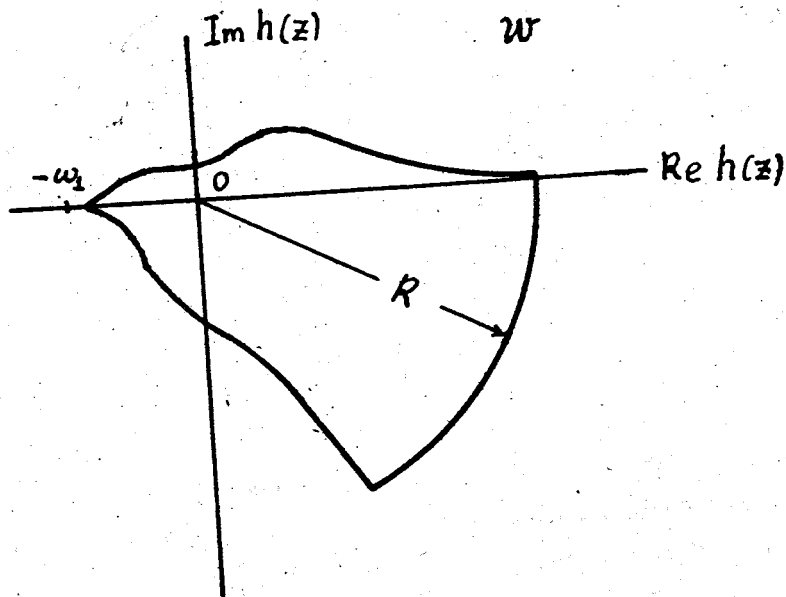


Рис. 2.

$f(z)$ (т.е. у $\Gamma(z)$) нет полюсов внутри C_2 (это так и есть в случае $f^2 = \mu^2 / \omega^2 + \mu^2$ или $f^2 = \exp(-\omega/\mu)$), то это означает, что $h(z)$ имеет только один нуль внутри C_2 . Главные пункты в этом доказательстве следующие: 1) мнимая часть $w = h(z)$ все время положительна, когда z пробегает по C_+ ; 2) $h(z)$ на C_2^R ведет себя как $z - \omega_1$, 3) мнимая часть $h(z)$ на C_2^I отрицательна.

Из вышеизложенного следует

$$\int_{C_2} \psi_2(z) e^{-izt} dz = \int_{C_+} + \int_{C_2^I} = 2\pi i \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-iz_0 t}}{1 + \pi \Phi_2'(z_0)} \quad (38)$$

(интеграл по C_2^R опять равен нулю). Объединяя формулы (31), (33) и (38), получаем

$$b_1(t) = \frac{e^{-ix_0 t - |y_0| t}}{1 + \pi \Phi'_2(z_0)} + \left[- \int_{C_1^1} \psi(z) e^{-1zt} dz - \int_{C_2^1} \psi_2(z) e^{-1zt} dz \right]. \quad (39)$$

В двух последних интегралах сделаем замену $z = \rho e^{-i\theta}$, где θ - угол наклона C_1^1 и C_2^1 к действительной оси, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$2\pi i [\quad] = \int_0^\infty d\rho e^{-i\theta} e^{-t\rho \sin\theta - it\rho \cos\theta} \times \left[\frac{1}{\rho e^{-i\theta} (-\omega_1 + \pi\Phi(\rho e^{-i\theta}))} - \frac{1}{\rho e^{-i\theta} (-\omega_1 + \pi\Phi + 2i\pi\Gamma)} \right]. \quad (40)$$

Этот интеграл можно считать численно. Если $t \gg 1/\omega_1$, то он приближенно равен

$$J = e^{-i\theta} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\omega_1} e^{-t\rho \sin\theta} [\cos(t\rho \cos\theta) - i \sin(t\rho \cos\theta)] 2\pi i \Gamma(\rho e^{-i\theta}).$$

Действительно, ввиду наличия $\exp(-t\rho \sin\theta)$ вклад в интеграл при $t \sin\theta \gg 1/\omega_1$ вносят только малые $\rho \ll \omega_1$. Далее, можно показать, что функциями Φ и Γ тоже можно пренебречь в знаменателе по сравнению с ω_1 (они содержат малый множитель $\epsilon^2 = 1/137$). Знаменатель превращается в ω_1^2 просто. Наконец, при $\rho \ll \omega_1$

$$\Gamma(\rho e^{-i\theta}) = \epsilon^2 (\rho e^{-i\theta}) \cong \frac{4e^2}{3\pi} \frac{1}{m\omega_1} \rho^3 e^{-3i\theta}.$$

Получающийся интеграл можно найти в таблицах

$$J \approx \frac{8e^2}{3} \frac{1}{m\omega_1^3} e^{-4i\theta} \frac{6}{t^4} e^{4i\theta}$$

Ответ не зависит от θ , но область справедливости этого приближенного вычисления конечно, зависит от θ ($t \sin \theta \gg 1/\omega_1$).

Мы получили качественно такой же результат, какой получается в аналогичных вычислениях в модели Ли /10,13/. На протяжении многих времен жизни главным в (39) является экспоненциальный член. Подробное обсуждение подобного поведения, а также связи решенной задачи с распадом реально приготовленного нестабильного состояния см. в /3,14,15/.

Для нас решенная задача важна тем, что она позволяет дать еще одно определение энергии однофоновому состоянию $\bar{a}_1^+ \Omega$: она принимается равной x_0 - частоте осциллирующего множителя в экспоненциальном члене в $b_1(t)$ /10/. Опять $x_0 \neq \omega_1$. Точное значение x_0 несколько отличается от ν_{\max} ср. (25) и (36). Это небольшое различие двух определений отмечалось и для модели Ли /16/. По-видимому, следует предпочесть ν_{\max} , т.к. частота x_0 не является наблюдаемой.

З а к л ю ч е н и е

Мы установили, что энергия ω_1 , приписываемая "физическому" однофоновому состоянию $\bar{a}_1^+ \Omega$, введенному в /2/, не равна ни энергии максимума спектра фотонов распада, ни частоте осциллирующего множителя в экспоненциальном члене временного закона распада. Как найти такой вектор состояния фотона, чтобы его энергетический параметр ω_1' совпадал с энергией максимума спектра?

Согласно обычной процедуре перенормировок, можно просто приписать состоянию $\tilde{a}_1^+ \Omega$ перенормированную энергию $\nu_{\max} = \omega_1 - \pi D(\omega_1)$, см. (26). Для этого вставляем в гамильтониан вместо $\omega_1 \tilde{a}_1^+ \tilde{a}_1$ выражение $(\nu_{\max} - \delta\omega) \tilde{a}_1^+ \tilde{a}_1$, где $\delta\omega = \nu_{\max} - \omega_1$. Переносим $-\delta\omega \tilde{a}_1^+ \tilde{a}_1$, в гамильтониан взаимодействия как дополнительный компенсирующий член "взаимодействия". Так и делает Леви в модели Ли, например, см. работу /10/, стр. 131. При таком подходе не надо находить новый вектор состояния, требуется только найти энергию и время жизни нестабильной частицы. Существует общий рецепт теоретического нахождения этих характеристик. Он опирается на исследование аналитических свойств фурье-образа функции распространения и сводится к нахождению параметров подходящего полюса на втором римановом листе /10/. Этот рецепт должен быть повергнут критике, если мы принимаем тезис о необходимости новой корпускулярной интерпретации теории. Следует ожидать, что поле $\phi_1(x)$, взаимодействующее с другим полем $\phi_2(x)$ при новой интерпретации, представляется не только через операторы рождения-уничтожения частиц сорта 1, но и частиц сорта 2. Примерами являются разложения (13), (16). Поэтому величина вида $\langle \Omega | T \phi_1(x) \phi_1(y) | \Omega \rangle$ уже не может быть истолкована как функция распространения частиц одного сорта. Понятие функции распространения физической частицы не может быть введено до определения ее операторов рождения-уничтожения, и мы не можем опираться на это понятие как на исходное.

Можно предложить другой подход к проблеме нестабильной частицы, дающий одновременно и ее вектор состояния и ее характеристики. Мы его изложим на языке нашей модели (можно было воспользоваться и моделью Ли). Введем вместо операторов \tilde{a}_1 и \tilde{a}_1' новые операторы \tilde{a}_1'' и \tilde{a}_1''' , связанные с прежним унитарным преобразованием U , (см. (21)). Выразим через них гамильтониан (18). Его вид изменится:
$$h = \frac{\omega_1'}{2} (\tilde{a}_1'' + \tilde{a}_1''' + \tilde{a}_1'' + \tilde{a}_1''') + \dots$$
 Подберем такое U , чтобы новый

фононный энергетический параметр ω'_1 совпадал с энергией максимума спектра фотонов распада состояния $\tilde{a}_1^{+\Omega}$ (x). Ниоткуда не следует, что эта энергия должна равняться ν_{\max} , определяемой формулой (26). Конечно, автоматически изменится и вид гамильтониана взаимодействия (так что не надо будет искусственно вводить псевдовзаимодействие вида $\delta\omega \tilde{a}_1^{+\Omega} \tilde{a}_1$). После такого преобразования время жизни следует теоретически определить как $1/\gamma'_0$, где γ'_0 — соответствующий параметр экспоненциального члена в законе распада нового состояния $\tilde{a}_1^{+\Omega}$.

Пользуясь случаем, благодарю Б.Н. Валуева и М.К. Волкова за обсуждения.

Приложение

Доказательство соотношений полноты $OO^T = 1$

В работе /2/ было показано, как можно доказать соотношения ортогональности $O^T O = 1$ для оператора ортогонального преобразования (20). Чтобы показать, что $OO^T = 1$, надо доказать, что имеют место равенства

$$1 = \int_0^\infty d\omega O_{1\omega}^2 \equiv \int_0^\infty \frac{dx \epsilon^2(x)}{[x - \omega_1 + \pi D(x)]^2 + \pi^2 \epsilon^4(x)} \quad (\text{П.1})$$

x)

Можно показать, что средняя энергия $\int d\omega \omega O_{1\omega}^2$ состояния $\tilde{a}_1^{+\Omega}$ равна ω_1 . И ω'_1 тоже будет равняться средней энергии состояния $\tilde{a}_1^{+\Omega}$. Поэтому задачу можно сформулировать так: надо добиться совпадения средней энергии с энергией максимума.

$$0 = \int_0^{\infty} d\omega \, 0_{1\omega} \, 0_{\nu\mu} \equiv$$

$$\equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega \epsilon(\omega)}{[\omega - \omega_1 + \pi D(\omega)]^2 + \pi^2 \epsilon^4(\omega)} \{ [\omega - \omega_1 + \pi D(\omega)] \delta(\omega - \nu) + P \frac{\epsilon(\nu)\epsilon(\omega)}{\omega - \nu} \},$$

$$\delta(\nu - \nu') = \int_0^{\infty} d\nu \, 0_{\nu\omega} \, 0_{\nu'\omega} \equiv \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{[\omega - \omega_1 + \pi D]^2 + \pi^2 \epsilon^4} \dots$$

(П.3)

$$\times \{ [\nu - \omega_1 + \pi D] \delta(\omega - \nu) + P \frac{\epsilon(\nu)\epsilon(\omega)}{\omega - \nu} \} \{ [\nu' - \omega_1 + \pi D] \delta(\omega - \nu') + P \frac{\epsilon(\nu')\epsilon(\omega)}{\omega - \nu'} \}$$

Правая часть (П.1) равняется $b_1(0)$, см. (27), и поэтому (П.1) есть также соотношение нормировки для состояния $\tilde{a}_1^+ \Omega$. Интеграл (П.1) тоже можно представить как интеграл по сумме контуров C_+ и C_- , см. раздел 2, но от функции $\psi(z)$, см. (30). Дополним C_+ и C_- до замкнутого контура так, как показано на рис. 3^{/17/}. В разделе 2 было показано, что у $\psi(z)$ нет полюсов при комплексных z .

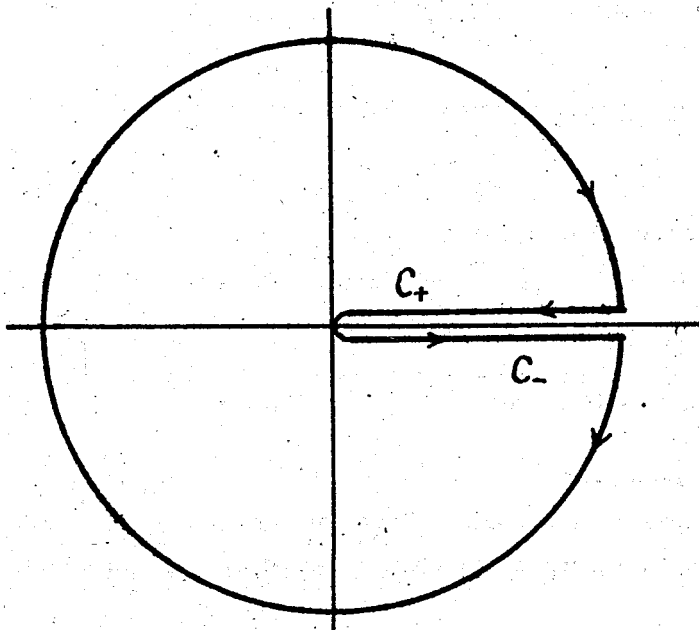


Рис. 3.

Покажем, что нет их и на действительной отрицательной полуоси. На этой полуоси вещественная часть знаменателя $\psi(z)$ равна $x - \omega_1 + \pi D(x)$. Это выражение всегда отрицательно, потому что, хотя функция $D(x) > 0$ при $x < 0$, но она всюду много меньше ω_1 . Действительно,

$$D(x) = \frac{1}{\pi^0} \int \frac{\Gamma(\omega) d\omega}{\omega + |x|} < \frac{4e^2}{3\pi} \omega_1 \left[\frac{1}{m\pi} \int_0^\infty d\omega f^2(\omega) \right] \ll \omega_1.$$

При $f^2 = \mu^2/\omega^2 + \mu^2$, например, квадратная скобка $\leq 1/2$ при $\mu \leq m$.

Поэтому

$$\int_{C_+} \psi(z) dz + \int_{C_-} \psi(z) dz = - \int_{C_R} \psi(z) dz. \quad (\text{П.4})$$

В отличие от обычных случаев применения теоремы о вычетах, интеграл по C_R не равен нулю. Функция $\Phi(z)$, см. (28), стремится к нулю, как при комплексных $z \rightarrow \infty$ /11/, так и при действительных (в нашем случае, когда $\Gamma(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$). Поэтому на C_R имеем

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z - \omega_1 + \pi \Phi(z)} \approx \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \left[1 + \frac{\omega_1}{z} + o(1/z) \right].$$

Интеграл от $1/z$ по C_R равен $-2\pi i$, и правая часть (П.4) и (П.1) действительно, равна 1.

Соотношение (П.2) можно преобразовать к виду

$$\frac{\nu - \omega_1 + \pi D(\nu)}{[\nu - \omega_1 + \pi D(\nu)]^2 + \pi^2 \epsilon^4(\nu)} = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega - \nu} \frac{-\pi \epsilon^2(\omega)}{\{[\omega - \omega_1 + \pi D(\omega)]^2 + \pi^2 \epsilon^4(\omega)\}}. \quad (\text{П.5})$$

Было показано, что $\phi(z) = [z - \omega_1 + \pi \Phi(z)]^{-1}$ аналитична в верхней полуплоскости (в частности). В таком случае мнимая и действительная части ее предела при стремлении к вещественной оси сверху должны

быть связаны преобразованием Гильберта (см. /11/, теорема 93; требуемая ограниченность интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x+iy)|^2 dx$ следует из того, что $\phi(z) \rightarrow 1/z$ при $z \rightarrow \infty$). Как раз (П.5) и является записью этого преобразования.

Для доказательства (П.3) теперь достаточно расписать правую часть (П.3) и воспользоваться формулой (П.5) и формулой (В.3) из /2/.

Л и т е р а т у р а

1. N.G. van Kampen. Dan. Mat. Fys. Medd., 26, N.15 (1951).
2. И.А. Еганова, М.И. Широков. ЯФ 9, 1097 (1969).
3. М. Гольдбергер, К. Ватсон. Теория столкновений, гл. 8, "Мир", Москва (1967).
4. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИЛ, Москва (1963).
5. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Изд. II, §16. ГИФМЛ Москва (1959).
6. Л. Шифф. Квантовая механика. §48, ИИЛ, Москва (1957).
7. М. Роуз. Поля мультиполей. ИИЛ, Москва (1957).
8. И.А. Еганова, М.И. Широков. Препринт ОИЯИ Р2-3929, стр. 7, Дубна (1968).
9. М.И. Широков. ЯФ, 8, 672 (1968).
10. M. Levy. Nuovo Cimento 13, 115 (1959).
11. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, гл. V ИИЛ, Москва (1948).
12. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, ГИФМЛ Москва (1958).
13. R. Alzetta, E. d'Ambrogio. Nucl. Phys., 82, 683 (1966).
14. M. Levy. Nuovo Cim., 14, 612 (1959).

15. L.Rosenfeld. Nucl. Phys., 70, 1 (1965).
16. H.Araki, Y.Munakata, M.Kawaguchi. Progr. Theor. Phys., 17, 419 (1957).
17. G.Källen, V.Glaser. Nucl. Phys., 2, 706 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1969 года.