ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4401

М.К.Волков

ФУНКЦИИ ГРИНА
В ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4401

М.К.Волков

ФУНКЦИИ ГРИНА В ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в Commun. in Mathem. Phys.

1. Введение

В ряде предыдущих работ [1-3] изучался вопрос о построении функций Грина в импульсном пространстве в теориях, описывающих неперенормируемые взаимодействия. В конфигурационном пространстве эти функции обладают существенно особой точкой при нулевом значении своего аргумента. Поэтому построение фурье-образов таких функций представляет собой нетривиальную задачу и требует преодоления принципиальных трудностей.

В случае, когда массы покоя частиц равны нулю, все характерные черты данного вопроса сохраняются при существенном упрощении расчетов. Именно поэтому в указанных выше работах изучались взаимодействия безмассовых частиц. При максимально простых вычислениях главное внимание уделялось основной проблеме – переходу от функций Грина, найденных в конфигурационном пространстве, к функциям Грина в импульсном пространстве. Был разработан метод, позволяющий осуществить такой переход. Этот метод может применяться в теориях, описывающих широкий класс неперенормируемых взаимодействий. Функции Грина, построенные с его помощью, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к теории условиями причинности и унитарности S-матрицы.

Однако для того, чтобы проведенные исследования приобрели завершенный вид, необходимо сделать обобщение методов, развитых для случая неперенормируемого взаимодействия безмассовых частиц, на общий случай неперенормируемого взаимодействия частиц с произвольной массой покоя. Настоящая работа посвящена решению этого вопроса.

В работе исследуется двухточечная функция Грина, экспоненциально зависящая от пропагатора свободной скалярной частицы с массой покоя m. Подобные функции довольно часто встречаются в теориях, описывающих локальные неренормируемые взаимодействия /1-7/. Расчеты проведены с использованием некоторого приближенного выражения для пропагатора свободной скалярной частицы. Смысл этого приближения в дальнейшем выясняется на примере абсорбтивной части двухточечной функции Грина. Предложенный метод построения функций Грина в импульсном пространстве удовлетворяет условиям локальности и унитарности S-матрицы.

В последней части работы метод, разработанный для функций с экспоненциальной зависимостью в x-пространстве от пропагатора скалярной частицы, обобщается на случай более общих неперенормируемых взаимодействий. При предельном переходе к большим значениям энергии полученные в работе результаты полностью согласуются с ранее выведенными для случая взаимодействия частиц с нулевыми массами покоя /1-3/.

§2. Двухточечная функция Грина

Развивая теорию возмущений для таких неперенормируемых взаимодействий элементарных частиц, как, например, пион-нуклонное взаимодействие нейтральных частиц с псевдовекторной связью /2-4/ или несохраняющее четность взаимодействие нейтрального векторного мезона с нуклонами /7/, мы приходим к двухточечным функциям Грина типа:

$$\tilde{\tilde{F}}_1(x) = \Psi_1(x) \exp\{-ig^2 \Delta(x)\}, \tag{1}$$

где g -константа связи, $\Delta(x)$ - пропагатор свободной скалярной частицы, $\Psi_1(x)$ - некая функция от пропагатора свободных спинорных частиц. Для простоты мы рассмотрим случай $\Psi_0(x)=1$. Обобщение на случаи $\Psi_1(x)=S(x)$ или $\Psi_2(x)=Sp\{S(x)S(-x)\}$, где $S(x)$ -пропагатор свободной спинорной частицы, не представляет особого труда /2/.

Чтобы построить фурье-образ функции $\tilde{\tilde{F}}_0(x)$, введем вспомогательную функцию $\Phi_0(x)$, отличающуюся от $\tilde{\tilde{F}}_0(x)$ знаком в экспоненте. Для нее в нефизической области $p^2<0$ будет построен фурье-образ в некотором приближении. Это приближение хорошо описывает точную функцию при больших значениях импульса. Затем будет сделан переход к искомой функции с помощью аналитического продолжения по константе связи подобно тому, как это делалось в работе /2/ для случая нулевых масс покоя скалярных частиц. Фурье-образ функции $\tilde{\tilde{\Phi}}_0(x)$ можно записать в виде:

$$\Phi_0(p)=i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p)+\frac{(2\pi)^2\kappa}{p^2-m^2+i\epsilon}+\phi_\kappa(p), \tag{2}$$

где

$$\phi_\kappa(p)=i\int d^4x e^{ipx}\,[\exp\{i(2\pi)^2\kappa\Delta(x)\}-1-i(2\pi)^2\kappa\Delta(x)], \tag{3}$$

а $\kappa=(\frac{g}{2\pi})^2$. В нефизической области $p^2<0$ выберем систему координат, в которой $p=\{0,\vec{p}\}$. При таком выборе системы координат можно сделать поворот контура в интеграле (3) по временной переменной на угол $-\frac{\pi}{2}$. В результате такого поворота мы приходим к евклидовой метрике. Выбирая полярные координаты и интегрируя по угловым переменным, получаем следующее выражение для функции $\phi_\kappa(p)$.

$$\phi_\kappa(p)=(2\pi\kappa)^2\frac{m}{|p|}\int_0^1 dt(1-t)\int_0^\infty dr\, J_1\left(\frac{|p|}{m}r\right)[K_1(r)]^2\exp\left\{-t\kappa m^2\frac{K_1(r)}{r}\right\}, \tag{4}$$

где $|p|=\sqrt{-p^2}=\sqrt{\vec{p}^{\,2}}$, а $J_1(z)$ и $K_1(z)$ – функции Бесселя и Кельвина соответственно.

Интеграл (4) вряд ли может быть взят точно. Однако хорошую оценку его можно получить, заменяя функцию Кельвина $K_1(r)$ экспонентой, деленной на r:

$$K_1(r)\approx\frac{e^{-r}}{r}. \tag{5}$$

При очень малых и очень больших значениях аргумента эта функция хорошо аппроксимирует функцию Кельвина. Поэтому при такой замене можно надеяться на получение результата, достаточно близко воспроизводящего поведение истинной функции $\phi_\kappa(p)$.

§3. Качественные оценки функции Грина

Перед тем как приступить к вычислению интеграла (4) в указанном приближении, полезно рассмотреть более грубое приближение. Оно заключается в том, что в экспоненте берется функция, соответствующая пропагатору частицы с нулевой массой покоя, а квадрат функции Кельвина, стоящий перед экспонентой, заменяется с помощью подстановки (5)

$$\overset{=}{\phi}_\kappa(p) = (2\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|}\int_0^1 dt\,(1-t)\int_0^\infty \frac{dr}{r^2}\, e^{-2r} J_1\left(\frac{|p|}{m} r\right)\exp\left\{-t\frac{\kappa m^2}{r^2}\right\}. \tag{6}$$

(В дальнейшем двумя чертами будем отмечать функции, вычисленные в данном приближении, одной-функции, вычисленные в приближении (5)). Приближение (6) необходимо нам для того, чтобы на возможно более простом примере продемонстрировать технику вычисления интегралов типа (6) и аналитического продолжения полученной функции по переменной p^2 из области $p^2 < 0$, в которой имеет место выражение (6), в область $0 < p^2 < 4m^2$ и в физическую область $p^2 > 4m^2$. В дальнейшем все эти операции будут перенесены на случай приближения (5).

В подинтегральном выражении формулы (6) экспоненту с пропагатором можно представить в виде интеграла Меллина-Бернса /8/:

$$\exp\left\{-t\frac{\kappa m^2}{r^2}\right\} = \frac{1}{2i}\int_{-\alpha+i\infty}^{-\alpha-i\infty} dz\, \frac{(t\kappa m^2)^z\, r^{-2z}}{\sin\pi z\,\Gamma(z+1)}, \tag{7}$$

где $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(z+1)$ – гамма-функция. Подставим (7) в (6). Легко убедиться, что все интегралы абсолютно сходятся, и поэтому можно менять порядок интегрирования. Интегрируя по переменной t и переставляя порядок интегрирования по r и по z, перепишем (6) следующим образом:

$$\stackrel{=}{\phi}_{\kappa}(p)=(2\pi\kappa)^2\frac{m}{|p|}\frac{1}{2i}\int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty}dz\frac{(\kappa m^2)^z}{\sin\pi z\,\Gamma(z+3)}\int_0^{\infty}dr\, r^{-2(z+1)}e^{-2r}J_1\left(\frac{|p|}{m}r\right). \qquad (8)$$

Интеграция по r приводит к появлению шаровой функции $P^{-1}_{-2(z+1)}\left[\left(1+\frac{\vec{p}^{\,2}}{4m^2}\right)^{-1/2}\right]$ под знаком интеграла по z /9/.

$$\stackrel{=}{\phi}_{\kappa}(p)=i\pi^3\kappa^2\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty}dz\frac{[\kappa(4m^2-p^2)]^z}{\sin^2\pi z\cos\pi z\,\Gamma(z+3)\Gamma(2z+1)}P^{-1}_{-2(z+1)}\left[\left(1-\frac{p^2}{4m^2}\right)^{-1/2}\right]. \qquad (9)$$

Используя для $P^{-1}_{-2(z+1)}(a)$ представление /8,9/

$$P^{-1}_{-2(z+1)}(a)=\left(\frac{1+a}{2}\right)^{-2(z+1)}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{1/2}F\left(2z+2,2z+3;2;\frac{a-1}{a+1}\right), \qquad (10)$$

где $F\left(2z+2,2z+3;2;\frac{a-1}{a+1}\right)$ – гипергеометрическая функция, легко убедиться, что $P^{-1}_{-2(z+1)}(a)$ не имеет особенностей в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z>0$ и нулей на реальной положительной оси. Поэтому интеграл по z легко берется и функция $\stackrel{=}{\phi}_{\kappa}(p)$ выражается в виде ряда. Не выписывая здесь этот ряд в явном виде, мы сразу укажем, как из функции $\stackrel{=}{\phi}_{\kappa}(p)$ можно получить функцию $\stackrel{=}{f}(p)$. Эта функция связана с приближенным выражением для фурье-образа искомой функции $\stackrel{\approx}{F}_0(x)$ соотношением:

$$\stackrel{=}{F}(p)=i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p)-\frac{(2\pi)^2\kappa}{p^2-m^2+i\epsilon}+\stackrel{=}{f}(p). \qquad (11)$$

Следуя работе /2/, можно выразить $\stackrel{=}{f}(p)$ через $\stackrel{=}{\phi}_{\kappa}(p)$ с помощью формулы:

$$\stackrel{=}{f}(p)=\frac{1}{2}\{\stackrel{=}{\phi}_{\kappa e^{i\pi}}(p)+\stackrel{=}{\phi}_{\kappa e^{-i\pi}}(p)\}. \qquad (12)$$

Подставляя (9) в (12) и интегрируя по z, получаем:

$$\stackrel{=}{f}(p)=-2(\pi\kappa)^2\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{[\kappa(4m^2-p^2)]^{\nu}}{\Gamma(\nu+3)\Gamma(2\nu+1)}P^{-1}_{-2(\nu+1)}\left[\left(1-\frac{p^2}{4m^2}\right)^{-1/2}\right]\right\}\Bigg|_{\nu=n}. \qquad (13)$$

Формула (13) верна при значениях аргумента p^2, лежащих в нефизической области $p^2<0$. Чтобы аналитически продолжить $\bar{\bar{f}}(p)$ в следующую область $0<p^2<4m^2$, удобно опять вернуться к функции $\bar{\bar{\phi}}_\kappa(p)$, записанной в форме (8). В интересующей нас области она принимает вид:

$$\bar{\bar{\phi}}_\kappa(p)=(2\pi\kappa)^2\,\frac{m}{p}\,\frac{1}{2i}\int\limits_{-a+i\infty}^{-a-i\infty}dz\,\frac{(\kappa m^2)^z}{\sin\pi z\,\Gamma(z+3)}\int\limits_0^\infty dr\, r^{-2(z+1)}e^{-2r}I_1\left(\frac{p}{m}r\right), \qquad (14)$$

где $p=\sqrt{p^2}$, $I_1(\frac{p}{m}r)$ – функция Бесселя мнимого аргумента. Интеграция по r вновь приводит к появлению шаровой функции $P^{-1}_{-2(z+1)}[(1-\frac{p^2}{4m^2})^{-1/2}]$, которая в области $p^2<0$ связана с прежней соотношением /8,9/

$$P^{-1}_{-2(z+1)}[(1-\frac{p^2}{4m^2})^{-1/2}]=\frac{i}{2}\{P^{-1}_{-2(z+1)}[(1-\frac{p^2}{4m^2})^{-1/2}-i0]-P^{-1}_{-2(z+1)}[(1-\frac{p^2}{4m^2})^{-1/2}+i0]\}. \quad (15)$$

Для этой функции также имеет место представление, подобное (10)/8/. Поэтому и для нее остается в силе утверждение об отсутствии особенностей в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z>0$ и нулей на реальной положительной оси. Повторяя те же операции, которые мы проводили в области $p^2<0$ с функциями $\bar{\bar{\phi}}_\kappa(p)$ и $\bar{\bar{f}}(p)$, приходим к следующему выражению для $\bar{\bar{f}}(p)$, справедливому в области $0<p^2<4m^2$:

$$\bar{\bar{f}}(p)=-2(\pi\kappa)^2\sqrt{\frac{4m^2}{p^2}-1}\,\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{[\kappa(4m^2-p^2)]^\nu}{\Gamma(\nu+3)\,\Gamma(2\nu+1)}P^{-1}_{-2(\nu+1)}\left[(1-\frac{p^2}{4m^2})^{-1/2}\right]\right\}\Bigg|_{\nu=n}. \quad (16)$$

При аналитическом продолжении функции $\bar{\bar{f}}(p)$ по p^2 в физическую область $p^2>4m^2$ необходимо считать, что масса имеет бесконечно малую отрицательную мнимую добавку (см., например, /10/). Тогда будет иметь место соотношение

$$4m^2-p^2-i\epsilon=(p^2-4m^2)e^{-i\pi}. \qquad (17)$$

Используя (17), а также формулу преобразования шаровых функций /8/

$$P^{-1}_{-2\nu-2}\left[i\left(\frac{p^2}{4m^2}-1\right)^{-1/2}\right]=\frac{\left(1-\frac{4m^2}{p^2}\right)^{1/4}}{\sqrt{2\pi}\cos 2\pi\nu}\left\{\sin 2\pi\nu\, e^{-i\pi\nu}\Gamma(2\nu+1)\,P^{-2\nu-3/2}_{1/2}\left(2\frac{m}{p}\right)-i\pi\frac{e^{i\pi\nu}}{\Gamma(2\nu+3)}P^{2\nu+3/2}_{1/2}\left(2\frac{m}{p}\right)\right\}, \tag{18}$$

легко получить для $\overset{=}{f}(p)$ в области $p^2>4m^2$ выражение

$$\overset{=}{f}(p)=\sqrt{2\pi}\,(\pi\kappa)^2\left(1-\frac{4m^2}{p^2}\right)^{3/4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i2\frac{[\kappa(p^2-4m^2)]^n}{(n+2)!}P^{-2n-3/2}_{1/2}\left(2\frac{m}{p}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{[\kappa(p^2-4m^2)]^\nu}{\Gamma(\nu+3)\Gamma(2\nu+1)\Gamma(2\nu+3)}P^{2\nu+3/2}_{1/2}\left(2\frac{m}{p}\right)\right\}\Big|_{\nu=n}\right). \tag{19}$$

Полученные формулы находятся в полном согласии с ранее выведенными для случая безмассовых частиц. Действительно, устремляя m к нулю, мы получаем из (19) и (13)

$$f_{m=0}(p)=-(\pi\kappa)\sum_0^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{\left(\frac{\kappa}{4}(p^2+i\epsilon)\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+2)\Gamma(\nu+3)}\right\}\Big|_{\nu=n}-i\pi\frac{\left(\frac{\kappa}{4}p^2\right)^n}{n!(n+1)!(n+2)!}\right]. \tag{20}$$

Эта формула была получена нами ранее в модели нейтрального пион-нуклонного взаимодействия с псевдовекторной связью /2/. Она целиком удовлетворяет требованиям, предъявляемым к локальной теории поля с унитарной S -матрицей /2,11,12/.

§4. Более строгое приближение

После качественного рассмотрения проблемы построения фурье-образа функции $\tilde{F}_0(x)$, проведенного в предыдущем параграфе, задача более строгого подхода к этому вопросу с использованием приближения (5), значительно упрощается. В этом приближении интеграл (4) выглядит следующим образом:

$$\bar{\phi}_\kappa(p)=(2\pi\kappa)^2\frac{m}{|p|}\int_0^1 dt(1-t)\int_0^\infty dr\, r^{-2}e^{-2r}J_1\left(\frac{|p|}{m}r\right)\exp\left\{-t\kappa m^2\frac{e^{-r}}{r^2}\right\}. \tag{21}$$

Вновь используем для экспоненты интегральное представление Меллина-Бернса. Интегрируя затем по t и меняя порядок интегрирования по r и по z, приводим (21) к виду:

$$\bar{\phi}_{\kappa}(p)=(2\pi\kappa)^2\frac{m}{|p|}\frac{1}{2i}\int_{-\alpha+i\infty}^{-\alpha-i\infty}dz\frac{(\kappa m^2)^z}{\sin\pi z\,\Gamma(z+3)}\int_0^{\infty}dr\, r^{-2(z+1)}e^{-r(2+z)}J_1\left(\frac{|p|}{m}r\right). \qquad (22)$$

Для значений z, лежащих в области $-2<\mathrm{Re}\,z<0$, интеграл по r сходится и равен:

$$-\frac{\pi}{2}\frac{|p|}{m}(2+z)^{2z}\frac{\left[1-\frac{p^2}{m^2(2+z)^2}\right]^{2z+3/2}}{\sin 2\pi z\,\Gamma(2z+1)}F\left(z+3/2,z+2;2;\frac{p^2}{m^2(2+z)^2}\right)= \qquad (23)$$

$$=-\pi\frac{|p|}{m}\frac{\left[(2+z)^2-\frac{p^2}{m^2}\right]^z}{\sin 2\pi z\,\Gamma(2z+1)}\sqrt{1-(2+z)^2\frac{m^2}{p^2}}\;P^{-1}_{-2z-2}\left[\left(1-\frac{p^2}{m^2(2+z)^2}\right)^{-1/2}\right].$$

Из полученного выражения видно, что все утверждения, которые были справедливы при проведении интегрирования по z в функции $\bar{\phi}_{\kappa\_}(p)$, остаются в силе и для функции $\bar{\phi}_{\kappa}(p)$. Возвращаясь к функции $\bar{f}(p)$ с помощью формулы, аналогичной (12), получаем для нефизической области $p^2<0$

$$\bar{f}(p)=-2(\pi\kappa)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\sqrt{1-(2+\nu)^2\frac{m^2}{p^2}}\,\frac{[\kappa(m^2(2+\nu)^2-p^2)]^{\nu}}{\Gamma(\nu+3)\Gamma(2\nu+1)}P^{-1}_{-2\nu-2}\left[\left(1-\frac{p^2}{m^2(2+\nu)^2}\right)^{-1/2}\right]\right\}\Big|_{\nu=n} \qquad (24)$$

В следующей нефизической области $0<p^2<4m^2$, повторяя операции, описанные в предыдущем параграфе, получаем:

$$\bar{f}(p)=-2(\pi\kappa)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\sqrt{(2+\nu)^2\frac{m^2}{p^2}-1}\,\frac{[\kappa(m^2(2+\nu)^2-p^2)]^{\nu}}{\Gamma(\nu+3)\,\Gamma(2\nu+1)}P^{-1}_{-2\nu-2}\left[\left(1-\frac{p^2}{m^2(2+\nu)^2}\right)^{-1/2}\right]\right\}\Big|_{\nu=n}, \qquad (25)$$

Наконец, в физической области $p^2>4m^2$, используя формулы, аналогичные (17) и (18), имеем

$$\bar{f}(p)=-2(\pi\kappa)^2\sum_{[\frac{p}{m}]+1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\sqrt{\frac{\nu^2m^2}{p^2}-1}\,\frac{[\kappa(m^2\nu^2-p^2)]^{\nu-2}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\nu-3)}P^{-1}_{-2\nu+2}\left[\left(1-\frac{p^2}{m^2\nu^2}\right)^{-1/2}\right]\right\}\Big|_{\nu=n}+$$

$$+\sqrt{2\pi}\left(\frac{\pi}{p^2}\right)^2\sum_{2}^{[\frac{p}{m}]}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{[\kappa(p^2-m^2\nu^2)]^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(2\nu-3)\,\Gamma(2\nu-1)}\left(1-\frac{m^2\nu^2}{p^2}\right)^{-5/4}P^{2\nu-5/2}_{1/2}\left(\frac{m\nu}{p}\right)\right\}\Big|_{\nu=n}+ \qquad (26)$$

$$+ i \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \left(\frac{2\pi}{p^2} \right)^2 \sum_2^{[\frac{p}{m}]} \frac{[\kappa (p^2 - m^2 n^2)]^n}{n!} \left(1 - \frac{m^2 n^2}{p^2}\right)^{-5/4} P_{1/2}^{-2n+5/2} \left(\frac{mn}{p} \right).$$

Здесь $[\frac{p}{m}]$ обозначает ближайшее целое число, меньшее величины $\sqrt{\frac{p^2}{m^2}}$. В пределе $m=0$ формулы (24) и (26) так же, как и (13), (19), сводятся к формуле (20).

При стремлении энергии к бесконечности реальная часть функции $\bar{f}(p)$ стремится к нулю, а мнимая часть экспоненциально возрастает. Однако этот рост мнимой части не противоречит требованиям, предъявляемым к локальным теориям /11-13/.

§5. Исследование мнимой части функции Грина и выяснение смысла приближения (5)

Из условия унитарности S-матрицы следует, что мнимая часть двухточечной функции Грина должна выражаться через сумму фазовых объемов частиц /1,2/

$$\mathrm{Im}\, f(p) = \pi (2\pi)^3 \sum_2^{[\frac{p}{m}]} \frac{(\frac{\kappa}{4\pi})^n}{n!} \Omega_n (p), \tag{27}$$

где

$$\Omega_n (p) = \int \delta^{(4)} (p - \sum_{i=1}^n k_i) \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{k}_i}{\omega_i}, \quad \omega_i = \sqrt{k_i^2 + m^2}. \tag{28}$$

Сравнивая формулы (26) и (27), получаем, что в нашем приближении фазовый объем равен:

$$\bar{\Omega}_n (p) = (2\pi)^{-3/2} \frac{[4\pi (p^2 - m^2 n^2)]^n}{(p^2)^2} \left[1 - \frac{m^2 n^2}{p^2}\right]^{-5/4} P_{1/2}^{-2n+5/2} \left(\frac{mn}{p}\right). \tag{29}$$

Из этого выражения легко получить асимптотические оценки поведения приближенного фазового объема при различных энергиях. Приведем некоторые из них

$$2\pi \frac{(\pi p^2)^{n-2}}{(n-1)!\,(n-2)!}, \quad p \gg nm \tag{30а}$$

$$\bar{\Omega}_n(p) \approx \frac{(4\pi)^n\,(p-mn)^{2n-5/2}}{(2\pi p)^{3/2}\,\Gamma(2n-3/2)}, \; n \approx \frac{p}{m} \tag{30б}$$

$$\frac{(4\pi)^n\,(p-m\,n)^{2n-5/2}}{(4\pi p n)^{3/2}\,\Gamma(2n-3)}, \; n \gg 1 \tag{30в}$$

Сравнивая полученные формулы с аналогичными оценками поведения истинного фазового объема n -скалярных частиц (см., например, /14/), нетрудно убедиться, что при $p \gg nm$ поведение приближенного фазового объема полностью совпадает с поведением точного фазового объема, а при пороговых энергиях приближенный фазовый объем стремится к нулю несколько быстрее истинного.

Такое поведение $\bar{\Omega}_n(p)$ становится вполне понятным, если сформулировать наше приближение на языке формфакторов. Для этого рассмотрим функцию Грина свободной скалярной частицы $\Delta^{(-)}(x)$ в области $x^2>0$, $x^0=t>0$. Выберем систему координат, где $x=\{t,0\}$

$$\Delta^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} e^{-i\omega t} = -\frac{m}{8\pi t} H_1^{(2)}(mt), \tag{31}$$

$H_1^{(2)}(mt)$ – функция Ханкеля. Приближение (5) равносильно введению в подинтегральное выражение у $\Delta^{(-)}(x)$ форм-фактора $\left(\frac{\omega-m}{|k|}\right)$. Действительно:

$$\bar{\Delta}^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{2\omega} \left(\frac{\omega-m}{|k|}\right) e^{-i\omega t} = -i\,\frac{e^{-imt}}{(2\pi)^2 t^2}, \tag{32}$$

что вполне согласуется с подстановкой (5). Поэтому фазовый объем $\bar{\Omega}_n(p)$ можно записать в форме (28), но с введением некоторого формфактора $G(k_1, k_2, \dots, k_n)$:

$$\bar{\Omega}_n(p) = \int \delta^{(4)}\left(p - \sum_{i=1}^{n} k_i\right) \prod_{i=1}^{n} \frac{d\vec{k}_i}{\omega_i}\, G(k_1, k_2, \dots, k_n), \tag{33}$$

где

$$G(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} g(k_i), \quad g(k_i) = \sqrt{\frac{\omega_i - m}{\omega_i + m}}, \quad k_i = \sqrt{\vec{k}_i^2}\,. \qquad (34)$$

При пороговых энергиях формфактор $g(k_i)$ убывает как первая степень k_i, а при возрастании энергии стремится к единице. Отсюда следует:

$$\lim_{p \to \infty} \bar{\Omega}_n(p) = \Omega_n(p). \qquad (35)$$

В заключение приведем выражение для асимптотики мнимой части функции Грина при больших значениях энергии. Для ее вычисления можно использовать формулы (27) и (30в). Заменяя сумму в (27) интегралом и используя метод перевала, получаем:

$$\operatorname{Im} f(p) \approx \text{const}\, \frac{\exp\left\{ 3\left(\kappa \frac{p^2}{4}\right)^{1/3} \right\}}{p^3}\,. \qquad (36)$$

Подобное поведение согласуется с требованиями, предъявляемыми к локальным теориям /11,12/.

Используя формулу (26) и соответствующие асимптотические выражения для шаровых функций, можно убедиться, что реальная часть функции Грина убывает в области больших значений энергии.

§6. Локальные неперенормируемые взаимодействия
(Общий случай)

Общий случай локальных и нелокальных неперенормируемых взаимодействий безмассовых скалярных частиц изучался в работе /3/. Там был разработан унитарный метод построения функции Грина в импульсном пространстве. Проведенные выше исследования позволяют обобщить этот метод на случай локальных неперенормируемых взаимодействий скалярных частиц с массой покоя, отличной от нуля.

В общем случае двухточечную функцию Грина можно записать в форме бесконечного ряда по степеням пропагатора свободной скалярной частицы $\Delta(x)$

$$\tilde{\tilde{F}}_{об}(x) = i \sum_{n=0}^{\infty} c(n) [-ig^2 \Delta(x)]^n , \qquad (37)$$

где коэффициенты $c(n)$ для локальных взаимодействий удовлетворяют условию /11-13/

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c(n)|^{1/n} = 0 . \qquad (38)$$

Исследование вопроса о построении фурье-образа функции (37) начнем опять с предварительного рассмотрения функции $\tilde{\tilde{\Phi}}_{об}(x)$

$$\tilde{\tilde{\Phi}}_{об}(x) = i \sum_{n=0}^{\infty} c(n) [ig^2 \Delta(x)]^n . \qquad (39)$$

Используя приближение (5) и промежуточную регуляризацию, переходим к импульсному пространству:

$$\bar{\phi}^{об}_{\kappa}(p) = i \sum_{n=2}^{\infty} c(n) \kappa^n \int d^4x\, e^{ipx} \left[\frac{\exp(-m\sqrt{-x^2+i\epsilon})}{x^2 - i\epsilon} \right]^n_{рег} . \qquad (40)$$

Рассмотрим нефизическую область $p^2 < 0$. Выберем систему координат, где $p = \{0, \vec{p}\}$. Переходя к евклидовой метрике и интегрируя по углам, получаем

$$\bar{\phi}^{об}_{\kappa}(p) = (2\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|} \sum_{n=0}^{\infty} (-\kappa m^2)^n c(n+2) \int_{\ell}^{\infty} dr\, r^{-2(n+1)} e^{-(n+2)r} J_1 \left(\frac{|p|}{m} r\right). \qquad (41)$$

Здесь ℓ – параметр обрезания.

Теперь, следуя работе /3/, восстановим аналитическую функцию $\chi(z, r)$, регулярную в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ и подчиняющуюся условиям $(z = x + iy)$

$$|\chi(z, r)| < B e^{\Lambda |z|} \quad (\mathrm{Re}\, z > 0,\ \Lambda > 0, B > 0), \qquad (42)$$

$$|\chi(iy, r)| < B e^{(\pi - \epsilon)|y|} \quad (-\infty < y < \infty ,\ \epsilon > 0), \qquad (43)$$

по ее значениям $\chi(n,r)$ в заданной последовательности точек $n=0,1,2,..$:

$$\chi(n,r)=c(n+2)\left[\kappa m^2 \frac{e^{-r}}{r^2}\right]^n . \tag{44}$$

Полученную функцию запишем в виде:

$$\chi(z,r)=c(z+2)\left[\kappa m^2 \frac{e^{-r}}{r^2}\right]^z . \tag{45}$$

С помощью этой функции, используя ее свойства (42) и (43), можно найти для $\bar\phi^{об}_{\kappa}(p)$ следующее интегральное представление:

$$\bar\phi^{об}_{\kappa}(p)=-i2(\pi\kappa)^2 \frac{m}{|p|}\int_{-a+i\infty}^{-a-i\infty} dz\, c(z+2)\frac{(\kappa m^2)^z}{\sin\pi z}\int_{\ell}^{\infty} dr\, r^{-2(z+1)} e^{-(z+2)r} J_1\left(\frac{|p|}{m}r\right). \tag{46}$$

Это представление удобно тем, что позволяет снять промежуточную регуляризацию и положить $\ell=0$.

С другой стороны, условия (42) и (43) обеспечивают однозначное восстановление функции $\chi(z,r)$ по ее значениям $\chi(n,r)$ /15/. Это является весьма важным качеством процедуры перехода от представления (41) к (46).

После снятия промежуточной регуляризации в правой части формулы (46) мы приходим к интегралу, который уже был вычислен ранее (см. (23)). Теперь можно вернуться к интересующей нас функции $\bar f_{об}(p)$, вновь используя формулу (12). Это можно сделать как до, так и после вычисления интеграла по z. В результате получаем для нефизической области $p^2<0$

$$\bar f_{об}(p)=-2(\pi\kappa)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\nu}\Big\{ c(\nu+2)\frac{[\kappa(m^2(2+\nu)^2-p^2)]^{\nu}}{\Gamma(2\nu+1)}\left[1-(2+\nu)^2\frac{m^2}{p^2}\right]^{1/2} P^{-1}_{-2\nu-2}\left[\left(1-\frac{p^2}{m^2(2+\nu)^2}\right)^{-1/2}\right]\Big\}\Big|_{\nu=n} \tag{47}$$

Аналитическое продолжение функции $\bar f_{об}(p)$ по p^2 в область $p^2>0$ проходит совершенно идентично продолжению функций $\bar{\bar f}(p)$ и $\bar f(p)$, рассмотренному в третьем и четвертом параграфах. Поэтому не имеет смысла приводить здесь эти расчеты.

Укажем в заключение, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты $c(n)$, чтобы была обеспечена возможность однозначного восстановления функции $\chi(z,r)$ с требуемыми нам свойствами по ее значениям $\chi(n,r)$. Как показано в работе /3/, это условие можно записать в форме

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^k \,|c(n)|^{1/n} = a(r), \tag{48}$$

где $a(r)$ – некая функция от r, а k удовлетворяет условию

$$0 < k \leq 2. \tag{49}$$

Сравнивая условие (48) с (38), легко убедиться, что рассмотренные здесь неперенормируемые взаимодействия являются локальными.

§7. Заключение

Проведенное исследование является естественным обобщением методов, предложенных ранее автором для описания неперенормируемых взаимодействий безмассовых частиц /1-3/, на случай частиц с отличной от нуля массой покоя. То приближение, которое было использовано при построении функции Грина в импульсном пространстве, наиболее интересно с точки зрения правильного качественного описания поведения функции Грина в различных областях переменной p^2. В то же время при больших значениях энергии получается и хорошее количественное описание функции Грина. При энергиях же, близких к пороговой, результаты получаются несколько заниженными.

Развитый метод применим к описанию довольно широкого класса локальных неперенормируемых взаимодействий элементарных частиц и удовлетворяет требованиям, предъявляемым к теории с унитарной S – матрицей.

В заключение автор благодарит проф. Д.И. Блохинцева за интерес к работе и д-ра Г.В. Ефимова за полезные обсуждения.

Литература

1. М.К. Волков. Яд. физика, 6, 1100 (1967), 7, 445 (1968).
2. M.K.Volkov. Commun. Math. Phys., 7, 289 (1968).
3. M.K.Volkov. Ann. Phys., (N.Y.) 49, 202 (1968).
4. R.Arnowitt and S.Deser. Phys. Rev., 100, 349 (1955).
5. S.Okubo. Nuovo Cim., 19, 574 (1961).
6. W.Guttinger and E.Pfaffelhuber. Nuovo Cim., 52, 389 (1967).
7. T.D.Lee. Preprint CERN Geneva 68/940/5 (1968).
8. A.Erdelyi (Ed.). Higher Transcendental Functions, vol.I, New York–Torento–London, Mc Grow-Hill Book Company Inc., 1953.
9. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, ГИФМЛ, Москва, 1962 г.
10. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957 год.
11. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 (1964).
12. A.M.Jaffe, Ann. Phys., (N.Y.) 32, 127 (1965). Phys. Rev. Letters 17, 661 (1966).
13. Г.В. Ефимов. Commun. Math. Phys., 7, 138 (1968).
14. В.А. Колкунов. ЖЭТФ, 43, 1448 (1962).
15. М.А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, ГИФМЛ, Москва, 1962 год.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1969 года.