СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4377

В.А.Мещеряков, К.В.Рерих

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ В УРАВНЕНИЯХ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4377

В.А.Мещеряков, К.В.Рерих

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ В УРАВНЕНИЯХ ТИПА УРАВНЕНИЙ ЧУ-ЛОУ

1. В в е д е н и е

Как известно[1], проблема нахождения всех решений уравнений типа уравнений Чу-Лоу сводится к решению следующей системы нелинейных функциональных уравнений вида

$$S_i(w)\, S_i\,(1-w) = 1$$
$$S_i(-w) = A_{ij}\; S_j(w) \qquad (1.1)$$

в классе мероморфных действительных функций комплексного переменного w. Здесь $S_i(w)$ - матричные элементы S -матрицы в состояниях j, A_{ij} - элементы матрицы кроссинг-симметрии порядка n со свойствами $A^2 = E$, $\sum_j A_{ij} = 1$, а униформизующаяся переменная w связана с энергией ω налетающей частицы в системе центра масс известным образом: $w = \frac{1}{\pi} \arcsin \omega$. В настоящее время общее решение (1.1) найдено только для двухрядной матрицы[2-4]. Для матрицы кроссинг-симметрии произвольного порядка в[1,5] был развит метод построения некоторого класса решений, для которых любое из отношений $S_i(w)/S_j(w)$ является рациональной функцией w. Однако в[6] показано, что этим классом не исчерпываются все решения (1.1). Для нахождения всех решений (1.1) было бы достаточно знания всех функциональных связей между $(n-1)$ - функциями $x_{ik}(w) = S_i(w)/S_k(w)$, где k фиксировано, а $i \neq k$. Ниже в главе II будет предложен метод нахождения функциональных связей в уравнениях (1.1) с трехрядной матрицей кроссинг-симметрии. Обобщение метода для матрицы произвольного порядка тривиально. В главе III с помощью этого метода найдены все полиномиальные функциональные связи для матрицы $A(1,1)$.

II. Метод нахождения функциональных связей для трехрядной матрицы кроссинг-симметрии

Введем отношения $x(w) = S_1(w)/S_3(w)$ и $y(w)=S_2(w)/S_3(w)$. Если $x(w)$ и $y(w)$ есть рациональные функции w или же рациональные функции от некоторой трансцендентной функции $\xi(w)$, то $x(w)$ и $y(w)$ обязательно связаны функциональной связью вида $P_N(x,y)=0$, где $P_N(x,y)$ есть полином по x и y, а N – максимальная суммарная степень x и y. Доказательство этого утверждения тривиально и проводится алгебраически (см., например, [7] §54). Если же $x(w)$ и $y(w)$ являются сугубо трансцендентными мероморфными функциями, то функциональная связь задается уравнением $P(x,y)=0$, где $P(x,y)$ – некоторая трансцендентная функция x, y.

Поскольку $P(x,y)$ не содержит явно w, то уравнение $P(x,y)=0$ инвариантно относительно замен $w\to -w$ и $w\to 1-w$. Поэтому оно должно быть инвариантно относительно преобразований кроссинга и унитарности (см. (1.1))

$$L_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{A_{11}x+A_{12}y+A_{13}}{A_{31}x+A_{32}y+A_{33}}\\[2ex]\dfrac{A_{21}x+A_{22}y+A_{23}}{A_{31}x+A_{32}y+A_{33}}\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

$$L_I\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_I\\y_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{x}\\[1ex]\dfrac{1}{y}\end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Если эти условия выполнены, то уравнение $P(x,y)=0$ определяет алгебраическую или трансцендентную кривую, инвариантную относительно (2.1) и (2.2). Поскольку точка $x=y=1$ является неподвижной точкой преобразований (2.1) (2.2), то удобнее рассматривать $P(x,y)$ как функцию $u=x-1$ и $v=y-1$.

Тогда преобразования (2.1) и (2.2) для u и v примут вид

$$L_A\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_A\\v_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{(A_{11}-A_{31})u+(A_{12}-A_{32})v}{1+A_{31}u+A_{32}v}\\[2ex]\dfrac{(A_{21}-A_{31})u+(A_{22}-A_{32})v}{1+A_{31}u+A_{32}v}\end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

$$L_I\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_I\\v_I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{u}{1+u}\\[2ex]-\dfrac{v}{1+v}\end{pmatrix} \qquad (2.4)$$

Для того чтобы кривая $P(u,v)$ была инвариантной относительно дискретного преобразования L_A, удовлетворяющего свойству $L_A^2=E$, где E – тождественное преобразование, необходимо и достаточно выполнения уравнений

$$L_A P(u,v) = P(u_A,v_A) = P(u,v)\,C(u,v)$$

$$L_A^2 P(u,v) = P(u_A,v_A)\,C(u_A,v_A) =$$

$$= P(u,v)\,C(u,v)\,C(u_A,v_A) \equiv P(u,v).$$

Из требования инвариантности уравнения $P(u,v)=0$ относительно дискретного преобразования L_I со свойством $L_I^2=E$ аналогично получаем:

$$L_I\, P(u,v) = P(u_I, v_I) = P(u,v)\, g(u,v)$$

$$L_I^2\, P(u,v) = P(u_I,v_I)\, g(u_I,v_I) =$$

$$= P(u,v)\, g(u,v)\, g(u_I,v_I) = P(u,v).$$

Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений для $P(u,v)$:

1. $P(u_A, v_A) = P(u,v)\, C(u,v)$.
2. $C(u_A, v_A)\, C(u,v) = 1$. (2.5)
3. $P(u_I, v_I) = P(u,v)\, g(u,v)$.
4. $g(u_I, v_I)\, g(u,v) = 1$.

Разложим $P(u,v)$, $C(u,v)$ и $g(u,v)$ по однородным полиномам k степени от u и v.

$$P(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} a_{km}\, u^{k-m} v^{m}$$

$$C(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} c_{km}\, u^{k-m} v^{m} \qquad (2.6)$$

$$g(u,v) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} g_{km}\, u^{k-m} v^{m}.$$

Введем обозначения (см. (2.3))

$$A_{11} - A_{31} = b_{11}, \quad A_{12} - A_{32} = b_{12}, \qquad (2.7)$$

$$A_{21} - A_{31} = b_{21}, \quad A_{22} - A_{32} = b_{22},$$

$$A_{31} = d_1, \qquad A_{32} = d_2.$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получим 4 системы рекуррентных алгебраических соотношений на коэффициенты a_{km}, c_{km} и g_{km}:

1. $$\sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=0}^{\ell} a_{\ell q} B_{\ell q}^{km} - \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} a_{\ell q}\, c_{k-\ell,m-q} = 0$$

2. $$\sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} c_{\ell q}\, c'_{k-\ell,m-q} = \delta_{k0}$$

$$c'_{km} = \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=0}^{\ell} a_{\ell q} B_{\ell q}^{km}.$$

(2.8)

3. $$\sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} a_{\ell q} \left((-1)^k C_{k-m-1}^{\ell-q-1} C_{m-1}^{q-1} - g_{k-\ell,m-q}\right) = 0$$

4. $$\sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} g_{\ell q}\, g'_{k-\ell,m-q} = \delta_{k0}$$

$$g'_{km} = (-1)^k \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} g_{\ell q}\, C_{k-m-1}^{\ell-q-1} C_{m-1}^{q-1}.$$

Коэффициенты $B_{\ell q}^{km}$ в (2.8,1) и (2.8.2) определяются формулой:

$$B_{\ell q}^{km} = C_{k-1}^{\ell-1} (-1)^{\ell+k} \sum_{p=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(\ell,m)} C_{k-\ell}^{m-p}\, d_1^{k-m+p-\ell}\, d_2^{m-p}. \qquad (2.9)$$

$$\cdot \sum_{t=\max(0,p-\ell+q)}^{\min(q,p)} b_{11}^{\ell-q-p+t}\, b_{12}^{p-t}\, b_{21}^{q-t}\, b_{22}^{t}\, C_{\ell-q}^{p-t} C_q^{t}.$$

Оставляя пока в стороне вопрос о нахождении функциональных связей $P(u,v)$, являющихся целыми трансцендентными функциями от u и v, остановимся на полиномиальных функциональных связях. Функциональные связи этого класса характеризуются тем, что суммарная степень u и v ограничена числом N, а степени u и v не превосходят чисел m_1 и n_1. В этом случае функции $C(u,v)$ и $g(u,v)$ не нуждаются в построении и они есть соответственно:

$$C(u,v) = \frac{c_{00}}{(1+A_{31}u + A_{32}v)^N}$$

$$g(u,v) = \frac{g_{00}}{(1+u)^{m_1}(1+v)^{n_1}}, \tag{2.10}$$

где константы c_{00} и g_{00} равны ± 1. Коэффициенты c_{km} и g_{km} определяются из формул (2.10):

$$c_{km} = c_{00}(-1)^k C^{N-1}_{k+N-1} C^m_k A^{k-m}_{31} A^m_{32}$$

$$g_{km} = g_{00}(-1)^k C^{k-m}_{k-m+m_1-1} C^m_{m+n_1-1}. \tag{2.11}$$

Проиллюстрируем теперь изложенный метод на примере трехрядной матрицы $A(1,1)$.

III. Нахождение всех полиномиальных функциональных связей для матрицы A(1.1)

Как известно [1], матрица $A(1,1)$ имеет вид:

$$A(1,1) = \begin{matrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{matrix},$$

В соответствии с определением (2.7) имеем:

$$b_{11} = b_{22} = 0 \qquad b_{12} = -3/2, \quad b_{21} = -\frac{2}{3},$$

$$d_1 = \frac{1}{3}, \qquad d_2 = \frac{1}{2}.$$

В этом случае коэффициенты $B^{km}_{\ell q}$ отличны от нуля только для $\max(0, \ell-m) \le q \le \min(\ell, k-m)$ и они равны, согласно (2.9),

$$B^{km}_{\ell q} = (-1)^k C^{\ell-1}_{k-1} C^{m-\ell+q}_{k-\ell} 3^{\ell-q-k+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-q}. \tag{3.1}$$

С учётом (3.1) и (2.11), системы (2.8,1) и (2.8,3) примут более простой вид

$$1. \quad \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,\ell-m)}^{\min(\ell,k-m)} a_{\ell q} C^{\ell-1}_{k-1} C^{m-\ell+q}_{k-\ell} 3^{\ell-q} 2^q -$$
$$- \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} a_{\ell q} c_{00} (-1)^{\ell} C^{N-1}_{k-\ell+N-1} C^{m-q}_{k-\ell} 3^{\ell-q} 2^q = 0. \tag{3.2}$$

$$2. \quad \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{q=\max(0,m+\ell-k)}^{\min(m,\ell)} a_{\ell q} \left(C^{\ell-q-1}_{k-m-1} C^{q-1}_{m-1} - g_{00}(-1)^{\ell} C^{m_1-1}_{k-\ell-m+q+m_1-1} C^{n_1-1}_{m-q+n_1-1}\right) = 0.$$

Выпишем эти уравнения при $k=0$ $(m=0)$:

$$a_{00}(1-c_{00})=0$$

$$a_{00}(1-g_{00})=0.$$

Возможны два варианта

1) $a_{00}\neq 0\ (a_{00}=1)$ и $c_{00}=g_{00}=1$

2) $a_{00}=0.$

Рассмотрим первую возможность

$$a_{00}\neq 0, \quad c_{00}=g_{00}=1.$$

При $k=1$ и $m=0,1$ имеем $(a_{00}=1)$:

$$2a_{11}+3a_{10}=N \qquad \text{из (3.2,1)}$$

$$a_{10}=\frac{1}{2}m_1$$

$$a_{11}=\frac{1}{2}n_1 \qquad \text{из (3.2,2)}$$

Отсюда получаем условие

$$N=n_1+\frac{3}{2}m_1. \tag{3.3}$$

Поскольку N, m_1 и n_1 – целые числа, то m_1 должно быть чётным, а так как $\frac{1}{2}m_1=N-n_1-m_1$ и $n_1+m_1\geq N$, то $m_1=0$. Таким образом, $P(u,v)$ не зависит от u, то есть от x, а отличные от нуля коэффициенты a_{km} есть a_{kk}.

Для определения коэффициентов a_{kk} достаточно рассмотреть (3.2,1) при $m=0$ $(N=n_1)$:

$$\sum_{\ell=1}^{k} a_{\ell\ell}\, 2^{\ell} C_{k-1}^{\ell-1}=C_{k+n_1-1}^{k}. \tag{3.4}$$

Остальные уравнения (3.2,1) и (3.2,2) не дают ничего нового по сравнению с (3.4). Из (3.4) мы получаем $a_{11}=\frac{1}{2}n_1$, $a_{22}=\frac{1}{2^2}C_{n_1}^{2}$, $a_{33}=\frac{1}{2^3}C_{n_1}^{3}$. Предполагая, что для $a_{\ell\ell}=\frac{1}{2^{\ell}}C_{n_1}^{\ell}$ это верно, по индукции доказывается, что это верно и для $a_{\ell+1\,\ell+1}$.

Таким образом, $a_{kk}=\frac{1}{2^k}C_{n_1}^{k}$ для $k\leq n_1$, а для $k>n_1, a_{kk}=0$, и мы приходим к функциональной связи

$$\left(1+\frac{1}{2}v\right)^{n_1}=0, \tag{3.5}$$

или

$$y+1=0.$$

Решения, соответствующие (3.5), были получены в [6]. Перейдем ко второй возможности $a_{00}=0$, в которой следует рассмотреть четыре набора значений c_{00} и g_{00}:

A) $c_{00}=+1,\ g_{00}=-1.$ C) $c_{00}=-1,\ g_{00}=-1$

B) $c_{00}=+1,\ g_{00}=+1.$ D) $c_{00}=-1,\ g_{00}=+1.$

Исследуем вариант A.

Из (3.2.1) при $k=1$ имеем

$$2a_{11}+3a_{10}=0. \tag{3.6}$$

При $k=2$ (3.2.1) с учётом (3.6) дает

$$4a_{22}-9a_{20}+3(N-1)a_{10}=0. \tag{3.7}$$

Система (3.2.2) с учётом (3.6) позволяет выразить a_{2m} через a_{10}:

$$a_{20} = \frac{1}{2}(m_1 - 1)a_{10}$$

$$a_{21} = \frac{1}{4}(2n_1 - 3m_1)a_{10} \qquad (3.8)$$

$$a_{22} = -\frac{3}{4}(n_1 - 1)a_{10}.$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получим ограничение на числа N, n_1 и m_1

$$a_{10}(N - n_1 - \frac{3}{2}m_1 + \frac{3}{2}) = 0. \qquad (3.9)$$

Если $a_{10} \neq 0$, то необходимо, чтобы

$$N = n_1 + \frac{3}{2}m_1 - \frac{3}{2}. \qquad (3.10)$$

Из целочисленности N, n_1 и m_1, неравенства $n_1 + m_1 \geq N$ и условия (3.10) следует, что m_1 может быть равно только 1 или 3. Если $m_1 = 1$, то в полиноме $P(u,v)$ u должно присутствовать максимально в первой степени. Определяя из систем (3.2.1) и (3.2.2) коэффициенты a_{km}, мы получаем, что все a_{km} при $k - m > 1$ равны нулю, как и должно быть, а отличные от нуля коэффициенты $a_{k,k-1}$ и a_{kk} есть ($a_{10} = 1$):

$$a_{k,k-1} = \frac{1}{2^k}\,\frac{(2n_1 - k - 1)}{(n_1 - 1)}\,C^{k-1}_{n_1-1}$$

$$a_{kk} = -\frac{3}{2^k}C^{k-1}_{n_1-1}. \qquad (3.11)$$

При $k > n_1$, $a_{k,k-1}$ и a_{kk} равны нулю.

Подставляя (3.11) в (2.6) и суммируя по k, получим

$$P(u,v) = (u - \frac{3}{2}v + \frac{1}{4}uv - \frac{3}{4}v^2)(1 + \frac{1}{2}v)^{n_1-2}.$$

Отбрасывая ранее полученную функциональную связь $P(u,v) = 1 + \frac{1}{2}v$, мы приходим к функциональной связи

$$P(u,v) = u - \frac{3}{2}v + \frac{1}{4}uv - \frac{3}{4}v^2 = 0,$$

что соответствует

$$xy + 4x - 6y - 3y^2 = 0. \qquad (3.12)$$

Решения, соответствующие (3.12), были получены в /1/.

Рассмотрим вторую возможность $m_1 = 3$, для которой коэффициенты a_{km} при $k - m > 3$ должны быть равны нулю. Не приводя здесь громоздких выкладок, выпишем результат

$$a_{10} = 1, \quad a_{20} = 1, \quad a_{30} = \frac{8}{27},$$

$$a_{40} = 0, \quad a_{50} = -\frac{4}{3^6} \neq 0.$$

Таким образом, эта возможность отпадает. Заметим, что если мы предположим, что все a_{km} до некоторого $k < 2k_0 + 1$ равны нулю, а $a_{2k_0+1,m}$ не равны нулю, то мы придем однозначно к высшим (нечётным) степеням полученной уже функциональной связи (3.12).

Исследование варианта $B(g_{00}=+1, c_{00}=+1)$ дает только чётные степени этой же функциональной связи (3.12) и функциональную связь $P(u,v)=u\cdot v=0$, соответствующую тривиальному решению $S_1(w)=S_2(w)=S_3(w)$. Перейдем к рассмотрению варианта $C(g_{00}=-1, c_{00}=-1)$. Из (3.2.1) при $k=1$ получим

$$2a_{11}-3a_{10}=0. \tag{3.13}$$

При $k=2$ системы (3.2,1) и (3.2,2) с учётом (3.13) дают соответственно

$$4a_{22}+9a_{20}-3(N-1)a_{10}=0$$

$$a_{21}+\frac{1}{2}(N+1)a_{10}=0 \tag{3.14}$$

$$a_{20}=\frac{1}{2}(m_1-1)a_{10}$$

$$a_{21}=\frac{1}{4}(2n_1+3m_1)a_{10} \tag{3.15}$$

$$a_{22}=\frac{3}{4}(n_1-1)a_{10}.$$

Подставляя (3.15) в (3.14), получим, что должны быть выполнены одновременно два соотношения

$$a_{10}(N-n_1-\frac{3}{2}m_1+\frac{3}{2})=0 \tag{3.16}$$

$$a_{10}(N+n_1+\frac{3}{2}m_1+1)=0.$$

Из-за целочисленности N, n_1 и m_1 это возможно только при $a_{10}=0$. Из (3.13) и (3.15) следует, что a_{11} и все a_{2m} также равны нулю. Можно показать, что ввиду несовместимости уравнений (3.2.1) и (3.2.2) при $k=3$ и $k=4$ все a_{3m} и a_{4m} также должны быть равны нулю. Предположим, что все $a_{\ell m}$ для $\ell<2k+1$ равны нулю, а $a_{2k+1,m}\neq 0$. Тогда из (3.2,1) при $k=2k+1$ и $k=2k+2$ получим

$$1.\ a_{2k+1,2k+1-m}=\frac{3^{2k+1-2m}}{2^{2k+1-2m}}a_{2k+1,m} \qquad (0\le m\le k)$$

$$2.\ a_{2k+2,m}\,3^{2k+2-2m}\cdot+a_{2k+2,2k+2-m}\,2^{2k+2-2m}= \tag{3.17}$$

$$=3^{2k+1-2m}(N-2k-1)(a_{2k+1,m}+\frac{3}{2}a_{2k+1,m-1}). \quad (0\le m\le k+1).$$

Из (3.2,2) $a_{2k+2,m}$ выражаются через $a_{2k+1,m}$ следующим образом

$$a_{2k+2,m}=\frac{1}{2}(n_1+1-m)a_{2k+1,m-1}+\frac{1}{2}(m_1+m-2k-1)a_{2k+1,m}. \tag{3.18}$$

В (3.17) при $m=0$ и в (3.18) при $m=0$ и $m=2k+2$ следует положить $a_{2k+1,-1}=0$, $a_{2k+1,2k+2}=0$. Подставляя (3.18) в (3.17,2), с учётом (3.17,1) получим

$$1.\ a_{2k+1,0}\,(N-n_1-\frac{3}{2}m_1+\frac{3}{2}(2k+1))=0$$

$$2.\ \frac{3}{2}a_{2k+1,m-1}\,(N-n_1-\frac{3}{2}m_1-2k-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}m)+ \tag{3.19}$$

$$+a_{2k+1,m}\,(N-n_1-\frac{3}{2}m_1-\frac{5}{2}m+\frac{3}{2}(2k+1))=0 \qquad (1\le m\le k+1).$$

Второе соотношение (3.19) при $m = k+1$ с учётом (3.17,1) дает

$$a_{2k+1,k}\ \left(N-n_1-\frac{3}{2}m_1+\frac{1}{2}k-1\right)=0. \qquad (3.20)$$

Из (3.19,2) все $a_{2k+1,m}$ $(1 \leq m \leq k)$ выражаются через $a_{2k+1,0}$

$$a_{2k+1,m}=a_{2k+1,0}\prod_{r=1}^{m}\left(-\frac{3}{2}\right)^r \frac{\left(N-n_1-\frac{3}{2}m_1-2k-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}r\right)}{\left(N-n_1-\frac{3}{2}m_1+\frac{3}{2}(2k+1)-\frac{5}{2}r\right)}. \qquad (3.21)$$

Выражая $a_{2k+1,k}$ через $a_{2k+1,0}$ и подставляя его в (3.20), получим, что, наряду с (3.19,1) должно быть одновременно выполнено следующее равенство

$$a_{2k+1,0}\ \left(N-n_1-\frac{3}{2}m_1-1+\frac{1}{2}k\right)\prod_{r=1}^{k}\frac{\left(N-n_1-\frac{3}{2}m_1-2k-\frac{7}{2}+\frac{5}{2}r\right)}{\left(N-n_1-\frac{3}{2}m_1+\frac{3}{2}(2k+1)-\frac{5}{2}r\right)}=0. \qquad (3.22)$$

Легко показать, что (3.22) совместно с (3.19,1) только тогда, когда $a_{2k+1,0}=0$. Допустим теперь, что $a_{2k+1,0}=0$, а при некотором $m_0 \leq k$ (см. (3.19,2))

$$N-n_1-\frac{3}{2}m_1-\frac{5}{2}m_0+\frac{3}{2}(2k+1)=0. \qquad (3.23)$$

Тогда все $a_{2k+1,m}$ при $m < m_0$ равны нулю, так как они выражаются через $a_{2k+1,0}$. Предполагая, что a_{2k+1,m_0} может быть не равно нулю, мы выражаем $a_{2k+1,k}$ через a_{2k+1,m_0} аналогично (3.21).

Тогда должны быть выполнены одновременно условия (3.23) и (3.20), что невозможно ни при одном $m_0 \leq k$. Отсюда и из (3.17,1) и (3.18) следует, что все $a_{2k+1,m}$ и $a_{2k+2,m}$ равны нулю.

Таким образом, вариант C дает только тривиальную функциональную связь $P(u,v) = 0$. Исследование варианта D полностью аналогично предыдущему и показывает, что и в этом случае есть только тривиальная связь $P(u,v) = 0$.

Тем самым мы доказали, что кроме двух найденных функциональных связей (3.5) и (3.12) никаких других полиномиальных функциональных связей в уравнениях (1.1) с матрицей $A(1,1)$ не существует.

Литература

1. *В.А.Мещеряков. Препринт ОИЯИ Р-2369, Дубна 1965.*
2. *G.Wanders. Nuovo Cimento 23, 816 (1962).*
3. *T.Rotheluther. Zs.Phys. 177, 287(1964).*
4. *В.А.Мещеряков. ЖЭТФ 52, 648 (1966).*
5. *В.А.Мещеряков. Метод решения статического предела дисперсионных уравнений рассеяния. Докторская диссертация, Дубна 1967.*
6. *В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков, К.В.Рерих. Препринт ОИЯИ Р2-4167, Дубна 1968.*
7. *А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. "Наука", 1968.*

Рукопись поступила в издательский отдел
27 марта 1969 года.