ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4374

Г.В.Ефимов, Ш.З.Сельцер

РАСПАД μ-МЕЗОНА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4374

Г.В.Ефимов, Ш.З.Сельцер

РАСПАД μ-МЕЗОНА В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в ЯФ

§1. Введение

Проблемы, связанные с наличием ультрафиолетовых расходимостей в квантовой теории поля при локальном взаимодействии, являются основными при формулировке последовательной и самосогласованной теории. При так называемых перенормируемых взаимодействиях удалось устранить расходимости, переопределив константу связи и массы частиц. Однако устранение расходимостей в матрице рассеяния методом перенормировок не снимает трудностей теории, так как бесконечности из матричных элементов переходят в лагранжиан взаимодействия /1/ и вся постановка задачи квантовой теории поля с лагранжианом взаимодействия носит поэтому довольно условный характер. Более того, остается большой класс неперенормируемых взаимодействий, где эту программу не удалось осуществить (например, слабые взаимодействия, взаимодействие векторных бозонов с нуклонами и т.д.) Одним из способов устранения расходимостей является введение нелокальности взаимодействия, при этом свободное поле считается локальным. Физической идеей, лежащей в основе этого подхода, является предположение о том, что в малых пространственно-временных областях возможны другие виды причинной связи в отличие от тех, которые характерны для больших масштабов пространства и времени.

В работах /2-6/ была построена нелокальная модель для скалярного поля, удовлетворяющая условиям унитарности и макропричинности. Представляет интерес обобщить эту модель на случай фермионных полей и рассмотреть в ее рамках слабые взаимодействия. Здесь мы ограничимся только лептонными процессами.

§2. Постановка задачи

В качестве лагранжиана слабого взаимодействия мы выбираем общепринятое универсальное $V-A$ взаимодействие. Таким образом,

$$L(x) = L_0(x) + L_{in}(x). \tag{1.1}$$

Здесь $L_0(x)$ - обычный лагранжиан свободных полей, а

$$L_{in}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} j_\omega j^+_\omega ,$$

$$j_\omega = \bar\Psi_e O_\alpha \Psi_{\nu_e} + \bar\Psi_\mu O_\alpha \Psi_{\nu_\mu}, \tag{1.2}$$

$$O_\alpha = \gamma_\alpha (1+\gamma_5),$$

где G - известная константа связи слабого взаимодействия[x/].

Формально S -матрицу можно записать в виде T -произведения:

$$S = T \exp\{ i \int dx\, L_{in}(x)\}. \tag{1.3}$$

[x/] Метрика выбрана следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \vec\sigma \\ -\vec\sigma & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

После разложения S -матрицы по константе связи и перехода к N -произведению операторов поля $\Psi(x)$ появятся хронологические свертки операторов поля $\Psi(x)$. Что будет пониматься под ними? Известно, что пропагатор свободной частицы

$$\overline{\Psi_\alpha(x)\, \bar\Psi_\beta(y)} = <0 \mid T(\Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\beta(y)) \mid 0> \tag{1.4}$$

не определен при совпадающих аргументах x и y. Поэтому в правую часть (1.4) можно добавить любую квазилокальную функцию. Предположим, что справедлива следующая физическая гипотеза.

Принципиально нельзя ничего сказать о поведении частиц на достаточно малых пространственно-временных расстояниях.

Это означает, что в правую часть (1.4) можно добавить обобщенную функцию $K_{\alpha\beta}(x-y)$ из подходящего класса нелокальных функций, рассмотренных в[5,6]. Итак, постулируем, что

$$S^c_{r\,\alpha\beta} = i <0 \mid T(\Psi_\alpha(x)\bar\Psi_\beta(y)) \mid 0> + K_{\alpha\beta}(x-y). \tag{1.5}$$

Таким образом, добавление в пропагатор нелокальной обобщенной функции означает, что в схеме построения S -матрицы по теории возмущений в методе Боголюбова[1] возникает произвол при определении радиационных операторов при совпадающих аргументах, когда сама теория считается нелокальной. Этот произвол существует для всех радиационных операторов во всех порядках теории возмущений, однако для устранения ультрафиолетовых расходимостей при сохранении унитарности теории достаточно провести изменение лишь в пропагаторе свободной частицы. В этом состоит дополнительный постулат теории. Выбор $K_{\alpha\beta}(x-y)$ мы конкретизируем несколько позднее после перехода к евклидовой метрике. В импульсном пространстве получим:

$$S_r^c(p) = \frac{m+\gamma p}{m^2-p^2-i\epsilon} + [\,A(-p^2,m^2) + \gamma p\, B(-p^2,m^2)\,] =$$

$$= \frac{V_1(-p^2,m^2)\,m + \gamma p\, V_2(-p^2,m^2)}{m^2-p^2-i\epsilon}, \qquad (1.6)$$

$$V_j(-m^2,m^2) = 1.$$

Как показано в /5,6/, можно так подобрать операторы $K_{\alpha\beta}(x-y)$, чтобы функции $V_j(-p^2,m^2)$ играли роль обрезающего формфактора в ряду теории возмущений, т.е. чтобы сходились интегралы, соответствующие любым графам Фейнмана, и были выполнены требования унитарности и макропричинности, накладываемые на S-матрицу теории.

В рамках этой теории нами будут получены поправки к времени жизни μ-мезона и к энергетическому спектру электронов при μ-распаде во втором порядке теории возмущений.

§3. Второй порядок теории возмущений

При вычислении поправок второго порядка теории возмущений в слабых взаимодействиях возникает задача определения так называемой фермионной петли, соответствующей диаграмме Фейнмана, показанной на рис. 1.

Рис. 1.

В рамках нелокальной теории амплитуда, соответствующая этой диаграмме, является хорошо определенной величиной. Вычислим ее. Обозначим

через p сумму внешних импульсов, входящих в точку. Тогда соответствующая этой диаграмме амплитуда описывается следующим интегралом:

$$\Pi(p) = i\int e^{ipx}\, S_r^c(x, m_1) \otimes S_r^c(-x, m_2)\, dx, \qquad (3.1)$$

где $\otimes$ - знак прямого произведения.

Существенной чертой нелокальной теории является необходимость рассматривать ее в так называемой евклидовой формулировке /4-8/. Как показано в /5,6/, формфакторы $V(-p^2)$ должны быть целыми функциями порядка $\frac{1}{2} \le \rho < 1$ и должны убывать при $\mathrm{Re}\, p^2 \to -\infty$, как $V(-p^2) = O\left(\frac{1}{(p^2)^\sigma}\right), \sigma \ge \frac{3}{2}$. Для удобства будем считать, что импульс, от которого зависит $\Pi(p)$, пространственноподобный. Существует регуляризационная процедура /4/, которая делает (3.1) сходящимся. Она позволяет перейти к евклидовой метрике. При этом после несобственного предельного перехода получим сходящееся выражение для $\Pi(p)$:

$$\Pi(q) = -\int e^{-iqx}\, S^c_{r_e}(x) \times S^c_{r_e}(-x)\, dx, \qquad (3.2)$$

где q - евклидов вектор, связанный с p соотношением

$$p^2 = -q^2 \quad (p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2},\ q^2 = q_4^2 + \vec{q}^{\,2}),$$

$$\frac{1}{i} S^c_{r_e}(x,m) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, e^{ikx}\, \frac{V_1(k^2,m^2)\,m + i\gamma k\, V_2(k^2,m^2)}{m^2+k^2}. \qquad (3.3)$$

Здесь γ - матрицы эрмитовы и подчиняются соотношению
$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, $\gamma k = \vec{\gamma}\vec{k} + \gamma_4 k_4$, $\vec{\gamma} = i\begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_4 = \gamma_0$.

Как показано в /6/, измененный согласно формулам (1.5) и (1.6) фермионный пропагатор $S^c_{r_e}(x)$ в евклидовом x– пространстве записывается следующим образом:

$$S^c_{r_e}(x) = [V_1(\frac{x^2}{\ell^2})m - V_2(\frac{x^2}{\ell^2})\hat{\partial}]\, D^c_e(x), \tag{3.4}$$

где V_j – некоторые функции, ℓ – элементарная длина, характеризующая нелокальность. Мы рассматриваем случай, когда $V_1 = V_2$, т.е.

$$S^c_{r_e}(x) = v(\frac{x^2}{\ell^2})S^c_e(x), \tag{3.5}$$

где

$$\frac{1}{i}S_e(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\, e^{-ikx}\frac{m + i\gamma k}{m^2 + k^2}, \tag{3.6}$$

$$v(t) = \begin{cases} O(t^{\sigma}) & t \to 0, \quad \sigma \geq \frac{3}{2}, \\ 1 - O(e^{-G(\sqrt{x})}) & t \to \infty, \end{cases} \tag{3.7}$$

а $G(\sqrt{t}) = \max\limits_{a>0}(\sqrt{t}\sqrt{a} - h(a))$, где $h(a)$ – точный порядок функции $V(k^2)$. Наиболее простые формулы получаются при простейшем выборе функции $v(\frac{x^2}{\ell^2})$:

$$v(\frac{x^2}{\ell^2}) = \theta(1 - \frac{\ell^2}{x^2}), \qquad \theta(t) = \begin{cases} 1 & t > 0, \\ 0 & t < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

В этом случае

$$V_1(k^2, m^2) = \frac{m^2\ell^2}{2}[J_2(k\ell)K_0(m\ell) + K_2(m\ell)J_0(k\ell)],$$
$$\tag{3.9}$$
$$V_2(k^2, m^2) = \frac{m^3\ell^2}{4k}[J_3(k\ell)K_1(m\ell) + K_3(m\ell)J_1(k\ell)].$$

Здесь

$$k = \sqrt{k^2}, \quad V_j(-m^2, m^2) = 1.$$

Согласно (3.5), (3.2) можно переписать в виде

$$\Pi_{\alpha\beta,\mu\nu}(q) = -\int e^{-iqx}\, v^2(\frac{x^2}{\ell^2})S^c_{e\,\alpha\beta}(x, m_1)S^c_{e\,\mu\nu}(-x, m_2). \tag{3.10}$$

Предположим, что функция $v^2(\frac{x^2}{\ell^2})$ обладает интегрируемой производной, тогда для нее можно написать следующее представление:

$$v^2(\frac{x^2}{\ell^2}) = \frac{2}{\ell^2}\int_0^\infty dy^2\,\theta(1 - \frac{y^2}{x^2})\, v(\frac{y^2}{\ell^2})\, v'(\frac{y^2}{\ell^2}) = \tag{3.11}$$
$$= \frac{2}{\ell^2}\int_0^\infty dy^2\,\theta(1 - \frac{y^2}{x^2})\, f(\frac{y^2}{\ell^2}),$$

где $f(\frac{y^2}{\ell^2})$ обладает следующими свойствами:

$$f(x) = \begin{cases} O(x^{2\sigma - 1}) & \text{при } x \to 0, \\ O(e^{-G(\sqrt{x})}) & \text{при } x \to \infty. \end{cases} \tag{3.12}$$

Подставив тождество (3.13)

$$S_e^c(x) \otimes S_e^c(-x) = \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} dm^2\, \Omega_2(m^2)[\, m_1 \otimes m_2 + m_1 \otimes \hat{\partial} A_2(m^2) - A_1(m^2)\hat{\partial} \otimes m_2 - \tag{3.13}$$

$$- C(m^2)\, \hat{\partial} \otimes \hat{\partial} - B(m^2)m^2\, \gamma^{\mu} \otimes \gamma^{\mu}\,]\Delta_m^c(x),$$

где

$$\Delta_m^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{m^2 + k^2}\, dk = \frac{m}{(2\pi)^2} \frac{K_1(m\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}}, \tag{3.14}$$

$$\Omega_2(m^2) = \frac{\pi\sqrt{\lambda(m^2, m_1^2, m_2^2)}}{2m^2(2\pi)^3}, \quad \lambda(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 2z_1 z_2 - 2z_1 z_3 - 2z_2 z_3, \tag{3.15}$$

$$A_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m^2}, \quad A_2 = \frac{m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m^2}, \quad B = \frac{\lambda(m^2, m_1^2, m_2^2)}{12 m^4},$$

$$C = \frac{1}{3}\left[\frac{m^4 - (m_1^2 - m_2^2)^2}{m^4} - \frac{m^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m^2}\right], \tag{3.16}$$

и (3.4) в (3.10), проинтегрировав по x и аналитически продолжившись в область $p^2 > 0$, получим

$$\Pi(p) = I \otimes I\, D_1 + \gamma^{\mu} \otimes \gamma^{\mu}\, D_2 + \frac{\hat{p} \otimes \hat{p}}{p^2} D_3 + I \otimes \frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} D_4 + \frac{\hat{p}}{\sqrt{p^2}} \otimes I\, D_5, \tag{3.17}$$

$$D_1 = m_1 m_2 \int_0^{\infty} dy^2\, \frac{y^2}{\ell^2} f\left(\frac{y^2}{\ell^2}\right) \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} dm^2\, \frac{\Omega_2(m^2)\, m^2}{m^2 - p^2 - i\epsilon}\, \mathcal{J}_0,$$

(3.17)

$$D_2 = \int_0^{\infty} dy^2\, \frac{y^2}{\ell^2} f\left(\frac{y^2}{\ell^2}\right) \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} dm^2\, \frac{\Omega_2(m^2)\, m^4}{m^2 - p^2 - i\epsilon} \left[\frac{C}{12} \mathcal{J}_2 - \left(B + \frac{C}{4}\right)\mathcal{J}_0\right],$$

$$D_3 = -\int_0^{\infty} dy^2\, \frac{y^2}{\ell^2} f\left(\frac{y^2}{\ell^2}\right) \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} dm^2\, \frac{\Omega_2(m^2)\, m^4}{3(m^2 - p^2 - i\epsilon)}\, C\, \mathcal{J}_2,$$

$$D_{4,5} = \pm \frac{m_{1,2}}{2} \int_0^{\infty} dy^2\, \frac{y^2}{\ell^2} f\left(\frac{y^2}{\ell^2}\right) \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} dm^2\, \frac{\Omega_2(m^2)\, m^3}{m^2 - p^2 - i\epsilon}\, A_{2,1}\, \mathcal{J}_1, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{J}_n = I_{n+2}(py)\, K_n(my) - I_n(py)\, K_{n+2}(my).$$

Из (3.18) видно, что коэффициенты D_j – аналитические функции от p^2 с разрезом на действительной оси, начинающимся в точке $p^2 = (m_1 + m_2)^2$ и уходящим в положительную бесконечность. При стремлении $\ell \to 0$ наиболее сильно будут расходиться D_1 и D_2, как $\frac{1}{\ell^2}$ (см. приложение), D_4 и D_5 будут расходиться линейно, а D_3 – логарифмически по ℓ.

Выражение (3.17) для петли можно использовать в произвольной четырехфермионной теории. В случае слабых взаимодействий оно заметно упростится: первый и два последних членов выпадут. Если ограничиться диаграммами, в которых есть нейтринный пропагатор, то в результате получим следующую формулу для $\Pi(p)$:

$$\Pi(p) = \gamma^{\mu} \otimes \gamma^{\mu}\, M(p^2) + \frac{\hat{p} \otimes \hat{p}}{p^2} N(p^2), \tag{3.19}$$

где

$$M(p^2) = \frac{m^2}{32(2\pi)^2 \ell_m^2} \int_0^\infty dy\, y\, f\left(\frac{y}{\ell_m^2}\right) \int_1^\infty \frac{dx}{x - p_m^2 - i\varepsilon} \{ (x-1)^2 [I_0(p_m\sqrt{y})K_2(\sqrt{xy}) - \tag{3.20}$$

$$- K_0(\sqrt{xy}) I_2(p_m\sqrt{y})] + \frac{(x-1)^2(x+2)}{9x} [I_4(p_m\sqrt{y})K_2(\sqrt{xy}) - K_4(\sqrt{xy}) I_2(p_m\sqrt{y})]\},$$

$$N(p^2) = \frac{m^2}{72(2\pi)^2 \ell_m^2} \int_0^\infty dy\, y\, f\left(\frac{y}{\ell_m^2}\right) \int_1^\infty dx \frac{(x-1)^2(x+2)}{x - p_m^2 - i\varepsilon} \times \tag{3.21}$$

$$\times [I_2(p_m\sqrt{y})K_4(\sqrt{xy}) - K_2(\sqrt{xy}) I_4(p_m\sqrt{y})].$$

Интегралы записаны в безразмерных единицах, а $\ell_m = \ell \cdot m$ и $p_m = \frac{\sqrt{p^2}}{m}$. Вычисление (см. приложение) $M(p^2)$ и $N(p^2)$ в предположении малых $\ell_m (\ell_m \ll 1)$ дает при $p^2 < m^2$

$$M(p^2) = \frac{m^2}{16(2\pi)^2}\left[\frac{8F(-1)}{\ell_m^2} + \left(1 - \frac{p_m^2}{3}\right) \ln \ell_m^2 + 2\left(1 - \frac{p_m^2}{3}\right) F'(0) - 2 + \right. \tag{3.22}$$

$$\left. + p_m^2 + \frac{1}{3p_m^2} + \frac{2p_m^4 - 3p_m^2 + \frac{1}{p_m^2}}{3p_m^2} \ln(1 - p_m^2) \right),$$

$$N(p^2) = \frac{m^2}{24(2\pi)^2}\left[-p_m^2 \ln \ell_n^2 + 2p_m^2(1 - F'(0)) + 2 - \frac{2}{p_m^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{p_m^4 - 3 + \frac{2}{p_m^2}}{3p_m^2} \ln(1 - p_m^2) \right),$$

где

$$F(a) = \int_0^\infty dy\, f(y)\, y^a . \tag{3.23}$$

Заметим, что, хотя величины $F(a)$, входящие в (3.22) и (3.23), и зависят от конкретного выбора формфактора, но все они порядка единицы. Действительно, согласно (3.12), функция $f(\frac{x^2}{\ell^2})$ быстро убывает с ростом x^2 на расстояниях порядка элементарной длины ℓ^2, т.е. при $t = \frac{x^2}{\ell^2} \gtrsim 1$. Поэтому для $a > -3$, но не очень больших, имеем

$$F(a) \approx \int_0^1 dt\, t^a f(t) \approx \int_0^1 dt\, t^a O(t^{2\sigma - 1}) \approx O(1).$$

Функции M и N легко аналитически продолжить в область $p^2 > m^2$. При этом надо помнить, что физическая амплитуда является значением аналитической функции на верхнем берегу разреза в плоскости p^2. Мнимые части функций $M(p^2)$ и $N(p^2)$ оказываются равными:

$$\mathrm{Im}\, M = \frac{(p^2 - m^2)^3}{192\pi p^4}, \quad \mathrm{Im}\, N = \frac{(p^2 - m^2)^2 (p^2 + 2m^2)}{96\pi p^4} . \tag{3.24}$$

Как видно из (3.17) и (3.18), главная расходимость, которая появится при $\ell^2 \to 0$, находится в коэффициенте M.

§3. Распад μ - мезона

Здесь мы рассмотрим распад μ -мезона

$$\mu \to e + \nu_\mu + \tilde{\nu}_e ,$$

вычислим энергетический спектр электронов во втором порядке теории возмущений и оценим верхнюю границу элементарной длины характеризующей нелокальность взаимодействия. Диаграммы, соответствующие μ -распаду, будут иметь вид

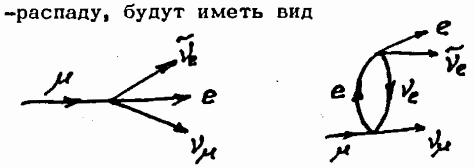

Рис. 2.

Введем следующие обозначения импульсов частиц: p – импульс μ -мезона, k_1 – импульс электрона, k_2 – электронного антинейтрино, k_3 – импульс мюонного нейтрино, $k = k_1 + k_2 = p - k_3$. Очевидно, $k^2 < m_\mu^2$. Матричный элемент, соответствующий распаду, запишется следующим образом:

$$M = \delta(p-k_1-k_2-k_3)\frac{i}{(2\pi)^2}\Big\{\frac{G}{\sqrt{2}}(\bar{v}_e O_\alpha v_\mu)(\bar{v}_{\nu_\mu} O_\alpha v_{\tilde{\nu}_e}) + \tag{4.1}$$

$$+\frac{G}{2}(\bar{v}_e O_\alpha v_\mu)(\bar{v}_{\nu_\mu} O_\beta v_{\tilde{\nu}_e})[O^\alpha_{\mu\nu}\Pi_{\nu\rho,\sigma\mu}(k,m_e)O^\beta_{\rho\sigma} + O^\alpha_{\mu\nu}\Pi_{\nu\rho,\sigma\mu}(k,m_\mu)O^\beta_{\rho\sigma}.$$

Взяв шпуры, окончательно получим:

$$M = \delta(p-k_1-k_2-k_3)\frac{i}{(2\pi)^2}\Big[\frac{G}{\sqrt{2}}f_{1\alpha\alpha} + \frac{G^2}{\sqrt{2}}f_{1\alpha\beta}f_{2\alpha\beta}\Big], \tag{4.2}$$

где

$$f_{1\alpha\beta} = (\bar{v}^+_e\ O_\alpha v^-_\mu)(\bar{v}^+_{\nu_\mu}\ O_\beta v^+_{\nu_e}), \tag{4.3}$$

$$f_{2\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}f_2^{(1)} + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}f_2^{(2)} = g_{\alpha\beta}\{-16[M(k^2,m_e^2)+M(k^2,m_\mu^2)] -$$

$$-8[N(k^2,m_e^2)+N(k^2,m_\mu^2)]\} + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}16[N(k^2,m_e^2) + N(k^2,m_\mu^2)]. \tag{4.4}$$

Здесь и далее будем пренебрегать массой электрона по сравнению с его энергией, т.е. везде будем считать ее (массу) равной нулю. При вычислении вероятности распада просуммируем по спинам электрона и нейтрино и усредним по спину мюона. Итак,

$$dW = \frac{\delta(p-k_1-k_2-k_3)}{(2\pi)^5}d\vec{k}_1\,d\vec{k}_2\,d\vec{k}_3\Big\{G^2\sum_s|f_{1\alpha\alpha}|^2 +$$

$$+\frac{G^3}{2\sqrt{2}}\Big[\mathrm{Re}\,f_2^{(1)}\sum_s|f_{1\alpha\alpha}|^2 + \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\mathrm{Re}\big(f_2^{(2)}\Sigma f_{1\alpha\beta}f^*_{1\sigma\sigma}\big)\Big], \tag{4.5}$$

или

$$dW = \frac{\delta(p-k_1-k_2-k_3)d\vec{k}_1\,d\vec{k}_2\,d\vec{k}_3}{(2\pi)^5 k_{10}k_{20}k_{30}p_0}\Big\{G^2\,4(k_1k_3)(pk_2) +$$

$$+\frac{G^3}{\sqrt{2}(2\pi)^2}\Big[8(k_1k_3)(pk_2)m_\mu^2\Big(-\frac{16F(-1)}{\ell_\mu^2} + \big(\tfrac{4}{3}k_\mu^2-1\big)\ln\ell_\mu^2 + 2 - 2F'(0) + k_\mu^2\big(-3-\frac{2F'(0)}{3}\big)$$

$$+\frac{8}{3}\Big(-\ln\ell_\mu^2 + 1{,}6 - 2F'(0) - \frac{\ln k_\mu^2}{2} + \frac{k_\mu^2}{4} + O(k_\mu^4)\Big)\big(m_\mu^2k^2(kk_1) - 2m_\mu^2(kk_1)^2 + \tag{4.6}$$

$$+4(pk_1)(pk)(kk_1) - 2k^2(pk_1)^2 - 2k^2(pk)(kk_1)\big) + O(\ell_\mu^2\ln\ell_\mu^2)\Big]\Big\}.$$

Проделав необходимые интегрирования, получим спектр электронов распада, не зависящий от спина мюона:

$$W(\epsilon)d\epsilon \cong \frac{G^2m_\mu^5}{12(2\pi)^3}\Big\{\epsilon^2(3-2\epsilon) + \frac{6Gm_\mu^2}{\sqrt{2}(2\pi)^4}\Big[-\frac{16F(-1)}{\ell_\mu^2}\epsilon^2(3-2\epsilon) + \tag{4.7}$$

$$+\frac{\ln\ell_\mu^2}{9}(-9\epsilon^2+8\epsilon^3+3\epsilon^4) + \epsilon^2(2-F'(0)) + \epsilon^3\big(\frac{7}{6}-\frac{4}{3}F'(0)\big) + \epsilon^4\frac{4}{3}F'(0) +$$

$$+O(\epsilon^2\ln\epsilon)\Big]\Big\}d\epsilon,$$

где $\epsilon = 2k_{10}/m_\mu$ – отношение энергии электрона k_{10} к его максимально возможной энергии $m_\mu/2$. Параметр G, входящий в лагранжиан взаимодействия, не является физической константой связи. Дело в следующем[9]. На опыте мы измеряем некоторые физические величины. Назовем эти величины условно сечениями и обозначим через $\sigma_A, \sigma_Б, \sigma_В, \ldots$. Цель теории состоит в том, чтобы предсказать результаты опытов Б, В..., если опыт А дал сечение σ_A. С другой стороны, зная лагранжиан взаимодействия L_{in}, можно вычислить величины σ_j чисто математически. В результате подсчётов получим в теории возмущений:

$$\sigma_A = \sigma_A(g, m, \epsilon) = \sum_{k=n_A}^{\infty} G^k \sigma_k^A(m, \epsilon), \tag{4.8}$$

$$\sigma_Б = \sigma_Б(G, m, \epsilon) = \sum_{k=n_Б}^{\infty} G^k \sigma_k^Б(m, \epsilon),$$

....

где через ϵ обозначены энергетические и другие переменные, от которых может зависеть сечение. В рассматриваемой нелокальной теории все величины $\sigma_A, \sigma_Б, \sigma_В, \ldots$ даются в виде рядов (4.8) по параметру G, причем каждый член ряда конечен. Физическая константа связи находится из опыта, однако совершенно неясно, из каких опытов надо ее определять. Мы можем по определению считать, что физическая константа такова, что в опыте А при определенных значениях переменных $\epsilon = \epsilon_0$ измеряемая величина σ_A равна

$$\sigma_A = G_r^{n_A} = \sum_{k=n_A}^{\infty} G^k \sigma_k^A(m, \epsilon_0). \tag{4.9}$$

Следовательно, формула (4.9) является определением физической константы связи G_r. Из (4.9) по теории возмущений можно найти:

$$G = \sum_{k=1}^{\infty} G_r^k a_k(m, \epsilon_0). \tag{4.10}$$

Подставляя затем (4.10) в (4.8), получим:

$$\sigma_A = \sum_{k=n_A}^{\infty} G_r^k \tilde{\sigma}_k^A(m, \epsilon, \epsilon_0), \tag{4.11}$$

$$\sigma_Б = \sum_{k=n_Б}^{\infty} G_r^k \tilde{\sigma}_k^Б(m, \epsilon, \epsilon_0),$$

....

Исходя из вышесказанного, по определению будем считать, что физическая константа связи слабых взаимодействий такова, что полная вероятность распада μ-мезона определяется только ею:

$$W = \frac{G_r^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \tag{4.12}$$

Следует еще раз подчеркнуть, что проводимая нами перенормировка никак не связана с проблемой устранения ультрафиолетовых расходимостей, существующих в обычных неперенормируемых теориях, а является просто процедурой перехода от нефизических параметров, которыми характеризуется лагранжиан взаимодействия, к реальным физическим константам, которые реально измеряются на опыте. После такой перенормировки перенормированные амплитуды в пределе $\ell \to 0$, конечно, расходятся. Это означает, что элементарная длина ℓ, как и G_r, также является физическим параметром, который может быть измерен в тех или иных экспериментах. Сравнение с полученной вероятностью

$$W = \frac{G^2 m_\mu^5}{24(2\pi)^3} + \frac{G^3 m_\mu^7}{18\sqrt{2}(2\pi)^5}\left[-\frac{8F(-1)}{\ell_\mu^2} - 0{,}4\ln\ell_\mu^2 + 9 - 3{,}6F'(0)\right] \tag{4.13}$$

дает связь между затравочной константой G и перенормированной G_r:

$$G = G_r - G_r^2 \frac{m_\mu^2}{3\sqrt{2}(2\pi)^2}\left[-\frac{16F(-1)}{\ell_\mu^2} - 0{,}8\ln \ell_\mu^2 + 18 - 7{,}2F'(0)\right]. \tag{4.14}$$

Заметим, что связь между G_r и G конечна в нелокальной теории. Подставляя (4.14) в (4.7), находим:

$$W(\epsilon)d\epsilon = W d\epsilon\{2\epsilon^2(3-2\epsilon) + \frac{4G_r m_\mu^2}{3\sqrt{2}(2\pi)^2}\ln \ell_\mu^2(-6{,}6\epsilon^2 + 6{,}4\epsilon^2 +$$

$$+ 3\epsilon^4 + \frac{12G_r m_\mu^2}{\sqrt{2}(2\pi)^2}[\epsilon^2(1{,}4F'(0)-4) + \epsilon^3(5\frac{1}{6} - 3F'(0)) + \tag{4.15}$$

$$+ \epsilon^4 \frac{4}{3}F'(0) + O(\epsilon^2 \ln\epsilon)]\}.$$

Из эксперимента известно, что вероятность распада мюона

$$W_э = W + \Delta W = 10^6\left(\frac{1}{2.2} \pm \frac{2\cdot 10^{-3}}{4.8}\right) \text{ сек}^{-1}.$$

Из условия, что первый член в (4.15) верно описывает спектр, следует, что поправка должна быть меньше относительной ошибки $\frac{\Delta W}{W} \cong 10^{-3}$. Это дает

$$\frac{1}{\ell} \le m_\mu \cdot 10^{10^5}, \quad \ell \ge 2.10^{-13}.10^{-10^5} \text{ см.} \tag{4.16}$$

Полученная оценка говорит о том, что высшие поправки к спектру электронов в μ -распаде ничтожно малы вплоть до очень малых значений элементарной длины ℓ. Важно подчеркнуть, что этот результат получен после проведения перенормировки константы связи. Нам представляется, что

такая перенормировка должна быть произведена, поскольку на эксперименте мы измеряем G_r, а не G. В случае обычной оценки /10/ для $\ell \approx \frac{1}{300 \text{ Гэв}}$ поправка к спектру будет порядка 10^{-7} от первого члена в (4.15).

Приложение

Найдем, например, коэффициент $M(k^2, m_\mu)$ для $k^2 < m_\mu^2$, вид которого:

$$M(k^2, m_\mu^2) = \frac{m_\mu^2}{32(2\pi)^2\ell_\mu^2}\int_0^\infty dy\, y\, f\left(\frac{y}{\ell_\mu^2}\right)\int_1^\infty dx\left\{\frac{(x-1)^2}{x-k_\mu^2}[I_0(k_\mu\sqrt{y})K_2(\sqrt{xy}) - \right. \tag{П.1}$$

$$\left. - K_0(\sqrt{xy})I_2(k_\mu\sqrt{y})] + \frac{(x-1)^2(x+2)}{9(x-k_\mu^2)x}(I_4K_2 - I_2K_4)\right\}.$$

Вычислим эти интегралы в виде ряда по степеням ℓ^2, воспользовавшись следующим представлением для функции Мак-Дональда $K_n(x)$:

$$K_n(x) = \frac{(-)^n\pi}{4i}\int_{-\alpha_n-i\infty}^{-\alpha_n+i\infty}\frac{dz\left(\frac{x}{2}\right)^{2z+n}}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+n+1)\sin^2\pi z}, \tag{П.2}$$

$$-(n+1) < -\alpha_n < -n$$

Рассмотрим

$$J_2 = \int_0^\infty dy\, y\, f(y/\ell_\mu^2)\int_1^\infty dx\frac{(x-1)^2}{x-k_\mu^2}I_0(k_\mu\sqrt{y})K_2(\sqrt{xy}) = \tag{П.3}$$

$$= \int_0^\infty dy\, y\, f(y/\ell^2)\int_1^\infty dx\left[x + k_\mu^2 - 2 + \frac{(k_\mu^2-1)^2}{x-k_\mu^2}\right]I_0(k_\mu\sqrt{y})K_2(\sqrt{xy}).$$

При помощи просто выводимой формулы

$$\int\limits_u^\infty K_{2n}(\mu\sqrt{x})\,x^{m} = \sum_{j=0}^{m+n} \frac{(m+n)!}{j!}\,\frac{u^{\frac{m-n+j+1}{2}}\,2^{m+n-j+1}}{\mu^{m+n-j+1}}\,K_{m-n-j+1}(\mu\sqrt{u}) \qquad (\Pi.4)$$

находим:

$$J_2 = \int\limits_0^\infty dy\, y f(y/\ell_\mu^2)\, I_0(k_\mu\sqrt{y})\Big[\frac{2}{\sqrt{y}}K_3(\sqrt{y}) + (k_\mu^2-2)\frac{4}{y}K_0(\sqrt{y}) +$$

$$+\frac{k_\mu^2(k_\mu^2-1)\pi}{4i}\int\limits_{C_2}\frac{\left(\frac{y}{4}\right)^{z+1}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{k^{2m}}{z-m}\,dz}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+3)\sin^2\pi z} + \frac{2}{\sqrt{y}}K_1(\sqrt{y})(k_\mu^4-k_\mu^2-1)\Big] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{k_\mu\ell_\mu}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2}\Big\{\frac{\pi\ell_\mu^3}{2i}\int\limits_{C_3}\frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^{2z+3}F(z+n+2)\,dz}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+4)\sin^2\pi z} + \qquad (\Pi.5)$$

$$+\frac{k_\mu^2(k_\mu^2-1)\pi\ell_\mu^2}{4i}\int\limits_{C_2}\frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^{2z+2}F(z+n+2)\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{k^{2m}}{z-m}}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+3)\sin^2\pi z} + \frac{\pi(k_\mu^4-k_\mu^2-1)\,\ell_\mu^3}{2i}\int\limits_{C_1}\frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^{2z+1}F(z+n+1)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)\sin^2\pi z} -$$

$$-\frac{(k_\mu^2-2)\pi\ell_\mu^2}{i}\int\limits_{C_0}\frac{\left(\frac{\ell}{2}\right)^{2z}F(z+n)\,dz}{\Gamma^2(z+1)\sin^2\pi z},$$

где функция

$$F(z+n+p) = \int\limits_0^\infty dy\, f(y)\,y^{z+n+p}, \quad n \geq 0,\; p \geq 0,\; \operatorname{Re} z \geq 1, \qquad (\Pi.6)$$

является аналитической в плоскости и имеет полюса в точках $z = -(n + p + 2\sigma + m)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $2F(0) = 1$. Контур C_n показан на рис. 3.

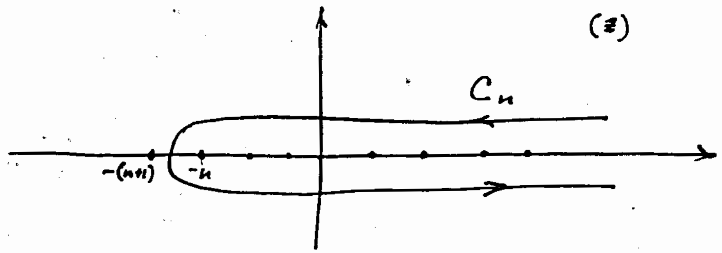

Рис. 3

Взяв вычеты, получаем в предположении, что $\ell_\mu \ll 1$,

$$J_2 = 16F(-1) + \ell_\mu^2\ln\ell_\mu^2 + \ell_\mu^2\Big[\frac{(k_\mu^2-1)}{k_\mu^2}\ln(1-k_\mu^2) - 3{,}4 + \qquad (\Pi.7)$$

$$+3{,}2k_\mu^2 + 2F'(0)(2-k_\mu^2)\Big] + O(\ell_\mu^4\ln\ell_\mu^2).$$

Для других интегралов находим:

$$J_0 = \int\limits_0^\infty dy\, y f(y/\ell_\mu^2)\, I_2(k_\mu\sqrt{y})\int\limits_1^\infty dx\,\frac{(x-1)^2}{x-k_\mu^2}K_0(\sqrt{xy}) = \frac{k_\mu^2\ell_\mu^2}{2} + O(\ell_\mu^4\ln\ell_\mu^2),$$

$$J_4 = \int\limits_0^\infty dy\, y f(y/\ell_\mu^2)\, I_2(k_\mu\sqrt{y})\int\limits_1^\infty dx\,\frac{(x-1)^2}{x-k_\mu^2}K_4(\sqrt{xy}) =$$

$$= k_\mu^2\ell_\mu^2\Big[-3\ln\ell_\mu^2 + 6 - 6F'(0) + 6/k_\mu^2 - 6/k_\mu^4 - \frac{3(k^4-3+\frac{2}{k\mu})}{k_\mu^4}\ln(1-k_\mu^2) + \qquad (\Pi.8)$$

$$+ O(\ell_\mu^4\ln\ell_\mu^2),$$

$$J = \int\limits_0^\infty dy\, y f(y/\ell_\mu^2)\, I_4(k_\mu\sqrt{y})\int\limits_1^\infty dx\,\frac{(x-1)^2}{x-k_\mu^2}K_2(\sqrt{xy}) = O(\ell_\mu^4).$$

Подставляя (П.7) и (П.8) в (П.1), получим (3.22). Таким же образом можно найти $N(k^2, m_\mu^2)$ при любых k^2.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957.
2. Г.В.Ефимов. ЯФ, 2 180 (1965).
3. Г.В.Ефимов. ЯФ, 4, 432 (1966).
4. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 5, 42 (1967).
5. G.V.Efimov. Commun. Math. Phys., 7, 1938 (1968).
6. Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ-68-52-54. Киев, 1968.
7. E.S.Fradkin. Nucl. Phys., 49, 624 (1963).
8. I.Schwinger. Phys. Rev., 115, 721 (1959).
9. I.Kållen. Nuovo Cim., 12, 217 (1954).
10. Л.Б.Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 марта 1969 года.