СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4367

В.М.Мальцев, Г.Н.Ремизов, С.К.Смирнов

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВЕС СОСТОЯНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОКТЕТОВ И ДЕКУПЛЕТОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4367

В.М.Мальцев, Г.Н.Ремизов, С.К.Смирнов

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ВЕС СОСТОЯНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОКТЕТОВ И ДЕКУПЛЕТОВ

В процессах множественного рождения адронов при высоких энергиях число частиц в конечном состоянии может быть очень большим. Каждая частица принадлежит унитарному мультиплету: октету или декуплету. Поэтому в общем случае физическое состояние представляет прямое произведение произвольного числа октетов и декуплетов.

Известно, что прямое произведение является приводимым и может быть разложено в ряд Клебша-Гордона по неприводимым представлениям, описываемым для трехмерной унимодулярной унитарной группы в схеме Гельфанда[1] тройками чисел $[h_1 h_2 0]$.

В некоторых теоретических моделях[2], связанных с рассмотрением подобных физических состояний, предполагается, что амплитуда реакции диагональна по $[h_1 h_2 0]$ и не зависит от остальных унитарных индексов. Это обстоятельство вынуждает нас для вычисления проекций физического состояния, содержащего произвольное число октетов и декуплетов, предложить новый рецепт. Он состоит в записи статистического веса (квадрата проекции) состояния с произвольным числом октетов и декуплетов в виде восьмимерного интеграла по параметрическому пространству группы $SU(3)$.

Воспользуемся известной в теории групп Ли теоремой[6]. Пусть G -элемент группы, $\hat{D}(g)$ - оператор какого-либо ее представления, а $\chi^{[h_1 h_2 0]}$ - характер неприводимого представления $[h_1 h_2 0]$. Тогда оператор $\hat{P}^{[h_1 h_2 0]}$, проецирующий векторы пространства, в котором действуют операторы $\hat{D}(g)$, на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[h_1 h_2 0]$, имеет вид:

$$\hat{P}^{[h_1 h_2 0]} = N^{[h_1 h_2 0]} \int \chi^{*[h_1 h_2 0]}(g)\,\hat{D}(g)\,dg, \qquad (1)$$

где $N^{[h_1 h_2 0]}$ – размерность представления $[h_1 h_2 0]$. В рассматриваемом случае векторы A являются физическими состояниями, содержащими прямые произведения октетов и декуплетов, т.е.

$$A = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} |[210];\ I_i I_{iz} Y_i > |[300];\ I_j I_{jz} Y_j >, \qquad (2)$$

где I_k, I_{kz}, Y_k – изоспин, его третья проекция и гиперзаряд K -ой частицы.

Следовательно, статистический вес вектора A в представлении $[h_1 h_2 0]$ равен

$$|<[h_1 h_2 0]|A>|^2 = <A|\,\hat{P}^{[h_1 h_2 0]}\,|A>. \qquad (3)$$

Подставляя (1) в (3), получаем для квадрата проекции вектора A на подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению $[h_1 h_2 0]$, основное соотношение

$$|<[h_1 h_2 0]| \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} |[210];\ I_i I_{iz} Y_i > |[300];\ I_j I_{jz} Y_j > |^2 =$$

$$= N^{[h_1 h_2 0]} \int dg\, \chi^{*[h_1 h_2 0]}(g)\, D^{[210]}_{\gamma_1,\gamma_1}(g) \ldots D^{[210]}_{\gamma_m,\gamma_m}(g)\, D^{[300]}_{\xi_1,\xi_1}(g) \ldots \qquad (4)$$

$$\ldots D^{[300]}_{\xi_n,\xi_n}(g),$$

где $D^{[210]}_{\gamma_k,\gamma_k}(g) = D^{[210]}_{I_k I_{kz} Y_k, I_k I_{kz} Y_k}$ – октетные, а $D^{[300]}_{\xi_e,\xi_e}(g)$ – -декуплетные диагональные D -функции.

Чтобы использовать соотношение (4) для конкретных расчётов, необходимо иметь определенную параметризацию группы SU(3) выражения для $D^{[210]}_{i,i}(g)$ и $D^{[300]}_{j,j}(g)$ – функций, характеров $\chi^{[h_1 h_2 0]}(g)$ и элемента объема dg.

Мурнаганом/3/ предложен способ параметризации любой n -мерной унитарной группы. Используя этот метод, легко записать типичный элемент группы SU(3) в 8-параметрическом пространстве в виде

$$U(g) = d(\delta_1, \delta_2)\, U_{23}(\Phi_2, \sigma_3)\, U_{12}(\theta_1, \sigma_2)\, U_{13}(\Phi_1, \sigma_1), \tag{5}$$

где

$$d(\delta_1, \delta_2) = \begin{pmatrix} e^{i\delta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\delta_1+\delta_2)} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$U_{12}(\theta_1, \sigma_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -e^{-i\sigma_2}\sin\theta_1 & 0 \\ e^{i\sigma_2}\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

а преобразования U_{13} и U_{23} выражены через U_{12} и перестановочные матрицы

$$(1,2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (2,3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \tag{8}$$

следующим образом:

$$U_{13}(\Phi_1,\sigma_1)=(2,3)\,U_{12}(\Phi_1,\sigma_1)(2,3), \tag{9}$$

$$U_{23}(\Phi_2,\sigma_3)=(1,2)(2,3)\,U_{12}(\Phi_2,\sigma_3)(2,3)(1,2). \tag{10}$$

Из восьми параметров, задающих точку в параметрическом пространстве группы $SU(3)$, три: Φ_1, θ_1, Φ_2 имеют смысл полярных углов с областью определения $(0, \pi/2)$; оставшиеся пять: $\delta_1, \delta_2, \sigma_1$, σ_2, σ_3 могут быть отождествлены с азтмутальными углами и областью изменения $(0, 2\pi)$.

Общий элемент группы в соотношении (5) записан в виде произведения нескольких сомножителей. Это значит, что для нахождения неприводимого представления элемента группы достаточно определить матрицы, представляющие каждый из сомножителей, и затем их перемножить.

Рецепт вычисления матричных элементов перестановочных матриц (1,2) и (2,3), а также диагональной матрицы дан Чакон и Мошинским/4/. Элементы типа $U_{12}(\theta, \sigma)$ принадлежат подгруппе $SU(2)$, поэтому их представления совпадают с представлениями этой подгруппы

$$U_{12}(\theta,\sigma) \longrightarrow D^{1/2(p-q)}_{m',m}(-\sigma,-2\theta,\sigma), \tag{11}$$

где $I = \frac{1}{2}(p-q)$ - изотопический спин, а $m = r - \frac{1}{2}(p+q)$ - третья проекция изотопического спина в состоянии $|\,p_r q\,>$ в схеме Гельфанда.

Проделав несложные, но утомительные вычисления, можно получить диагональные октетные и декуплетные D-функции. Они приведены в приложениях I, II.

Задача о вычислении характеров неприводимых представлений $[h_1 h_2 0]$ решается довольно просто. Известно, что характер суммы представлений равен сумме характеров, а прямого произведения - произведению. Поэтому для интересующего нас представления достаточно знать разложение его на элементарные представления и выражение для характера элементарного представления - триплета.

Если выражение для характера триплета χ в параметрическом пространстве группы известно[5], то, используя разложения

$$\begin{aligned} 8 &= 3 \times \bar{3} - 1, \\ 10 &= 3 \times 3 \times 3 - 2(3 \times \bar{3}) + 1, \\ \overline{10} &= \bar{3} \times \bar{3} \times \bar{3} - 2(3 \times \bar{3}) + 1, \\ 27 &= 3 \times 3 \times \bar{3} \times \bar{3} - 3 \times 3 \times 3 - \bar{3} \times \bar{3} \times \bar{3} \quad \text{и т.д.,} \end{aligned} \tag{12}$$

легко получить параметризованные выражения для характеров соответствующих представлений

$$\chi^{[210]} = \chi \cdot \chi^* - 1,$$

$$\chi^{[300]} = \chi^3 - 2\chi \cdot \chi^* + 1,$$

$$\chi^{[330]} = (\chi^*)^3 - 2\cdot\chi\cdot\chi^* + 1,$$
$$\chi^{[420]} = \chi^2(\chi^*)^2 - \chi^3 - (\chi^*)^3. \qquad (13)$$

Чтобы вычислить элемент объема группы, используем метод Мурнагана/3/. Пусть в окрестности данного элемента введены такие параметры ϕ_i, что

$$U^+ \frac{\partial U}{\partial \phi_i} = \lambda_i, \quad (i = 1, \dots, 8), \qquad (14)$$

где λ_i – матрицы Гелл-Манна. Тогда элемент объема группы

$$dg = \prod_{i=1}^{8} d\phi_i. \qquad (15)$$

Для любой другой параметризации Φ_j ($j = 1, \dots, 8$) имеем

$$dg = \frac{D(\phi_i)}{D(\Phi_j)} \prod_{j=1}^{8} d\Phi_j. \qquad (16)$$

Определитель $D(\phi_i)/D(\Phi_j)$ является определителем матрицы перехода от $\partial U/\partial \Phi_j$ к $\partial U/\partial \phi_i$ и, следовательно, от $U^+ \frac{\partial U}{\partial \Phi_j}$ к $U^+ \frac{\partial U}{\partial \phi_i} = \lambda_i$. Поэтому в дальнейшем нам остается вычислить 8 матриц $U^+ \frac{\partial U}{\partial \Phi_j}$ ($j=1,\dots,8$), разложить их по λ_i

$$U^{+}\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} = a_j^i \ \lambda_i , \tag{17}$$

и найти определитель матрицы a_j^i.

Однако, если действовать указанным способом, то конечный результат является очень сложной 8-мерной матрицей, определитель которой невозможно получить. Для упрощения расчёта было использовано следующее обстоятельство: преобразование

$$U^{+}\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} \rightarrow V U^{+}\frac{\partial U}{\partial \Phi_j} V^{+} , \tag{18}$$

где V – любая унитарная матрица, хотя и меняет матрицу a_j^i, но не меняет определитель. Мы выбрали V матрицу таким образом, а именно, $V = U_{23}\, d$, чтобы максимально упростить вычисления. В этом случае элемент объема группы можно вычислить. Он имеет вид

$$dg = \sin 2\theta_1 \cdot \cos^2\theta_1 \cdot \sin 2\Phi_1 \cdot \sin 2\Phi_2 \cdot d\delta_1\, d\delta_2 \cdot d\Phi_1 \cdot d\theta_1 \cdot d\Phi_2 \cdot d\sigma_1 \cdot d\sigma_2 \cdot d\sigma_3 . \tag{19}$$

Итак, в 8-параметрическом пространстве группы SU(3) нам известны диагональные октетные и декуплетные D -функции (приложения I и II), выражения для характеров представлений (13) и вычислен элемент объема группы (19). Следовательно, задача о вычислении статистического веса состояния, содержащего произвольное число октетов и декуплетов, приведена к вычислению 8-мерного интеграла (4) по параметрическому пространству 3-мерной унимодулярной унитарной группы, т.е. полностью решена.

За обсуждение затронутых здесь вопросов авторы благодарны В.С.Барашенкову и участникам руководимого им семинара.

Приложение I

Диагональные октетные D -функции

$$D^{[210]}_{p,p} = e^{i(2\delta_1+\delta_2)} \{ \cos\theta_1 \cos^2\Phi_1 \cos\Phi_2 - \frac{1}{4} e^{-i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin 2\theta_1 \sin 2\Phi_1 \sin\Phi_2 \},$$

$$D^{[210]}_{n,n} = e^{i(\delta_1+2\delta_2)} \{ \cos\theta_1 \cos\Phi_1 \cdot \cos^2\Phi_2 - \frac{1}{4} e^{-i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin 2\theta_1 \sin\Phi_1 \sin 2\Phi_2 \},$$

$$D^{[210]}_{\Xi^0,\Xi^0} = D^{*[210]}_{n,n}, \quad D^{[210]}_{\Xi^-,\Xi^-} = D^{*[210]}_{p,p},$$

$$D^{[210]}_{\Sigma^+,\Sigma^+} = e^{i(\delta_1-\delta_2)} \cos^2\theta_1 \cos\Phi_1 \cos\Phi_2, \quad D^{[210]}_{\Sigma^-,\Sigma^-} = D^{*[210]}_{\Sigma^+,\Sigma^+},$$

$$D^{[210]}_{\Sigma^0,\Sigma^0} = + \frac{1}{4} \{ \cos(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1) \sin\theta_1 \sin 2\Phi_1 \sin 2\Phi_2 - 3\sin^2\Phi_1 \sin^2\Phi_2 +$$

$$+ \cos 2\theta_1 (1+\cos^2\Phi_1)(1+\cos^2\Phi_2) \},$$

$$D^{[210]}_{\Lambda,\Lambda} = - \frac{1}{4} \{ 3\cos(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1) \sin\theta_1 \cdot \sin 2\Phi_1 \cdot \sin 2\Phi_2 + 3\cos 2\theta_1 \cdot$$

$$\cdot \sin^2\Phi_1 \cdot \sin^2\Phi_2 - (3\cos^2\Phi_1 - 1)(3\cos^2\Phi_2 - 1) \}.$$

Приложение II

Диагональные декуплетные D -функции

$$D^{[300]}_{N^{*++},N^{*++}}(g) = e^{3i\delta_1} \cos^3\theta_1 \cdot \cos^3\Phi_1 ,$$

$$D^{[300]}_{N^{*+},N^{*+}}(g) = e^{i(2\delta_1+\delta_2)} \{ \cos\theta_1 (1-3\sin^2\theta_1)\cos^2\Phi_1\cos\Phi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin 2\theta_1 \sin 2\Phi_1 \sin\Phi_2 \},$$

$$D^{[300]}_{N^{*0},N^{*0}}(g) = e^{i(\delta_1+2\delta_2)} \{ \cos\theta_1 (1-3\sin^2\theta_1)\cos\Phi_1 \cos^2\Phi_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin 2\theta_1 \cdot \sin\Phi_1 \cdot \sin 2\Phi_2 \},$$

$$D^{[300]}_{N^{*-},N^{*-}}(g) = e^{3i\delta_2} \cos^3\theta_1 \cdot \cos^3\Phi_2 ,$$

$$D^{[300]}_{\Sigma^{*+},\Sigma^{*+}}(g) = e^{i(\delta_1-\delta_2)} \{ -3 e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin\theta_1 \cdot \cos^2\theta_1 \sin\Phi_1 \cdot$$

$$\cdot \cos^2\Phi_1 \cdot \sin\Phi_2 + \cos^2\theta_1 \cos\Phi_1 (1-3\sin^2\Phi_1) \cos\Phi_2 \},$$

$$D^{[300]}_{\Sigma^{*0},\Sigma^{*0}}(g) = \{ \cos 2\theta_1 \cdot \cos 2\Phi_1 \cdot \cos 2\Phi_2 + \cos(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1) \sin\theta_1 \sin 2\Phi_1 \cdot$$

$$\cdot \times \sin 2\Phi_2 - \frac{3}{2} e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin\theta_1 \cos^2\theta_1 \sin 2\Phi_1 \sin 2\Phi_2 \},$$

$$D^{[300]}_{\Sigma^{*-},\Sigma^{*-}}(g) = e^{-i(\delta_1-\delta_2)}\{-3e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin\theta_1\cos^2\theta_1\cdot\sin\Phi_1\times$$

$$\times\sin\Phi_2\cos^2\Phi_2+\cos^2\theta_1\cos\Phi_1\cdot\cos\Phi_2(1-3\sin^2\Phi_2)\},$$

$$D^{[300]}_{\Xi^{*0},\Xi^{*0}}(g) = e^{-i(\delta_1+2\delta_2)}\{3e^{2i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin^2\theta_1\cos\theta_1\sin^2\Phi_1\times$$

$$\times\cos\Phi_1\cdot\sin^2\Phi_2+\frac{1}{2}e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin2\theta_1\cdot\sin\Phi_1(1-3\cos^3\Phi_1)\sin2\Phi_2+$$

$$+\cos\theta_1\cdot\cos\Phi_1(1-3\sin^2\Phi_1)\cos^2\Phi_2\},$$

$$D^{[300]}_{\Xi^{*-},\Xi^{*-}}(g) = e^{-i(2\delta_1+\delta_2)}\{3e^{2i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin^2\theta_1\cdot\cos\theta_1\times$$

$$\times\sin^2\Phi_1\cdot\sin^2\Phi_2\cdot\cos\Phi_2+\frac{1}{2}e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin2\theta_1\sin2\Phi_1\sin\Phi_2(1-3\cos^2\Phi_2)$$

$$+\cos\theta_1\cos^2\Phi_1\cos\Phi_2(1-3\sin^2\Phi_2)\}$$

$$D^{[300]}_{\Omega,\Omega}(g) = e^{-3i(\delta_1+\delta_2)}\{-e^{3i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)}\sin^3\theta_1\sin^3\Phi_1\cdot\sin^3\Phi_2+$$

$$+ 3e^{2i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin^2\theta_1 \sin^2\Phi_1 \cos\Phi_1 \sin^2\Phi_2 \cos\Phi_2 -$$

$$- 3e^{i(\sigma_3+\sigma_2-\sigma_1)} \sin\theta_1 \sin\Phi_1 \cos^2\Phi_1 \sin\Phi_2 \cos^2\Phi_2 + \cos^3\Phi_1 \cdot \cos^3\Phi_2 \}$$

Л и т е р а т у р а

1. *И.М.Гельфанд, М.А.Цетлин. ДАН СССР 71, 825 (1950).*
2. *В.С.Барашенков, Г.М.Зиновьев, В.М.Мальцев. Препринт ОИЯИ Р2-2956, Р2-2969, Р2-3007, Дубна, 1967; В.С.Барашенков, Г.М.Зиновьев. Препринт ОИЯИ Р2-3879, Дубна, 1968. V.S.Barashenkov, V.M.Maltsev, G.M.Zinovjev. Acta Phys. Polonica, 33, 315 (1968).*
3. *F.D.Murnaghan. The unitary and rotation groups, Spartan Books, Washington (1962).*
4. *E.Chacon, M.Moshinsky. Phys. Lett., 23, 567 (1966).*
5. *В.М.Мальцев. Препринт ОИЯИ Р5-4352, Дубна, 1969.*
6. *F.Cerulus. Nuovo Cimento, 19, 528 (1961).*

Рукопись поступила в издательский отдел
21 марта 1969 года.