СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4362

И.В.Полубаринов

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И НЕСОХРАНЯЮЩИЕСЯ ОПЕРАТОРЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4362

И.В.Полубаринов

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И НЕСОХРАНЯЮЩИЕСЯ ОПЕРАТОРЫ

§1. Введение

При описании динамики квантово-механических систем наряду с сохраняющимися важное место занимают несохраняющиеся операторы, например, наблюдаемые координат, угла рассеяния (передачи), энергий отдельных частиц в реакциях, поляризаций и т.д. С экспериментальной точки зрения представляют интерес предсказания о распределениях этих величин в тот или иной момент времени (большей частью при $t = \infty$).

В последнее время в теории поля несохраняющиеся операторы приобрели особый интерес в связи с нарушенными унитарной и киральной симметриями /1/. Для последней, например, характерны несохраняющиеся псевдовекторные токи и заряды.

В квантовой (и классической) теории поля сохраняющиеся операторы получают с помощью вариационного принципа как следствие соответствующих инвариантностей лагранжиана /2,3/.

Вариационный принцип можно использовать также и для получения несохраняющихся операторов и уравнений движения для них. Так, еще в 1937 г. М.А. Марков /4/ применил теорему Э. Нетер к задаче о дираковском электроне, движущемся во внешнем электромагнитном поле, и пришел к несохраняющимся тензорам 4-импульса и 4-момента количества движения электронно-позитронного поля с соответствующими уравнениями движения. При этом использовалась лоренц-инвариантность лагранжиана.

Источником несохраняющихся операторов могут служить преобразования (вариации), не оставляющие лагранжиан инвариантным. Подобные вариации рассматривались в теории квантованных полей Швингера [5]. Они, как подчеркнуто там, ведут к уравнениям Эйлера, перестановочным соотношениям и к различным операторам, несохраняющимся, как и в [4], из-за присутствия внешних полей (источников). Гелл-Манн и Леви [1] разработали прием вывода сохраняющихся векторных и несохраняющихся псевдовекторных токов с помощью преобразований с зависящими от x_μ параметрами, нарушающих инвариантность лагранжиана.

Вариации полей, не оставляющие лагранжиан инвариантным, эксплуатировались также в работах [6] для восстановления вида лагранжиана под дополнительные условия $\partial_\mu A_\mu(x)=0$ и $\partial_\mu h_{\mu\nu}(x)=0$ и для вывода этих условий (своего рода "законов сохранения") из готового лагранжиана.

Отметим, что уравнения движения для некоторых несохраняющихся операторов в теории поля (в том числе для релятивистского оператора проекции спина) рассматривал Бялыницки-Бируля [7].

В §2 настоящей работы вариационные методы, развитые в 1915-1918гг. Г. Лоренцем, Д. Гильбертом, Ф. Клейном, Г. Вейлем и Э. Нетер [2,3] для инвариантностей лагранжиана, распространяются на случай преобразований, не оставляющих лагранжиан инвариантным. В результате возникают несохраняющиеся операторы и уравнения движения для них (вместо законов сохранения под инвариантности). Наше внимание будет сосредоточено исключительно на замкнутых системах взаимодействующих полей, хотя такой подход применим и к случаю присутствия внешних полей.

Приведем пример того, что получается. Пусть лагранжиан описывает систему n произвольных взаимодействующих полей $\phi_i(x)$ $(i=1,\dots,n)$. Рассмотрим преобразования фаз заряженных полей, четырехмерные сдвиги и вращения каждого поля в отдельности $(i=1,\dots,n)$

$$\begin{aligned} &\delta^*\phi_i(x)=[i\alpha q_i - c_\lambda\partial_\lambda + \omega_{\lambda\rho}(x_\lambda\partial_\rho - x_\rho\partial_\lambda + s^i_{\lambda\rho})]\phi_i(x),\\ &\delta^*\phi_j(x)=0 \quad \text{при} \quad j\neq i, \end{aligned} \tag{1}$$

где q_i -заряд поля ϕ_i, $s^i_{\lambda\rho}$ - его спиновые матрицы, а α, c_λ и $\omega_{\lambda\rho}$ - параметры преобразований (не зависящие от x_μ). Тогда для каждого поля получим свой вектор тока $j^i_\mu(x)$, свой тензор 4-импульса $T^i_{\mu\nu}(x)$ и свой тензор 4-момента количества движения $M^i_{\mu\nu\lambda}(x)$ – по n несохраняющихся операторов $(i=1,\dots,n)$. Для каждой из этих величин из лагранжиана следует соответствующее уравнение движения. Полные вектор тока $j_\mu(x)$, тензор 4-импульса $T_{\mu\nu}(x)$ и тензор 4-момента количества движения $M_{\mu\nu\lambda}(x)$ аддитивно составляются из j^i_μ, $T^i_{\mu\nu}$ и $M^i_{\mu\nu\lambda}$

$$j_\mu(x)=\sum_{i=1}^{n} j^i_\mu(x),\quad T_{\mu\nu}(x)=\sum_{i=1}^{n} T^i_{\mu\nu}(x),\quad M_{\mu\nu\lambda}(x)=\sum_{i=1}^{n} M^i_{\mu\nu\lambda}(x), \qquad (2)$$

а "уравнениями движения" для них будут дифференциальные законы сохранения

$$\partial_\mu j_\mu(x)=0 \quad (а),\qquad \partial_\mu T_{\mu\nu}(x)=0 \ (б),\qquad \partial_\mu M_{\mu\nu\lambda}(x)=0 \ (в), \qquad (3)$$

если вся теория в целом инвариантна, как обычно, относительно преобразований фаз заряженных полей и преобразований неоднородной группы Лоренца над всеми полями одновременно. Аналогично разбиваются на несохраняющиеся части и другие операторы (которые и сами могут не сохраняться подобно псевдовекторным токам).

§3 посвящен конкретным примерам преобразований, относительно которых лагранжиан неинвариантен. Рассмотрены сдвиги, вращения, растяжения, собственно конформные преобразования и фазовые преобразования. В §4 обсуждаются бесконечно малые преобразования, генерируемые несохраняющимися операторами. В §5 кратко затронут вопрос о спектрах собственных значений операторов 4-импульса. Наконец, в §6 дан пример преобразований с параметром-функцией.

§2. Вариации полей, операторы и уравнения движения

1. Рассмотрим изменение лагранжиана

$$L(R_4)=\int_{R_4} d^4x\, \mathcal{L}(x) \qquad (4)$$

(R_4 – любая четырехмерная область) за счет каких угодно вариаций полей x), из которых составлена плотность $\mathcal{L}(x)$. Лагранжиан не предполагается инвариантным относительно этих вариаций. Изменение лагранжиана можно записать следующим образом:

$$\delta^* L(R_4) = \int_{R_4} d^4x\, \delta^* \mathcal{L}(x), \qquad \delta^* \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x). \tag{5}$$

В частном случае, когда $\mathcal{L}(x)$ зависит от полей $\phi(x)$ и только от их первых производных $\partial_\mu \phi(x)$,

$$\delta^* \mathcal{L}(x) = \sum_\phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \delta^* \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta^* \partial_\mu \phi \right] = \tag{6а}$$

$$= \partial_\mu \sum_\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta^* \phi + \sum_\phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta^* \phi, \tag{6б}$$

где сумма берется по всем полям и всем компонентам каждого поля, а

$$\delta^* \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x), \ ^{/3/} \qquad \delta^*(\partial_\mu \phi(x)) = \partial_\mu (\delta^* \phi(x)). \tag{7}$$

Известно, что переход от плотности $\mathcal{L}(x)$ к плотности

$$\bar{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(x) + \partial_\mu f_\mu(x) \tag{8}$$

не изменяет динамику (в частности, уравнения движения). Вариация плотности $\bar{\mathcal{L}}(x)$ равна

$$\delta^* \bar{\mathcal{L}}(x) = \delta^* \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta^* f_\mu(x). \tag{9}$$

---

x) Мы будем использовать формализм "локальных" вариаций δ^* [3] , так что даже если вариации полей индуцированы преобразованиями координат ($x_\mu \to x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$), можно забыть об этом и говорить исключительно о преобразованиях полей. Эквивалентный формализм "субстанциональных" вариаций δ требует одновременного рассмотрения вариаций полей (другой формы) и вариаций координат.

2. Исходным для вывода интересующих нас соотношений послужит тождество $\delta^* \mathcal{L}(x) \equiv \delta^* \bar{\mathcal{L}}(x)$, с левой и правой частями которого поступим по-разному. Если в левую его часть подставить вариацию $\delta^*\mathcal{L}(x)$ в форме (6б), получим основное тождество

$$-\partial_\mu V_\mu(x) + \sum_\phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta^* \phi \equiv \delta^* \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta^* f_\mu(x), \tag{10}$$

где

$$V_\mu(x) = -\sum_\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta^* \phi - \delta^* f_\mu(x). \tag{11}$$

Функцию f_μ и, следовательно, добавок $\delta^* f_\mu$ мы можем выбирать по своему усмотрению (равными нулю или нет) и использовать для перебрасывания 4-дивергенций из $\delta^*\mathcal{L}(x)$ (если таковые имеются) в левую часть тождества (10).

В общем случае, когда $\mathcal{L}(x)$ зависит от более высоких производных полей, выражение (6б) и левая часть тождества (10) имели бы такую же структуру: дивергенция плюс линейная комбинация эйлерианов [x].

3. Тождество (10) можно специализировать применительно к различным частным формам вариаций. Например, один важный класс вариаций – группа преобразований полей с n независимыми постоянными (не зависящими от x_μ) параметрами ϵ_i, когда

$$\delta^* \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \chi_i(x), \tag{12}$$

и тождество (10) превращается в n тождеств

$$-\partial_\mu V_{i\mu}(x) + \sum_\phi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \chi_i \equiv \mathcal{F}_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

---

[x] Эйлерианом (или "выражением Лагранжа") называют выражение $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}$, стоящее в левой части уравнения Эйлера (14), и его обобщение $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi)} - \cdots$ на случай, когда $\mathcal{L}(x)$ содержит более высокие производные полей.

где

$$V_{i\mu} = \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} V_\mu , \quad \mathcal{F}_i = \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} (\delta^* \mathcal{L} + \partial_\mu \delta^* f_\mu).$$

Можно также извлечь следствия из тождества (10) для другого важного класса вариаций – групп преобразований с параметрами, которые суть функции от x_μ. Примеры таких преобразований – калибровочные преобразования в электродинамике с одним параметром-функцией $\Lambda(x)$, преобразования Янга-Миллса /8/ с тремя параметрами-функциями и общековариантные преобразования в общей теории относительности с четырьмя параметрами-функциями $\xi_\mu(x)$ $(x'_\mu = \xi_\mu(x))$.

4. Учет уравнений Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0$$

в левой части тождества (10) превращает его в дифференциальное соотношение

$$- \partial_\mu V_\mu(x) = \delta^* \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta^* f_\mu(x). \tag{15}$$

Если обе части (15) проинтегрировать по области R_4 и интеграл от 4-дивергенции слева заменить согласно теореме Гаусса-Остроградского интегралом по поверхности S области R_4, получим соответствующее интегральное соотношение

$$-\int_S d\sigma_\mu V_\mu(x) = \int_{R_4} d^4x \, [\delta^* \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta^* f_\mu(x)]. \tag{16а}$$

Для специальной области R_4, заключенной между двумя пространственно-подобными поверхностями σ_1 и σ_2, при обычном предположении о достаточном убывании полей на бесконечности соотношение (16а) примет вид

$$-G(\sigma_2) + G(\sigma_1) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4x [\delta^* \mathcal{L}(x) + \partial_\mu \delta^* f_\mu(x)], \tag{16б}$$

где

$$G(\sigma) = \int\limits_{\sigma} d\sigma_\mu V_\mu(x). \tag{17}$$

Очевидно, из (15), (16) или из (13) аналогичные соотношения следуют для $V_{i\mu}(x)$ и $G_i(\sigma)$.

В отличие от тождеств (10) и (13), которые выполняются при любом выборе полей $\phi(x)$, соотношения (15) и (16), как ясно из способа их получения, тождественно соблюдаются только в том случае, если поля $\phi(x)$ суть решения уравнений Эйлера (14) x). Разумеется, эти соотношения можно вывести из уравнений Эйлера независимо, если каким-либо образом выбрать $V_\mu(x)$. С этой точки зрения главное, что дает вариационный принцип, – операторы $V_\mu(x)$. Соотношения (15) и (16) имеют смысл уравнений движения для операторов $V_\mu(x)$ и $G(\sigma)$ (аналогично для $V_{i\mu}(x)$ и $G_i(\sigma)$).

5. Установим связь со случаем инвариантностей. Теорию называют инвариантной относительно данных вариаций, если

$$\int\limits_{R_4} d^4x\, \delta^* \mathcal{L}(x) = \int\limits_{R_4} d^4x\, \partial_\mu g_\mu(x), \tag{18}$$

что вследствие произвольности области R_4 равносильно

$$\delta^* \mathcal{L}(x) = \partial_\mu g_\mu(x). \tag{19}$$

Для многих внутренних симметрий $g_\mu = 0$ (строгая инвариантность). В противном случае говорят об инвариантности с точностью до 4-дивергенции [9,10]. В случае, когда преобразования полей индуцированы преобразованиями координат $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$ и все поля преобразуются одновременно, $g_\mu = -\mathcal{L}(x)\delta x_\mu$ xx).

x) Уравнения Эйлера можно учитывать и в правых частях тождеств (10) или (13). Однако нетривиальные соотношения получаются только в том случае, когда в левой и правой частях это делается по-разному.

xx) В этом случае под строгой инвариантностью понимают обращение в нуль субстанциональной вариации $\delta L = L'(R'_4) - L(R_4) = \int\limits_{R'_4} d^4x'\, \mathcal{L}'(x') - \int\limits_{R_4} d^4x\, \mathcal{L}(x) = \int\limits_{R_4} d^4x \{[1 + \partial_\mu(\delta x_\mu)]\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x)\} = \int\limits_{R_4} d^4x \{\delta^*\mathcal{L}(x) + \partial_\mu[\mathcal{L}(x)\delta x_\mu]\}$, где R'_4 – область R_4 в переменных x'_μ.

Для инвариантностей соотношения (15) и (16б) превращаются в дифференциальный и интегральный законы сохранения

$$\partial_\mu V_\mu(x) = 0, \tag{20}$$

$$G(\sigma_2) = G(\sigma_1) \tag{21}$$

(подразумевается, что $\delta^* f_\mu(x)$ выбрана равной $-g_\mu$). Правда, для преобразований с параметрами-функциями от x_μ соотношения (20) и (21), вообще говоря, не являются настоящими законами сохранения, поскольку содержат произвольные функции (параметры). Исключение параметров-функций (например, с помощью разложения их в ряды Тэйлора по степеням x_μ) лишает левую часть (20) формы 4-дивергенции. Однако, если группа с параметрами-функциями имеет подгруппы с параметрами-константами, то среди таких следствий (20) найдутся соответствующие законы сохранения вида (20).

Результаты по инвариантностям были суммированы в теоремах Э. Нетер /2/, первая из которых утверждает, что из инвариантности теории относительно группы преобразований с n константными параметрами следует n тождеств, выражающих n независимых линейных комбинаций эйлерианов через дивергенции. Это - очевидное следствие тождества (13) (и его обобщений) и условия инвариантности (19). Вторая теорема Э. Нетер посвящена следствиям из тождества (10) (и его обобщений) под инвариантности относительно преобразований с параметрами-функциями: если лагранжиан инвариантен относительно преобразований с n параметрами-функциями $\lambda_i(x)$, причем бесконечно малые преобразования содержат производные $\lambda_i(x)$ до m -й включительно

$$\delta^*\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_j} \lambda_i(x) \chi_{i\mu_1 \dots \mu_j}(x), \tag{22}$$

то имеется n линейных зависимостей между эйлерианами и их производными до m -го порядка включительно. Чтобы в этом убедиться, следует заменить $\delta^* \mathcal{L}$ в правой части тождества (10) по условию инвариантности (19), положить $\delta^* f_\mu = - g_\mu$ и выбирать $\lambda_i(x) \approx \delta_{ij}\,\delta^{(4)}(x-y)$ по очереди для $j = 1, \dots n$.

Стоит отметить, что вторая теорема Э. Нетер не исчерпывает всех следствий симметрий этого типа. Рассмотренные Клейном /2/ и в работах/6,11/ примеры иллюстрируют более общее утверждение: в предположениях второй теоремы Э. Нетер плюс предположение, что $\mathfrak{L}(x)$ содержит производные полей до ℓ -той включительно, имеет место $(\ell+m+1)\,n$ тензорных тождеств для плотности $\mathfrak{L}(x)$ и ее производных. Для доказательства после учёта в (10) условия инвариантности (19) и выбора $\delta^* f_\mu = - g_\mu$ функции $\lambda_i(x)$ выбираются в виде различных степеней x_μ : $\lambda_i \approx 1$, x_μ, $x_\mu x_\nu$, ..., – до $(\ell+m)$ -той включительно [x)] (см. /6/).

Так, в спинорной электродинамике следствиями калибровочной инвариантности (один параметр $\Lambda(x)$) являются три тождества /6/ $(\ell = m = n = 1)$:

$$\partial_\mu\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi - \bar\psi\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\bar\psi)}\Big] + \Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\Big]\psi - \bar\psi\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar\psi} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\bar\psi)}\Big] = 0,$$

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + ie\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\psi - \bar\psi\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\bar\psi)}\Big] + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0,$$

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0.$$

В то же время вторая теорема Э. Нетер дает одно тождество:

$$\partial_\mu\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\Big] - ie\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\psi} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\psi)}\Big]\psi + ie\bar\psi\Big[\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar\psi} - \partial_\nu\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\nu\bar\psi)}\Big] = 0,$$

которое есть очевидное следствие трех предыдущих. Из них же вытекает также закон сохранения тока (под подгруппу с параметром-константой Λ = const).

---

x) Т.е. эти группы дают конечное число ограничений, связей, а не бесконечное, как можно было бы ожидать.

Как показано в [6,10], инвариантности относительно преобразований с параметрами-функциями служат ограничению числа спиновых степеней свободы (исключению лишних компонент полей). Эта роль преобразований сохраняется и тогда когда лагранжиан перестает быть инвариантным [6].

6. Операторы $V_\mu(x)$ и $G(\sigma)$ определены неоднозначно. Во-первых, вид плотностей $V_\mu(x)$ меняется от перебрасывания 4-дивергенций из правой части тождества (10) в левую. Этот произвол связан с тем, что плотность лагранжиана определена с точностью до 4-дивергенций, и в конечном счете с тем, что все операторы определены с точностью до унитарных преобразований [5]. Формально произвол устраняется требованием, чтобы все выражения, представимые в форме 4-дивергенций, были сконцентрированы в левой части (10) (для сохраняющихся операторов при этом справа останется нуль). Однако практически в §3 будут переноситься лишь очевидные дивергенции. Во-вторых, плотности $V_\mu(x)$ определяются из (10) выражением (11) лишь с точностью до произвольных выражений X_μ, таких, что $\partial_\mu X_\mu = 0$ "автоматически", без учета уравнений движения (тривиальный произвол). Под знаком 3-мерного интеграла по поверхности в (16а) или (17) такие выражения дают трехмерные дивергенции и поэтому, вообще говоря, вклада не вносят. В-третьих, несохраняющийся оператор $G(\sigma)$ строится по выбранной плотности $V_\mu(x)$ неоднозначно: имеется множество возможностей выбора в (17) пространственноподобной поверхности σ, ведущих к различным операторам $G(\sigma)$. Это соответствует тому, что за развитием (динамикой) мы можем следить по различным времениподобным направлениям. Для сохраняющихся операторов согласно (21) такого произвола нет.

§3. Примеры

а) Сдвиги. Обратимся к спинорной электродинамике с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu + j_\mu A_\mu - \bar\psi(\gamma\partial + m)\psi, \tag{23}$$

где $\psi(x)$ – дираковское спинорное поле, а $j_\mu = ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. В качестве первого примера вариаций рассмотрим бесконечно малые преобразования сдвига порознь полей $A_\mu(x)$ и $\psi(x)$ и соответствующие вариации $\mathfrak{L}(x)$:

$$\delta^* A_\mu(x) = -c_\nu \partial_\nu A_\mu(x), \qquad \delta^*\psi(x) = 0;$$

$$\delta^*_A \mathfrak{L}(x) = c_\nu \partial_\nu \left(\frac{1}{2}\partial_\lambda A_\rho \partial_\lambda A_\rho\right) - j_\mu c_\nu \partial_\nu A_\mu; \tag{24}$$

$$\delta^* A_\mu(x) = 0, \qquad \delta^*\psi(x) = -c_\nu \partial_\nu \psi(x);$$

$$\delta^*_\psi \mathfrak{L}(x) = c_\nu \partial_\nu [\bar{\psi}(\gamma\partial + m)\psi] - A_\mu c_\nu \partial_\nu j_\mu = j_\mu c_\nu \partial_\nu A_\mu. \tag{25}$$

Здесь c_ν – бесконечно малый параметр. Последнее выражение получено с учетом уравнения Дирака. Подставляя выражения для $\delta^*\mathfrak{L}$ в правую часть соотношения (15), выбирая в первом случае $\delta^* f_\mu = -c_\mu \frac{1}{2}\partial_\lambda A_\rho \partial_\lambda A_\rho$, а во втором $\delta^* f_\mu = 0$, получаем плотности (согласно (11)) и соответствующие "уравнения движения" в форме

$$T^A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\lambda \partial_\nu A_\lambda + \partial_\nu A_\lambda \partial_\mu A_\lambda - \delta_{\mu\nu}\partial_\rho A_\lambda \partial_\rho A_\lambda), \quad \partial_\mu T^A_{\mu\nu} = -j_\mu \partial_\nu A_\mu; \tag{26}$$

$$T^\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \bar{\psi}_c\gamma_\mu\partial_\nu\psi_c - \partial_\nu\bar{\psi}_c\gamma_\mu\psi_c), \quad \partial_\mu T^\psi_{\mu\nu} = j_\mu\partial_\nu A_\mu. \tag{27}$$

Сумма этих плотностей $T_{\mu\nu} = T^A_{\mu\nu} + T^\psi_{\mu\nu}$ сохраняется, т.е. удовлетворяет уравнению (3б). Строя интегральные величины по рецепту (17) [x], получаем 4-импульсы электромагнитного и электронно-позитронного полей P^A_ν и P^ψ_ν и уравнения движения для них:

[x] Здесь в качестве σ из множества возможных выбрана поверхность $x_0 = \text{const}$. При преобразованиях Лоренца P^A_ν и P^ψ_ν будут вести себя как 4-векторы, если соответственно преобразовывать поверхность σ. Неучет этого в старой литературе (см., например, /2/, стр. 346) вел к заключению о невекторном характере 4-импульса P^A_ν. См. критику в /13/.

$$P_\nu^A(x_0) = -i\int d\vec{x}\, T_{4\nu}^A(x), \quad \frac{d}{dx_0} P_\nu^A(x_0) = -\int d\vec{x}\, j_\mu(x)\partial_\nu A_\mu(x); \tag{28}$$

$$P_\nu^\psi(x_0) = -i\int d\vec{x}\, T_{4\nu}^\psi(x), \quad \frac{d}{dx_0} P_\nu^\psi(x_0) = \int d\vec{x}\, j_\mu(x)\partial_\nu A_\mu(x). \tag{29}$$

Таким образом, операторы P_ν^A и P_ν^ψ изменяются со временем, но полный 4-импульс $P_\nu = P_\nu^A + P_\nu^\psi$ сохраняется. Чтобы сделать явной калибровочную инвариантность полученных уравнений, их преобразуют /4/ путем прибавления к обеим частям уравнения (26) и вычитания из обеих частей уравнения (27) 4-дивергенции $\partial_\mu (j_\mu A_\nu)$, а также учета закона сохранения тока $\partial_\mu j_\mu = 0$. В результате получаются следующие плотности, интегральные величины и уравнения:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^A = T_{\mu\nu}^A + j_\mu A_\nu, \qquad \partial_\mu \mathcal{T}_{\mu\nu}^A = j_\mu F_{\mu\nu}; \tag{26'}$$

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^\psi = T_{\mu\nu}^\psi - j_\mu A_\nu, \qquad \partial_\mu \mathcal{T}_{\mu\nu}^\psi = -j_\mu F_{\mu\nu}; \tag{27'}$$

$$K_\nu^A(x_0) = -i\int d\vec{x}\, \mathcal{T}_{4\nu}^A(x), \qquad \frac{d}{dx_0} K_\nu^A(x_0) = \int d\vec{x}\, j_\mu F_{\mu\nu}; \tag{28'}$$

$$K_\nu^\psi(x_0) = -i\int d\vec{x}\, \mathcal{T}_{4\nu}^\psi(x), \qquad \frac{d}{dx_0} K_\nu^\psi(x_0) = -\int d\vec{x}\, j_\mu F_{\mu\nu}. \tag{29'}$$

Здесь в правых частях уравнений стоят обобщенные выражения для силы Лоренца.

Таким образом, для замкнутой системы полей метод варьирования полей порознь привел к тензору $T_{\mu\nu}^\psi$ (и $\mathcal{T}_{\mu\nu}^\psi$) того же вида, который получают при изучении движения дираковского электрона во внешнем электромагнитном поле /4/. Заметим, что М.А. Марков /4/ применял вариационный принцип для лагранжиана, в котором в отличие от (23) отсутствовал первый член (поле A_μ считалось внешним). Интересно,

$$P^{A}_{\nu}(x_0) = -i\int d\vec{x}\, T^{A}_{4\nu}(x), \quad \frac{d}{dx_0} P^{A}_{\nu}(x_0) = -\int d\vec{x}\, j_\mu(x)\,\partial_\nu A_\mu(x); \tag{28}$$

$$P^{\psi}_{\nu}(x_0) = -i\int d\vec{x}\, T^{\psi}_{4\nu}(x), \quad \frac{d}{dx_0} P^{\psi}_{\nu}(x_0) = \int d\vec{x}\, j_\mu(x)\,\partial_\nu A_\mu(x). \tag{29}$$

Таким образом, операторы P^{A}_{ν} и P^{ψ}_{ν} изменяются со временем, но полный 4-импульс $P_\nu = P^{A}_{\nu} + P^{\psi}_{\nu}$ сохраняется. Чтобы сделать явной калибровочную инвариантность полученных уравнений, их преобразуют /4/ путем прибавления к обеим частям уравнения (26) и вычитания из обеих частей уравнения (27) 4-дивергенции $\partial_\mu(j_\mu A_\nu)$, а также учета закона сохранения тока $\partial_\mu j_\mu = 0$. В результате получаются следующие плотности, интегральные величины и уравнения:

$$\mathcal{T}^{A}_{\mu\nu} = T^{A}_{\mu\nu} + j_\mu A_\nu, \qquad \partial_\mu \mathcal{T}^{A}_{\mu\nu} = j_\mu F_{\mu\nu}; \tag{26'}$$

$$\mathcal{T}^{\psi}_{\mu\nu} = T^{\psi}_{\mu\nu} - j_\mu A_\nu, \qquad \partial_\mu \mathcal{T}^{\psi}_{\mu\nu} = -j_\mu F_{\mu\nu}; \tag{27'}$$

$$K^{A}_{\nu}(x_0) = -i\int d\vec{x}\, \mathcal{T}^{A}_{4\nu}(x), \qquad \frac{d}{dx_0} K^{A}_{\nu}(x_0) = \int d\vec{x}\, j_\mu F_{\mu\nu}; \tag{28'}$$

$$K^{\psi}_{\nu}(x_0) = -i\int d\vec{x}\, \mathcal{T}^{\psi}_{4\nu}(x), \qquad \frac{d}{dx_0} K^{\psi}_{\nu}(x_0) = -\int d\vec{x}\, j_\mu F_{\mu\nu}. \tag{29'}$$

Здесь в правых частях уравнений стоят обобщенные выражения для силы Лоренца.

Таким образом, для замкнутой системы полей метод варьирования полей порознь привел к тензору $T^{\psi}_{\mu\nu}$ (и $\mathcal{T}^{\psi}_{\mu\nu}$) того же вида, которые получают при изучении движения дираковского электрона во внешнем электромагнитном поле /4/. Заметим, что М.А. Марков /4/ применял вариационный принцип для лагранжиана, в котором в отличие от (23) отсутствовал первый член (поле A_μ считалось внешним). Интересно, что он пришел к несохраняющимся величинам на основании лоренц-инвариантности такого лагранжиана, когда оба поля варьировались одновременно. Дело в том /4/, что хотя инвариантность и ведет по теореме Э. Нетер к тождеству типа (13) с правой частью нуль, но эйлериан для поля A_μ в этом случае равен не нулю, а $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\mu} = j_\mu$. Этим подходом трудно воспользоваться для замкнутой системы полей.

Что касается тензора $\mathfrak{T}^{A}_{\mu\nu}$, то можно показать, что он лишь несущественно (на автоматически сохраняющиеся или содержащие $\partial_\mu A_\mu$ члены) отличается от плотности $\Theta^{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + F_{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho})$, которую в литературе принято считать тензором энергии-импульса электромагнитного поля, даже при наличии взаимодействия.

В общей теории относительности, раздельно варьируя "материальные поля" и "метрический тензор" $g_{\mu\nu}$, можно прийти к тензору 4-импульса "материи" и к псевдотензору 4-импульса гравитационного поля. Пусть для простоты "материю" представляет скалярное поле $\phi(x)$ и плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathfrak{L} = [\frac{2}{a^2} g^{\alpha\beta} (\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \Gamma^{\delta}_{\gamma\delta}) - \frac{1}{2}(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \mu^2 \phi\phi)] g^{1/2} , \qquad (30)$$

где g -детерминант матрицы $\| g_{\mu\nu} \|$, $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ - символы Кристоффеля второго рода, а a^2 - гравитационная константа связи /6/. Обращаясь к следующим преобразованиям полей и соответствующим изменениям плотности лагранжиана

$$\delta^*\phi = -c^{\nu} \partial_\nu \phi, \qquad \delta^* g_{\mu\nu} = 0;$$

$$\delta^*_{\phi}\mathfrak{L} = \frac{1}{2} c^{\nu} \partial_\nu [(g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \mu^2 \phi\phi) g^{1/2}] + \frac{1}{2} c^{\nu} \partial_\nu g_{\lambda\rho} \mathfrak{T}^{\lambda\rho}_{(\phi)} ; \qquad (31)$$

$$\delta^*\phi = 0, \qquad \delta^* g_{\mu\nu} = -c^{\lambda} \partial_\lambda g_{\mu\nu} ;$$

$$\delta^*\mathfrak{L} = -c^{\nu}\partial_\nu [\frac{2}{a^2} g^{\alpha\beta} (\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \Gamma^{\delta}_{\gamma\delta}) g^{1/2}] - \frac{1}{2} c^{\nu} \partial_\nu g_{\lambda\rho} \mathfrak{T}^{\lambda\rho}_{(\phi)} \qquad (32)$$

и очевидным образом подбирая $\delta^* f_\mu$ так, чтобы исключить дивергенции из правой части (15), получаем плотности и уравнения движения в форме

$$\mathcal{T}^{\mu}_{(\phi)\nu} = [g^{\mu\lambda}\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}(g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi + \mu^{2}\phi\phi)]g^{1/2},\ \partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu}_{(\phi)\nu} = \frac{1}{2}\partial_{\nu}g_{\lambda\rho}\mathcal{T}^{\lambda\rho}_{(\phi)} \tag{33}$$

$$\mathcal{T}^{\mu}_{(g)\nu} = \frac{2}{a^2}[\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma}\partial_{\nu}\mathfrak{g}^{\mu\beta} + \delta^{\mu}_{\nu}\mathfrak{g}^{\alpha\beta}(\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta})];$$

$$\partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu}_{(g)\nu} = -\frac{1}{2}\partial_{\nu}g_{\lambda\rho}\mathcal{T}^{\lambda\rho}_{(\phi)}. \tag{34}$$

Здесь $\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = g^{1/2}g^{\alpha\beta}$, $\mathcal{T}^{\mu\nu}_{(\phi)} = g^{\nu\rho}\mathcal{T}^{\mu}_{(\phi)\rho} = g^{1/2}T^{\mu\nu}$, а $T^{\mu\nu}$ есть обычный симметричный тензор 4-импульса " материи". Первое из полученных уравнений можно записать в виде

$$\partial_{\mu}\mathcal{T}^{\mu\nu}_{(\phi)} = -\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\mathcal{T}^{\lambda\rho}_{(\phi)}, \quad \text{или} \quad \nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0.$$

Тензор $\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = \mathcal{T}^{\mu}_{(\phi)\nu} + \mathcal{T}^{\mu}_{(g)\nu}$ есть сохраняющийся канонический тензор 4-импульса замкнутой системы гравитационного и скалярного полей.

б) Вращения. Аналогично рассмотрим вариации, представляющие бесконечно малые вращения полей A_{μ} и ψ порознь.

$$\delta^{*}A_{\mu} = \omega_{\lambda\rho}[(x_{\lambda}\partial_{\rho} - x_{\rho}\partial_{\lambda})A_{\mu} + \delta_{\mu\lambda}A_{\rho} - \delta_{\mu\rho}A_{\lambda}],\quad \delta^{*}\psi = 0;$$

$$\delta^{*}A_{\mu} = 0,\quad \delta^{*}\psi = \omega_{\lambda\rho}[x_{\lambda}\partial_{\rho} - x_{\rho}\partial_{\lambda} + \frac{i}{2}\sigma_{\lambda\rho}]\psi.$$

Тем же путем, что и выше, получим в качестве плотностей и уравнений движения для них:

$$M^{A}_{\mu\nu\lambda} = \partial_{\mu}A_{\rho}[(x_{\nu}\partial_{\lambda} - x_{\lambda}\partial_{\nu})A_{\rho} + \delta_{\rho\nu}A_{\lambda} - \delta_{\rho\lambda}A_{\nu}] - \frac{1}{2}\cdot(\delta_{\mu\lambda}x_{\nu} - \delta_{\mu\nu}x_{\lambda})(\partial_{\rho}A_{\sigma})^{2};$$

$$\partial_{\mu}M^{A}_{\mu\nu\lambda} = -j_{\mu}(x_{\nu}\partial_{\lambda} - x_{\lambda}\partial_{\nu})A_{\mu} - j_{\nu}A_{\lambda} + j_{\lambda}A_{\nu};$$

$$M^{\psi}_{\mu\nu\lambda} = \bar{\psi}\ \gamma_{\mu}\ [x_{\nu}\partial_{\lambda} - x_{\lambda}\partial_{\nu} + \frac{i}{2}\sigma_{\nu\lambda}]\ \psi\ ;$$

$$\partial_{\mu} M^{\psi}_{\mu\nu\lambda} = j_{\mu}(x_{\nu}\partial_{\lambda} - x_{\lambda}\partial_{\nu})A_{\mu} + j_{\nu}A_{\lambda} - j_{\lambda}A_{\nu}.$$

Плотность $M^{\psi}_{\mu\nu\lambda}$ и уравнение для нее также были получены в /4/ для случая внешнего поля A_{μ}.

в) Конформные преобразования. Растяжения. Для обсуждения конформных преобразований вместо плотности (23) удобнее взять плотность

$$\mathfrak{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j_{\mu}A_{\mu} - \bar{\psi}(\gamma\partial + m)\psi. \qquad (35)$$

Рассматривая растяжения полей $A_{\mu}(x)$ и $\psi(x)$ /14/ порознь:

$$\delta^* A_{\mu} = \epsilon(1 + x\partial)A_{\mu}, \qquad \delta^*\psi = 0;$$

$$\delta^*_A \mathfrak{L} = \epsilon\partial_{\mu}(-\frac{1}{4}x_{\mu}F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}) + \epsilon j_{\mu}(1 + x\partial)A_{\mu}; \qquad (36)$$

$$\delta^* A_{\mu} = 0, \qquad \delta^*\psi = \epsilon(\frac{3}{2} + x\partial)\psi;$$

$$\delta^*_{\psi}\mathfrak{L} = -\delta^*\bar{\psi}[(\gamma\partial + m)\psi - ie\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}] - \epsilon\bar{\psi}(\frac{5}{2} + x\partial)[(\gamma\partial + m)\psi - ie\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}] +$$

$$+ \epsilon m\bar{\psi}\psi - \epsilon j_{\mu}(1 + x\partial)A_{\mu} = \epsilon m\bar{\psi}\psi - \epsilon j_{\mu}(1 + x\partial)A_{\mu} \qquad (37)$$

(ϵ – бесконечно малый параметр, и в последней строке учтено уравнение Дирака), приходим к плотностям и уравнениям движения:

$$V^{A}_{\mu} = F_{\mu\nu}(1 + x\partial)A_{\nu} - \frac{1}{4}x_{\mu}F_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}, \quad \partial_{\mu}V^{A}_{\mu} = -j_{\nu}(1 + x\partial)A_{\nu}; \qquad (38)$$

$$V^{\psi}_{\mu} = \bar{\psi}\gamma_{\mu}(\frac{3}{2} + x\partial)\psi, \quad \partial_{\mu}V^{\psi}_{\mu} = -m\bar{\psi}\psi + j_{\nu}(1 + x\partial)A_{\nu}. \qquad (39)$$

Теперь снова обратимся к общей теории относительности и подвергнем плотность лагранжиана (30) преобразованиям

$$\delta^*\phi = \epsilon x^\mu \partial_\mu \phi , \quad \delta^* g_{\mu\nu} = 0; \tag{40}$$

$$\delta^*\phi = 0, \ \delta^* g_{\mu\nu} = \epsilon (2 + x^\rho \partial_\rho) g_{\mu\nu} , \quad \delta^*\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \epsilon (1 + x^\rho \partial_\rho) \Gamma^\lambda_{\mu\nu} . \tag{41}$$

Этим путем получаем следующие плотности и уравнения движения:

$$V^\mu_\phi = \mathfrak{g}^{\mu\rho} \partial_\rho \phi \, x^\lambda \partial_\lambda \phi - \frac{1}{2} x^\mu (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi + \mu^2 \phi\phi) g^{1/2};$$

$$\partial_\mu V^\mu_\phi = - \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi (2 + x^\rho \partial_\rho) \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \mu^2 \phi\phi (4 + x^\rho \partial_\rho) g^{1/2}; \tag{42}$$

$$V^\mu_g = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} (2 + x^\rho \partial_\rho) \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\gamma} (2 + x^\rho \partial_\rho) \mathfrak{g}^{\mu\beta} + x^\mu \frac{2}{a^2} \mathfrak{g}^{\alpha\beta} (\Gamma^\delta_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\delta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\delta_{\gamma\delta}) ;$$

$$\partial_\mu V^\mu_g = \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \, \partial_\beta \phi (2 + x^\rho \partial_\rho) \mathfrak{g}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mu^2 \phi\phi (4 + x^\rho \partial_\rho) g^{1/2} . \tag{43}$$

г) Собственно конформные преобразования. В этом случае вариации A_μ, ψ /14/ и $\mathfrak{L}$ имеют вид

$$\delta^* A_\mu = \alpha_\nu \{ [x^2 \partial_\nu - 2 x_\nu (x\partial) - 2 x_\nu] A_\mu - 2\delta_{\mu\nu} (xA) + 2 x_\mu A_\nu \}, \quad \delta^*\psi = 0;$$

$$\delta^*_A \mathfrak{L} = \partial_\mu \{ \alpha_\nu [-\frac{1}{4} (x^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu) F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}] \} + \alpha_\mu \delta^* A_\mu ; \tag{44}$$

$$\delta^* A_\mu = 0, \quad \delta^*\psi = \alpha_\nu [x^2 \partial_\nu - 2 x_\nu (x\partial) - 2 x_\nu - \gamma_\nu (\gamma x)] \psi ;$$

$$\delta^*_\psi \mathfrak{L} = - \delta^* \bar\psi [(\gamma\partial + m) \psi - i e \gamma_\mu \psi A_\mu] - j_\mu \delta^* A_\mu -$$

$$- \alpha_\nu \bar\psi [x^2 \partial_\nu - 2 x_\nu (x\partial) - 4 x_\nu - \gamma_\nu (\gamma x)] [(\gamma\partial + m) \psi - i e \gamma_\mu \psi A_\mu] - 2(\alpha x) m \bar\psi\psi =$$

$$= - 2(\alpha x) m \bar\psi\psi - j_\mu \delta^* A_\mu . \tag{45}$$

Здесь a_ν –бесконечно малый параметр, а $\delta^* A_\mu$ – в последнем выражении лишь сокращенное обозначение. В последней строке учтено уравнение Дирака. Выбирая $\delta^* f_\mu = a_\nu \frac{1}{4}(x^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu) F_{\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$ в первом случае и $\delta^* f_\mu = 0$ во втором, находим плотности и соответствующие уравнения движения вида

$$V^A_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}\{[x^2 \partial_\nu - 2x_\nu(x\partial) - 2x_\nu] A_\lambda - 2\delta_{\lambda\nu}(xA) + 2x_\lambda A_\nu\} - \frac{1}{4}(x^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu) F^2_{\lambda\rho}$$

$$\partial_\mu V^A_{\mu\nu} = -j_\mu \{[x^2 \partial_\nu - 2x_\nu(x\partial) - 2x_\nu] A_\mu - 2\delta_{\mu\nu}(xA) + 2x_\mu A_\nu\} \quad ; \qquad (46)$$

$$V^\psi_{\mu\nu} = \bar\psi \gamma_\mu [x^2 \partial_\nu - 2x_\nu(x\partial) - 2x_\nu - \gamma_\nu(\gamma x)] \psi \quad ;$$

$$\partial_\mu V^\psi_{\mu\nu} = 2x_\nu m\bar\psi\psi + j_\mu \{[x^2 \partial_\nu - 2x_\nu(x\partial) - 2x_\nu] A_\mu - 2\delta_{\mu\nu}(xA) + 2x_\mu A_\nu\}. \qquad (47)$$

Отметим, что суммарные плотности $V_\mu = V^A_\mu + V^\psi_\mu$ и $V_{\mu\nu} = V^A_{\mu\nu} + V^\psi_{\mu\nu}$ тоже не сохраняются:

$$\partial_\mu V_\mu = -m\bar\psi\psi \ , \qquad \partial_\mu V_{\mu\nu} = 2x_\nu m \bar\psi\psi \ , \qquad (48)$$

но при $m = 0$ электродинамика становится конформно инвариантной и эти соотношения превращаются в законы сохранения [x)]. Поскольку общая теория относительности инвариантна относительно любых преобразований координат, в том числе и относительно конформных, плотность $V^\mu_\phi + V^\mu_g$, как видно из (42) и (43), сохраняется.

д) Ф а з о в ы е   п р е о б р а з о в а н и я. В качестве примера фазовых преобразований рассмотрим преобразования $SU(2) \times SU(2)$. Пусть плотность лагранжиана построена из трех полей: векторного ρ^i_μ (спин 1, изоспин 1), псевдовекторного a^i_μ (спин 1, изоспин 1) и псевдоскалярного ϕ^i (спин 0, изоспин 1), и имеет вид

---

x) Факт конформной инвариантности электродинамики и теорий с взаимодействиями $g\phi^4$, $g\bar\psi\gamma_5\psi\phi$ и др. при нулевых массах всех полей сообщен автору В.И. Огиевецким в период совместной работы над статьей /14/.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^i_{\mu\nu}G^i_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}(\rho^i_\mu\rho^i_\mu + a^i_\mu a^i_\mu) -$$
$$-\frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi^i)^2 - \frac{1}{2}(\nabla_\mu\sigma)^2 + m^2_\pi f\sigma . \tag{49}$$

Здесь используются следующие сокращенные обозначения:

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho^i_\nu - \partial_\nu\rho^i_\mu - \gamma\epsilon_{ijk}(\rho^j_\mu\rho^k_\nu + a^j_\mu a^k_\nu) ,$$

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\mu a^i_\nu - \partial_\nu a^i_\mu - \gamma\epsilon_{ijk}(\rho^j_\mu a^k_\nu + \rho^j_\nu a^k_\mu) ,$$

$$\nabla_\mu\phi^i = \partial_\mu\phi^i - \gamma\epsilon_{ijk}\rho^j_\mu\phi^k + \gamma\sigma a^i_\mu , \quad \nabla_\mu\sigma = \partial_\mu\sigma - \gamma a^i_\mu\phi^i ,$$

а γ и f – константы связи. Величина σ (скаляр и изоскаляр) – сокращенное обозначение нелинейной комбинации, построенной из ϕ^i и определяемой соотношением

$$\sigma^2 + \phi^i\phi^i = f^2$$

(модель Гелл-Манна и Леви /1/). Безмассовая часть плотности инвариантна относительно следующих киральных $SU(2)\times SU(2)$ – преобразований:

$$\delta^*\rho^i_\mu = \partial_\mu\alpha_i + \gamma\epsilon_{ijk}(\alpha_j\rho^k_\mu + \beta_j a^k_\mu) , \quad \delta^* a^i_\mu = \partial_\mu\beta_i + \gamma\epsilon_{ijk}(\alpha_j a^k_\mu + \beta_j\rho^k_\mu) ,$$

$$\delta^*\phi^i = \gamma\epsilon_{ijk}\alpha_j\phi^k - \gamma\beta_i\sigma , \qquad \delta^*\sigma = \gamma\beta_i\phi^i , \tag{50}$$

с параметрами α_i и β_i – функциями от x_μ. Для получения токов достаточно ограничиться подгруппой с параметрами-константами. Варьируя поля ρ^i_μ, a^i_μ и ϕ^i, приходим к следующим токам и уравнениям движения:

A) $\underline{\alpha_i \neq 0, \quad \beta_i = 0}$

1) $\delta^*\rho^i_\mu = \gamma\epsilon_{ijk}\alpha_j\rho^k_\mu , \qquad \delta^* a^i_\mu = \delta^*\phi^i = 0 ,$

$$\delta^*_\rho\mathcal{L} = \gamma^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{mn}\alpha_m[F^i_{\mu\nu}a^k_\mu a^n_\nu + G^i_{\mu\nu}\rho^n_\mu a^k_\nu + \nabla_\mu\phi^i\rho^n_\mu\phi^n] ,$$

$$j^{(\rho)i}_{\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \rho^i_\nu)} \gamma \epsilon_{ijk}\, \rho^k_\nu = \gamma \epsilon_{ijk} F^i_{\mu\nu}\, \rho^k_\nu, \quad \partial_\mu j^{(\rho)\ell}_\mu = -\frac{\partial}{\partial z_\ell} \delta^*_\rho \mathfrak{L} \; .$$

2) $\delta^* a^i_\mu = \gamma \epsilon_{ijk}\, \alpha_j\, a^k_\mu , \qquad \delta^* \rho^i_\mu = \delta^* \phi^i = 0 ,$

$$\delta^*_a \mathfrak{L} = \gamma^2 \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{jmn}\, \alpha_m [F^i_{\mu\nu} a^n_\mu a^k_\nu - G^i_{\mu\nu} \rho^n_\mu a^k_\nu] - \gamma^2 \epsilon_{ijk} \alpha_j a^k_\mu [\sigma \nabla_\mu \phi^i - \phi^i \nabla_\mu \sigma] \quad ,$$

$$j^{(a)j}_{\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu a^i_\nu)} \gamma \epsilon_{ijk}\, a^k_\nu = \gamma \epsilon_{ijk}\, G^i_{\mu\nu} a^k_\nu \;, \quad \partial_\mu j^{(a)\ell}_\mu = -\frac{\partial}{\partial \iota_\ell} \delta^*_a \mathfrak{L} .$$

3) $\delta^* \phi^i = \gamma \epsilon_{ijk}\, \alpha_j \phi^k \;, \qquad \delta^* \rho^i_\mu = \delta^* a^i_\mu = 0 \;,$

$$\delta^*_\phi \mathfrak{L} = -\gamma^2 \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{jmn} \alpha_m \nabla_\mu \phi^i \rho^n_\mu \phi^k + \gamma^2 \epsilon_{ijk}\, \alpha_j\, a^k_\mu (\sigma \nabla_\mu \phi^i - \phi^i \nabla_\mu \sigma) ,$$

$$j^{(\phi)j}_\mu = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} \gamma \epsilon_{ijk}\, \phi^k = \gamma \epsilon_{ijk}\, \nabla_\mu \phi^i \phi^k \;, \quad \partial_\mu j^{(\phi)\ell}_\mu = -\frac{\partial}{\partial \iota_\ell} \delta^*_\phi \mathfrak{L} .$$

Б) $\underline{\alpha_1 = 0 , \quad \beta_1 \neq 0}$

4) $\delta^* \rho^i_\mu = \gamma \epsilon_{ijk}\, \rho_j\, a^k_\mu \;, \quad \delta^* a^i_\mu = \delta^* \phi^i = 0 \;,$

$$\delta^*_\rho \mathfrak{L} = -\frac{1}{2} \gamma \epsilon_{ijk}\, \beta_j F^i_{\mu\nu} G^k_{\mu\nu} + \gamma^2 \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{jmn}\, \beta_m (F^i_{\mu\nu} a^k_\mu \rho^n_\nu + G^i_{\mu\nu} a^n_\mu a^k_\nu + \nabla_\mu \phi^i a^n_\mu \phi^k),$$

$$j^{(\rho)j}_{5\mu} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu \rho^i_\nu)} \gamma \epsilon_{ijk}\, a^k_\nu = \gamma \epsilon_{ijk} F^i_{\mu\nu} a^k_\nu \;, \quad \partial_\mu j^{(\rho)\ell}_{5\mu} = -\frac{\partial}{\partial \beta_\ell} \delta^*_\rho \mathfrak{L} .$$

$$5)\quad \delta^* a^i_\mu = \gamma\,\epsilon_{ijk}\beta_j\rho^k_\mu \quad , \; \delta^*\rho^i_\mu = \delta^*\phi^i = 0,$$

$$\delta^*_a \mathfrak{L} = -\frac{1}{2}\gamma\epsilon_{ijl}\beta_j G^l_{\mu\nu}F^k_{\mu\nu} + \gamma^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{jmn}\beta_m(F^i_{\mu\nu}\rho^n_\mu a^k_\nu + G^i_{\mu\nu}a^k_\mu a^n_\nu) -$$

$$-\gamma^2\epsilon_{ijk}\beta_j(\sigma\nabla_\mu\phi^i - \phi^i\nabla_\mu\sigma)\rho^k_\mu ,$$

$$j^{(a)j}_{5\mu} = -\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu a^i_\nu)}\gamma\epsilon_{ijk}\rho^k_\nu = \gamma\epsilon_{ijk}G^i_{\mu\nu}\rho^k_\nu , \quad \partial_\mu j^{(a)\ell}_{5\mu} = -\frac{\partial}{\partial\beta_\ell}\delta^*_a\mathfrak{L} .$$

$$6)\quad \delta^*\phi^i = -\gamma\beta_i\sigma , \; \delta^*\sigma = \gamma\beta_i\phi^i , \quad \delta^*\rho^i_\mu = \delta^* a^i_\mu = 0,$$

$$\delta^*_\phi\mathfrak{L} = -\gamma^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{jmn}\beta_m a^n_\mu\phi^k\nabla_\mu\phi^i - \gamma^2\epsilon_{ijk}\beta_j\rho^k_\mu(\sigma\nabla_\mu\phi^i - \phi^i\nabla_\mu\sigma) + m^2_\pi f\gamma\beta_i\phi^i ,$$

$$j^{(\phi)j}_{5\mu} = \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^j)}\gamma\sigma = -\gamma(\sigma\nabla_\mu\phi^j - \phi^j\nabla_\mu\sigma), \quad \partial_\mu j^{(\phi)\ell}_{5\mu} = -\frac{\partial}{\partial\beta_\ell}\delta^*_\phi\mathfrak{L}.$$

Векторный ток $j^i_\mu = j^{(\rho)i}_\mu + j^{(a)i}_\mu + j^{(\phi)i}_\mu$ сохраняется, а псевдовекторный $j^i_{5\mu} = j^{(\rho)i}_{5\mu} + j^{(a)i}_{5\mu} + j^{(\phi)i}_{5\mu}$ подчиняется известному соотношению PCAC

$$\partial_\mu j^i_{5\mu} = -m^2_\pi f\,\phi^i . \tag{52}$$

§4. Несохраняющиеся операторы как генераторы

Если попробовать воспользоваться операторами P_μ^A, P_μ^ψ, K_ν^A и K_ν^ϕ как генераторами, то с помощью перестановочных соотношений

$$[A_\mu(x), \partial_4 A_\nu(y)]_{x_0=y_0} = \delta_{\mu\nu}\delta(\vec{x}-\vec{y}), \quad \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}_{x_0=y_0} = \gamma\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{53}$$

(остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю) получим следующие бесконечно малые преобразования:

$$\bar{\delta} A_\mu(x) = ic_\nu[P_\nu^A(x_0), A_\mu(x)] = -c_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \qquad = \delta^* A_\mu,$$

$$\bar{\delta}\,\partial_4 A_\mu(x) = ic_\nu[P_\nu^A(x_0), \partial_4 A_\mu(x)] = -c_\nu \partial_\nu \partial_4 A_\mu(x) - c_4 j_\mu(x) \neq \delta^* \partial_4 A_\mu,$$

$$\bar{\delta}\psi(x) = ic_\nu[P_\nu^A(x_0), \psi(x)] = 0 \qquad = \delta^*\psi \tag{54}$$

$$\bar{\delta} A_\mu(x) = ic_\nu[P_\nu^\psi(x_0), A_\mu(x)] = 0 \qquad = \delta^* A_\mu,$$

$$\bar{\delta}\,\partial_4 A_\mu(x) = ic_\nu[P_\nu^\psi(x_0), \partial_4 A_\mu(x)] = c_4 j_\mu(x) \qquad \neq \delta^*\partial_4 A_\mu,$$

$$\bar{\delta}\psi(x) = ic_\nu[P_\nu^\psi(x_0), \psi(x)] = -c_\nu\partial_\nu\psi(x) \qquad = \delta^*\psi, \tag{55}$$

$$\bar{\delta} A_\mu(x) = ic_\nu[K_\nu^A(x_0), A_\mu(x)] = -c_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \qquad = \delta^* A_\mu,$$

$$\bar{\delta}\,\partial_4 A_\mu(x) = ic_\nu[K_\nu^A(x_0), \partial_4 A_\mu(x)] = -c_\nu\partial_\nu\partial_4 A_\mu - c_4 j_\mu + c_\mu j_4(x) \neq \delta^*\partial_4 A_\mu,$$

$$\bar{\delta}\psi(x) = ic_\nu[K_\nu^A(x_0), \psi(x)] = -iec_\nu A_\nu\psi(x) \qquad \neq \delta^*\psi(x), \tag{56}$$

$$\delta A_\mu(x) = i c_\nu [K^{\psi}_{\nu}(x_0), A_\mu(x)] = 0 , \qquad = \delta^* A_\mu ,$$

$$\bar{\delta}\, \partial_4 A_\mu(x) = i c_\nu [K^{\psi}_{\nu}(x_0)\, \partial_4 A_\mu(x)] = c_4 j_\mu(x) - c_\mu j_4(x) \neq \delta^* \partial_4 A_\mu ,$$

$$\bar{\delta}\, \psi(x) = i c_\nu [K^{\psi}_{\nu}(x_0), \psi(x)] = -c_\nu (\partial_\nu - ie A_\nu) \psi(x) \neq \delta^* \psi . \qquad (57)$$

Таким образом, несохраняющиеся операторы не всегда генерируют исходные преобразования. К этому же выводу можно прийти, рассмотрев перестановочные соотношения для операторов $P^A_\nu(x_0)$ и $P^{\psi}_\nu(x_0)$,

$$[P^A_\mu(x_0), P^A_\nu(x_0)] = [P^{\psi}_m(x_0), P^{\psi}_n(x_0)] = [P^A_m(x_0), P^{\psi}_n(x_0)] = 0 ;$$

$$[P^{\psi}_m(x_0), P^{\psi}_0(x_0)] = -[P^A_m(x_0), P^{\psi}_0(x_0)] \neq 0 \qquad (m, n \neq 4) . \qquad (58)$$

Вместе с тем ясно, что операторы P^A_m и P^{ψ}_m правильно воспроизводят исходные трехмерные преобразования, и бесконечно малые, и конечные.

То, что исходные преобразования воспроизводятся не точно, связано с тем, что обсуждаемые вариации не есть с-числа. Для с-числовых вариаций требование, чтобы несохраняющиеся операторы генерировали именно исходные преобразования, эквивалентно стандартной процедуре канонического квантования (Швингер /5/).

§5. Замечание о спектрах собственных значений

Без потери общности перестановочным соотношениям (53) для полей A_μ и ψ можно удовлетворить, представив x)

x) Обозначения и комментарии см. в Приложении I.

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2|\vec{p}|}} e^{i\vec{p}\vec{x}} [a_\mu(\vec{p},t) + a^+_\mu(-\vec{p},t)] , \tag{59а}$$

$$\partial_4 A_\mu(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d\vec{p}}{\sqrt{2|\vec{p}|}} e^{i\vec{p}\vec{x}} |\vec{p}| [-a_\mu(\vec{p},t) + a_\mu(-\vec{p},t)] , \tag{59б}$$

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d\vec{p} e^{i\vec{p}\vec{x}} \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} [b(\vec{p},s,t)u(\vec{p},s) \quad c^+(-\vec{p},s,t) Cu^T(-\vec{p},s)] . \tag{60}$$

Здесь операторы уничтожения и рождения подчиняются перестановочным соотношениям

$$[a_\mu(\vec{p},t) , a^+_\nu(\vec{q},t)] = \delta_{\mu\nu}\delta(\vec{p}-\vec{q})$$

$$\{b(\vec{p},s,t), b^+(\vec{q},s',t)\} = \{c(\vec{p},s,t), c^+(\vec{q},s',t)\} = \delta_{ss'}\delta(\vec{p}-\vec{q}) , \tag{61}$$

а остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю.

Подставляя разложения (59) и (60) в оператор заряда $Q^\psi = \frac{e}{2}\int d\vec{x}[\bar{\psi},\gamma_4\psi]$ и в операторы P^A_ν (28) и P^ψ_ν (29), получаем

$$Q^\psi(t) = e \int d\vec{p} \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big(b^+(\vec{p},s,t)b(\vec{p},s,t) - c^+(\vec{p},s,t)c(\vec{p},s,t)\Big), \tag{62}$$

$$P^A_m(t) = \int d\vec{p}\, p_m a^+_\nu(\vec{p},t)a_\nu(\vec{p},t) \qquad (m = 1,2,3), \tag{63}$$

$$P^A_0(t) = \int d\vec{p}\, |\vec{p}| \Big(a^+_\nu(\vec{p},t)a_\nu(\vec{p},t) + 2\delta(\vec{0})\Big) , \tag{64}$$

$$P^\psi_m(t) = \int d\vec{p}\, p_m \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big(b^+(\vec{p},s,t)b(\vec{p},s,t) + c^+(\vec{p},s,t)c(\vec{p},s,t)\Big), \tag{65}$$

$$P^\psi_0(t) = -\frac{1}{2}\int d\vec{p} \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \Big(b^+(\vec{p},s,t)\partial_4 b(\vec{p},s,t) + b(\vec{p},s,t)\partial_4 b^+(\vec{p},s,t) +$$

$$+ c^+(\vec{p},s,t)\partial_4 c(\vec{p},s,t) + c(\vec{p},s,t)\partial_4 c^+(\vec{p},s,t)\Big) =$$

$$= \int d\vec{p}\left\{\omega \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left(b^+(\vec{p},s,t)b(\vec{p},s,t) + c^+(\vec{p},s,t)c(\vec{p},s,t) - \delta(\vec{0})\right) + \right.$$

$$\left. - \frac{ie}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{2|\vec{k}|}} \left(a_\mu(\vec{k},t) + a^+_\mu(-\vec{k},t)\right) \frac{1}{2}[\bar{w}(\vec{p}+\vec{k},t)\gamma_\mu w(\vec{p},t)]\right\}, \tag{66}$$

где обозначено

$$w(\vec{p},t) = \sum_{s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \left(b(\vec{p},s,t)u(\vec{p},s) + c^+(-\vec{p},s,t)C\,\bar{u}^T(-\vec{p},s)\right).$$

В последнем выражении (66), полученном из первого с помощью уравнения Дирака, остались только канонически независимые переменные.

Из выражений (62)-(65) ясно, что операторы Q^ψ, P^Λ_m, P^ψ_m, $P_m = P^\Lambda_m + P^\psi_m$ и P_0^Λ обладают в точности теми же спектрами, что и в свободном случае. Это следует из перестановочных соотношений (61) (мы игнорируем представления, отличные от представления Фока). Очевидно, что при учете неопределенной метрики спектр P_0^Λ положителен. В то же время, если не обращаться к адиабатической гипотезе, трудно что-либо сказать о спектре оператора P_0^ψ x). Неясно даже, является ли он положительным. Вместе с тем, приближенно решая уравнения электродинамики, удается согласовывать спектр энергии с физическим при помощи теории перенормировок и адиабатической гипотезы. Уровни связанных состояний хорошо определяются в нерелятивистском приближении: строгое уравнение для связанных состояний, следующее из теории поля, - уравнение Бете-Солпитера - можно приближенно свести к уравнению Шредингера и этим путем получить правильный спектр атома водорода и т.п. Переходя к более точным аппроксимациям, можно вычислить тонкую и сверхтонкую (лэмбовский сдвиг) структуру уровней атома водорода.

---

x) Правомерна или нет адиабатическая гипотеза для данного конкретного взаимодействия - вопрос открытый. См. Приложение II .

§6. *Пример преобразований с параметром-функцией*

Выше мы рассматривали преобразования с параметрами-константами. Теперь обратимся к преобразованиям с параметром-функцией – к калибровочным преобразованиям:

$$\delta^* A_\mu(x) = \partial_\mu \Lambda(x), \qquad \delta^*\psi(x) = ie\,\Lambda(x)\,\psi(x). \tag{67}$$

Лагранжиан $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{2} M^2 A_\mu A_\mu$ с $\mathcal{L}$ вида (35) неинвариантен относительно них:

$$\delta^*\mathcal{L}' = -\partial_\mu(M^2 A_\mu \Lambda) + M^2 \Lambda \partial_\mu A_\mu. \tag{68}$$

Следуя процедуре §2 и выбирая $\delta^* f_\mu = M^2 A_\mu \Lambda$, получаем

$$V_\mu(x) = \partial_\nu (F_{\mu\nu}\Lambda) + (\partial_\nu F_{\nu\mu} - M^2 A_\mu + j_\mu)\Lambda, \quad \partial_\mu V_\mu = -M^2 \Lambda \partial_\mu A_\mu, \tag{69}$$

Любопытно, что после учета уравнений движения плотность $V_\mu(x)$ оказывается равной нулю с точностью до первого члена, который сохраняется "автоматически". Следовательно, уравнение есть просто $0 = -M^2 \Lambda \partial_\mu A_\mu$. Этот вывод условия $\partial_\mu A_\mu = 0$ соответствует вариационному методу, развитому в /6/, и типичен для всех теорий рассматриваемого там типа, в том числе и для киральных (например, с лагранжианом (49)).

Приложение I

Очевидно, что разложением (59а) операторы a_μ и a^+_μ еще не определяются (их нельзя отделить друг от друга). С этим произволом боролись, например, путем ограничения области интегрирования по $\vec{p}$ полупространством всех значений $\vec{p}$ /16/, что нековариантно даже в трехмерном смысле. Выбрав $\partial_4 A_\mu$ в виде (59б), мы распорядились этим произволом по-другому, в тесном соответствии со свободным случаем. При выключении взаимодействия операторы $a_\mu(\vec{p},t)$ и $a^+_\mu(\vec{p},t)$ однозначно переходят соответственно в $a_\mu(\vec{p})e^{-i|\vec{p}|t}$ и $a^+_\mu(\vec{p})e^{i|\vec{p}|t}$, где $a_\mu(\vec{p})$ и $a^+_\mu(\vec{p})$ – обычные свободные операторы уничтожения и рождения. То, что введение $a_\mu(\vec{p},t)$ и $a_\mu(\vec{p},t)$ не сопряжено с насилием, ясно из следующего. Первоначально имеем

$$A_\mu(x) = \int d\vec{p}e^{i\vec{p}\vec{x}} A_\mu(\vec{p},t), \quad \dot{A}_\mu(x) = \int d\vec{p}\, e^{i\vec{p}\vec{x}} B_\mu(\vec{p},t) \tag{П.1}$$

с тремя условиями:

$$A^+_\mu(\vec{p},t) = A_\mu(-\vec{p},t), \; B^+_\mu(\vec{p},t) = -B_\mu(-\vec{p},t), \; \dot{A}_\mu(\vec{p},t) = B_\mu(\vec{p},t) \tag{П.2}$$

(первые два гарантируют эрмитовость $A_\mu(x)$ и $\dot{A}_\mu(x)$). Вводя неэрмитовы операторы

$$a_\mu(\vec{p},t) = \frac{1}{2}\sqrt{(2\pi)^3\, 2|\vec{p}|}\;\left[A_\mu(\vec{p},t) + \frac{i}{|\vec{p}|}B_\mu(\vec{p},t)\right] \tag{П.3}$$

и выражая отсюда $A_\mu(\vec{p},t)$ и $B_\mu(\vec{p},t)$ через $a_\mu(\vec{p},t)$ и $a^+_\mu(-\vec{p},t)$, приходим к (59), где первые два условия (П.2) учтены полностью, а о третьем (несущественном для нас здесь) нужно помнить:

$$\partial_4 [a_\mu(\vec{p},t) + a^+_\mu(-\vec{p},t)] = |\vec{p}|\,[-a_\mu(\vec{p},t) + a^+_\mu(-\vec{p},t)]. \tag{П.4}$$

От $a_\mu(\vec{p},t)$ и $a^+_\mu(\vec{p},t)$ можно перейти к соответствующим "координатам" и "импульсам":

$$q_\mu(\vec{p},t) = \frac{a_\mu(\vec{p},t) + a^+_\mu(\vec{p},t)}{\sqrt{2|\vec{p}|}}, \quad p_\mu(\vec{p},t) = -i\sqrt{\frac{|\vec{p}|}{2}}\,[a_\mu(\vec{p},t) - a^+_\mu(\vec{p},t)]\,. \tag{П.5}$$

Поле $A_\mu(x)$ и его временная производная $\dot{A}_\mu(x)$ следующим образом выражаются через координаты $q_\mu(\vec{p},t)$ и импульсы $p_\mu(\vec{p},t)$:

$$A_\mu(x) = (2\pi)^{-3/2}\frac{1}{2}\int d\vec{p}e^{i\vec{p}\vec{x}}\left\{[q_\mu(\vec{p},t) + q_\mu(-\vec{p},t)] + \frac{i}{|\vec{p}|}[p_\mu(\vec{p},t) - p_\mu(-\vec{p},t)]\right\}, \tag{П.6}$$

$$\partial_4 A_\mu(x) = (2\pi)^{-3/2}\frac{1}{2}\int d\vec{p}e^{i\vec{p}\vec{x}}\left\{|\vec{p}|[-q_\mu(\vec{p},t) + q_\mu(-\vec{p},t)] + i[p_\mu(\vec{p},t) + p_\mu(-\vec{p},t)]\right\}. \tag{П.7}$$

Выражение (60), подобно (59), есть разложение по полной системе функций /15/

$$u(\vec{p},s), \qquad v(\vec{p},s)=C\,\bar{u}^{T}(-\vec{p},s) \qquad (s=-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

с-числовых положительно- и отрицательночастотных решений свободного уравнения Дирака в p -представлении с энергией $\omega=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}$.

C - матрица зарядового сопряжения, а T обозначает операцию транспонирования. При вычислении (62), (65) и (66) используются свойства ортонормировки

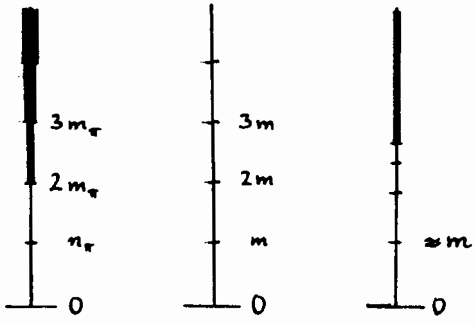
$$\bar{u}(\vec{p},s')\gamma_4 u(\vec{p},s)=\bar{v}(\vec{p},s')\gamma_4 v(\vec{p},s)=\delta_{ss'};\ \bar{u}(\vec{p},s')\gamma_4 v(\vec{p},s)=\bar{v}(\vec{p},s')\gamma_4 u(\vec{p},s)=0. \quad (\Pi.8)$$

Введение операторов уничтожения $a_\mu(\vec{p},t)$, $b(\vec{p},s,t)$ и $c(\vec{p},s,t)$ и рождения $a^+_\mu(\vec{p},t)$, $b^+(\vec{p},s,t)$ и $c^+(\vec{p},s,t)$ позволяет говорить о соответствующей операции N -упорядочивания (операторы с крестом располагаются слева от операторов без креста). Этим путем упорядочиваются операторы, относящиеся к одному моменту времени.

Другие определения N -произведения гайзенберговских операторов обсуждались в /17/. Еще одна возможность следует из разложимости гайзенберговских операторов по in - или out -операторам поля /18/.

Приложение II

Если ограничиться только сильными взаимодействиями, то экспериментальный спектр масс устроен, как на рис. а). Полевые теории обычно строятся так. Сперва записывают свободный гамильтониан $H_0(\pi, K,..)$, который по построению обладает спектром типа а), а затем (произвольно) выбирают взаимодействие V и считают, что полный гамильтониан H_0+V после перенормировок снова имеет спектр типа а).



а) б) в)

а) – экспериментальный спектр масс π -мезонов (вакуум, одно-π -мезонное состояние, начинающийся с $2m_\pi$ непрерывный спектр двух-π -мезонных состояний, . . .);

б) – аналог экспериментального спектра для случая одномерных моделей;

в) – спектр, отвечающий потенциалам 2) и 3), нижние уровни смещены по сравнению с б), а верхние заменились непрерывным спектром.

Обсудим с этой точки зрения одномерные модели, причем ограничимся случаем одного поля. Здесь все, как в "настоящей" теории:

лагранжиан: $L = \int dt\, \mathcal{L}(t)$;

плотность лагранжиана: $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}\dot\phi^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi)$, где $V(\phi)$ – взаимодействие;

импульс: $p(t) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = \dot\phi$;

одновременные перестановочные соотношения: $[\phi(t), p(t)] = i$;

гамильтониан: $H = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\dot\phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot\phi^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi)$;

уравнение движения: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = -\ddot\phi - m^2\phi + \dfrac{dV}{d\phi} = 0.$

Из уравнения движения следует, в частности, что гамильтониан сохраняется, $\dfrac{dH}{dt} = 0$. Для отыскания спектра гамильтониана требуется решить уравнение на собственные значения

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi)\right]\Phi = E\Phi,$$

которое мы записали в представлении, где ϕ диагонально. Это – самое общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Рассмотрим несколько уравнений, имеющих точные решения /19/.

1) Свободный случай (по терминологии теории поля): $V(\phi)=0$. Это – уравнение для функций Эрмита со спектром $E-\frac{m}{2}=0,\ m,\ 2m,\ 3m,\ldots$, изображенным на рис. б).

2) $\frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) = \frac{m^2}{2g^2}(e^{-g\phi}-1)^2$ (потенциал Морса).

Спектр в этом случае имеет дискретную часть $E_n = m(n+\frac{1}{2}) - \frac{g^2}{2}(n+\frac{1}{2})^2$, пока $(n+\frac{1}{2}) < \frac{m}{g^2}$ $(n=0,1,\ldots)$, и непрерывен начиная с $n+\frac{1}{2}=\frac{m}{g^2}$ (рис. в)).

3) $\frac{m^2}{2}\phi^2 - V(\phi) = \frac{m^2}{2g^2}\,\mathrm{th}^2\, g\phi$. Спектр снова имеет дискретную часть

$$E_n = \sqrt{m^2+\frac{g^2}{4}}\,(n+\frac{1}{2}) - \frac{g^2}{2}(n+\frac{1}{2})^2, \qquad \text{пока } n+\frac{1}{2} < \frac{1}{g^2}\sqrt{m^2+\frac{g^2}{4}},$$

а, начиная с $n+\frac{1}{2}=\frac{1}{g^2}\sqrt{m^2+\frac{g^2}{4}}$, непрерывен.

4) $V(\phi)=\frac{g}{2\phi^2}$. В этом случае спектр дискретен и состоит из двух серий /20/ x):

$$E_{n=2\ell+1} = m\left[2\ell+1+\sqrt{g+\frac{1}{4}}\right], \quad E_{n=2\ell} = m\left[2\ell+1-\sqrt{g+\frac{1}{4}}\right].$$

5) Ангармонический осциллятор $V(\phi)=-\frac{\lambda}{4}\phi^4$ рассматривается в рамках теории возмущений, которая дает /19,21/

$$E_n = m(n+\frac{1}{2}) + \frac{3\lambda}{m^2}(n^2+n+\frac{1}{2}) + \ldots$$

Итак, выбор взаимодействия наобум в одномерном случае, как правило, искажает спектр. Перенормировками спасти положение нельзя.

Поскольку, однако, по заданному спектру, содержащему дискретную часть, уравнение второго порядка восстанавливается неоднозначно /22/,

---

x) В /19/ (стр. 156) оставлена только одна из них.

то в принципе, кроме уравнения Эйлера ("свободного уравнения"), можно построить другие уравнения с тем же спектром ("уравнения с взаимодействием"). Неоднозначность такого сорта иллюстрируется взаимодействиями 2) и 3), которые с точностью до переобозначений констант дают один и тот же спектр.

Выделение допустимых классов взаимодействий (в духе решения обратной задачи Штурма-Лиувилля /22/) может оказаться насущной задачей.

Литература

1. J.Schwinger. Ann.Phys.(N.Y.), 2, 407 (1957); M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cim., 16, 705 (1960); F.Gürsey. Ann.Phys.(N.Y.), 12, 91 (1961); M.Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067 (1962); S.Weinberg. Phys. Rev.Lett., 18, 188 (1967); J.Schwinger. Phys.Lett., 24B, 473 (1967); J.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 163, 1727 (1967); B.W.Lee, H.T.Nieh. Phys.Rev., 166, 1507 (1968).

2. H.A.Lorentz. Verlagen der Afdeeling Natuurkindige (Amsterdam), 23, 1073 (1915); 24, 1389, 1759 (1916); 25, 468, 1380 (1916). D.Gilbert. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., N3, 395 (1915) (имеется перевод в сборнике "Вариационные принципы механики", ФМ, Москва, 1959 г., стр. 589).

   F.Klein. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., N3, 469 (1917); N2, 171 (1918); N3, 394 (1918).

   H.Weyl. Ann. d. Phys., 54, 117 (1917).

   E.Noether. Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., N2, 235 (1918) (имеется перевод в сборнике "Вариационные принципы механики", ФМ, Москва, 1959 г., стр. 621).

3. В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, Москва, 1947.
4. М.А. Марков. ЖЭТФ, 7, 579 (1937).
5. Ю. Швингер. Теория квантованных полей. ИЛ, Москва, 1956.
6. V.I.Ogievetsky, I.V.Polubarinov. Nucl.Phys.,76,677 (1966); Ann.Phys. (N.Y.), 35, 167 (1965).
7. I.Bialynicki- Birula.Acta Physica Polonica, 17 153 (1958).
8. C.N.Yang, R.L.Mills. Phys.Rev., 96, 191 (1954).
9. E.Bessel-Hagen. Math.Ann., 84, 258 (1921).
10. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 41, 247 (1961).
11. R.Utiyama. Phys.Rev., 101, 1597 (1956).
12. Р. Беккер. Теория электричества, т.2, ГИТТЛ, Ленинград-Москва, 1941.
13. A.Gamba. Amer.Journ.of Phys., 35, 83 (1967).
14. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. ЖЭТФ, 37, 470 (1959).
15. В.А. Фок. Работы по квантовой теории поля. Изд-во Ленинградского университета, 1957 ; Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1947 стр. 226.
16. В. Гайтлер. Квантовая теория излучения, ИЛ, Москва, 1956.
17. E.Freese. Zs.für Naturf., 8a, 776 (1953) ;
K.Nishijima.Progr.Theor.Phys., 10, 549 (1953);
W.Heisenberg. Zs.f.Naturf., 9a, 292 (1954).
18. V.Glaser, H.Lehmann, W.Zimmerman.Nuovo Cim., 6, 1122 (1957); См. также: С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, Москва, 1963, стр. 717-720.
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. Квантовая механика, ФМ, Москва, 1963; Ф.М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. I и II , ИЛ, Москва, 1958.
20. Г. Сеге. Ортогональные полиномы, ФМ, 1962, стр. 109.
21. W.Heisenberg. Zs.f.Phys., 33, 879 (1925); Nachr.Akad.Wiss. Göttingen, N.8, 111 (1953);
(см. перевод в сб. "Нелинейная квантовая теория поля", ИЛ, Москва, 1954, стр. 41).
22. В.А. Марченко. ДАН СССР, 72, 457 (1950); И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан. Изв. АН СССР, серия матем., 15, 309 (1951).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1969 года.