СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 4356

В.А.Мещеряков, К.В.Рерих

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ МАТРИЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ S-МАТРИЦЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4356

В.А.Мещеряков, К.В.Рерих

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ МАТРИЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ СТАТИЧЕСКОЙ S-МАТРИЦЫ

1. Введение

Известно, что проблема нахождения всех решений уравнений типа уравнений Чу-Лоу сводится к отысканию всех решений следующей системы нелинейных функциональных уравнений для матричных элементов S -матрицы:

$$S_i(w)\,S_i(1-w)=1,$$
$$S_i(-w)=\sum_j A_{ij}\,S_j(w) \tag{1.1}$$

в классе мероморфных действительных $(S_i^*(w)=S_i(w^*))$ функций комплексного переменного $w=\frac{1}{\pi}\arcsin\omega$, где ω - энергия налетающей частицы в системе центра масс, а A_{ij} - элементы матрицы $(n\times n)$ кроссинг-симметрии со свойствами $A^2=E$ и $\sum_j A_{ij}=1$ (см., например,/1/). Общие методы решения таких уравнений, по-видимому, отсутствуют. В работах/1,2/ был развит метод построения всех решений (1.1), для которых любое из отношений $S_i(w)/S_j(w)$ содержит конечное число полюсов в плоскости w. Однако в работе/3/ на примере матрицы A(1.1) было показано, что этим классом не исчерпываются все решения (1.1) и существуют, вообще говоря, решения, для которых хотя бы одно из отношений $S_i(w)/S_j(w)$ обладает бесконечным числом полюсов. Определяющим моментом при нахождении решений в/3/ явилось наличие функциональной связи $S_2(w)=-S_3(w)$. Очевидно, что знание функциональных зависимостей между S_i существенно упрощает решение системы урав-

нений (1.1). Поэтому представляет большой интерес задача нахождения функциональных связей в уравнениях типа уравнений Чу-Лоу. Ниже будет предложен алгоритм для нахождения некоторого класса функциональных связей с использованием компьютера.

2. *Алгоритм для нахождения полиномиальных функциональных связей с помощью компьютера*

Хорошо известно /1,4/, что уравнение (1.1) не определяет решение однозначно и допускает так называемый $\beta(w)$ – и $D(w)$ – произвол, а именно: если $S_i(w)$ – решение (1.1), то решением будет также $S_i(w+\beta(w))\cdot D(w)$, где

$$\beta^*(w)=\beta(w^*),\quad \beta(1-w)=-\beta(w),\quad \beta(-w)=-\beta(w);$$

$$D^*(w)=D(w^*),\quad D(1-w)D(w)=1,\quad D(-w)=D(w).$$

Инвариантность уравнений (1.1) относительно D -произвола определяет структуру некоторого класса функциональных соотношений между $S_i(w)$, являющихся решением (1.1). Поставим вопрос: какой может быть функциональная связь между $S_i(w)$, содержащая $S_i(w)$ только в конечной степени?

Во-первых, из инвариантности уравнений относительно преобразования $S_i \to S_i D$ следует, что искомая функциональная связь должна иметь вид однородного полинома от $S_i(w)$ $(i=1,2,\dots,n)$ N -степени и, во-вторых, из условия $S_i^*(w)=S_i(w^*)$ вытекает действительность коэффициентов этого полинома. Таким образом, функциональная связь этого класса, а именно полиномиальная, задается уравнением

$$P_N(S_1,S_2,\dots,S_n)=\sum_{\substack{m_1,m_2,\dots,m_n\geq 0\\ \sum m_i=N}} C_{m_1,m_2,\dots,m_n} S_1^{m_1}(w)S_2^{m_2}(w)\dots S_n^{m_n}(w)=0, \tag{2.1}$$

где коэффициенты $C_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ – действительные числа. Урав-

нение (2.1) определяет некоторую поверхность в пространстве n измерений с координатами $S_1, S_2, \dots, S_n$. Выясним некоторые его свойства. Поскольку переменная w входит в уравнение (2.1) неявно (только через $S_i(w)$), то (2.1) инвариантно относительно замен

$$\alpha) \quad w \to 1-w ,$$

$$\beta) \quad w \to -w .$$

На языке координат S_i замены α, β эквивалентны, как это следует из (1.1), дискретным преобразованиям

$$I) \quad S_i \to 1/S_i ,$$

$$A) \quad S_i \to A_{ij} S_j$$

со свойствами $I^2 = E, A^2 = E$, где E – тождественное преобразование. Очевидно также, что (2.1) инвариантно относительно произведения замен α, β, или, что то же самое, относительно произведения преобразований I, A. Тем самым установлено, что (2.1) должно быть инвариантно относительно дискретной группы G с образующими I и A.

Установим ограничения, налагаемые на коэффициенты $C_{m_1, \dots, m_n}$ I-инвариантностью уравнения (2.1). Пусть максимальная степень S_i в (2.1) есть

$$k_i = \max m_i , \qquad 0 \le k_i \le N . \tag{2.2}$$

Тогда после I-преобразования (2.1) будет иметь вид

$$\prod_{i=1}^{n} S_i^{k_i} P_N\left(\frac{1}{S_1}, \dots, \frac{1}{S_n}\right) = \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_n \ge 0 \\ \sum m_i = N}} C_{m_1, m_2, \dots, m_n} S_1^{k_1 - m_1} \cdot \dots \cdot S_n^{k_n - m_n} = 0 . \tag{2.3}$$

Для совпадения уравнений (2.3) и (2.1) необходимо, чтобы степень полинома в (2.3) равнялась N.

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i - m_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i - N = N . \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует условие

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 2N . \tag{2.5}$$

Таким образом, при каждом наборе чисел k_i, варьируемых в пределах, заданных соотношениями (2.2) и (2.5), коэффициенты $C_{m_1, m_2, \ldots, m_n}$ отличны от нуля только тогда, когда $0 \leq m_i \leq k_i$. Далее, с помощью замены $m_j \to k_j - m_j$ из уравнения (2.3) легко получить две альтернативные группы простых соотношений между коэффициентами:

$$\begin{aligned} &1)\quad C_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = C_{k_1 - m_1, k_2 - m_2, \ldots, k_n - m_n} , \\ &2)\quad C_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = - C_{k_1 - m_1, k_2 - m_2, \ldots, k_n - m_n} . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выяснение следствия A -инвариантности уравнения (2.1) удобно провести не в координатах S_i, а в новом базисе. Пользуясь свойствами матрицы перекрестной симметрии A /5/, всегда можно указать такой базис, $a_i(w) = b_{ij} S_j(w)$, в котором преобразование A) будет

$$a_i \to \pm a_i ; \qquad \begin{aligned} &a_1 \to -a_1 , \\ &a_2 \to -a_2 , \\ &\ldots\ldots , \\ &a_m \to -a_m , \quad m < n , \\ &a_{m+1} \to +a_{m+1} , \\ &\ldots\ldots , \\ &a_n \to a_n . \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что полином $P_N(S_1, \ldots, S_n)$ в базисе α_i должен содержать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ только в суммарной чётной (нечётной) степени. Заметим, что базис α_i не удобен для описания I -инвариантности, ввиду чего мы будем пользоваться исходным базисом $S_1, \ldots, S_n$. Применим описанную выше методику к исследованию функциональных связей между $S_i(w)$ $(i = 1, 2, 3)$ в уравнениях (1.1) с трехрядной матрицей А ч-л

Уравнение (2.1) в этом случае имеет вид

$$P_N(S_1, S_2, S_3) = \sum_{m_1=0}^{N} \sum_{m_2=0}^{m_1} C_{N-m_1, m_1-m_2, m_2} \cdot S_1^{N-m_1} S_2^{m_1-m_2} S_3^{m_2} = 0 . \tag{2.7}$$

Выясним ограничения, накладываемые на $P_N(S_1, S_2, S_3)$ I-инвариантностью. Пусть в соответствии с (2.2)

$$0 \leq k_1 = \max(N - m_1) \leq N , \tag{2.8}$$

$$0 \leq N - k_2 = \max m_2 \leq N .$$

Тогда согласно (2.5)

$$\max(m_1 - m_2) = N - k_1 + k_2 . \tag{2.9}$$

Поскольку $\max(m_1 - m_2) \leq N$, то

$$k_2 \leq k_1 . \tag{2.10}$$

Таким образом, для произвольных k_1 и k_2

$$0 \leq k_1 \leq N ,$$

$$0 \leq k_2 \leq k_1 ,$$

отличные от нуля коэффициенты в (2.7) определяются неравенствами

$$N \geq m_1 \geq N - k_1 \,, \tag{2.11}$$

$$\min(N - k_2, m_1) \geq m_2 \geq \max(0, m_1 - N + k_1 - k_2) \,.$$

В соответствии с (2.6) между отличными от нуля коэффициентами C_{N-m_1, m_1-m_2, m_2} будем иметь две альтернативные группы соотношений:

$$1.\quad C_{N-m_1, m_1-m_2, m_2} = C_{k_1-N+m_1, N-k_1+k_2-m_1+m_2, N-k_2-m_2} \,, \tag{2.12}$$

$$2.\quad C_{N-m_1, m_1-m_2, m_2} = -C_{k_1-N+m_1, N-k_1+k_2-m_1+m_2, N-k_2-m_2} \,.$$

Таким образом, с учётом требования I -инвариантности, уравнение (2.7) примет вид

$$P_N(S_1, S_2, S_3) = \sum_{m_1=N-k_1}^{N} \sum_{\substack{m_2= \\ =\max(0, m_1-N+k_1-k_2)}}^{\min(N-k_2, m_1)} C_{N-m_1, m_1-m_2, m_2} S_1^{N-m_1} S_2^{m_1-m_2} S_3^{m_2} = 0, \tag{2.13}$$

причём коэффициенты в (2.13) подчиняются одной из двух групп соотношений (2.12). Для получения следствий A -инвариантности (2.13) перейдем к базису $a(w)$, $s_1(w)$ и $s_2(w)$ известным образом:

$$S_1(w) = \begin{pmatrix} -4a(w) + 2s_1(w) + s_2(w) \\ -a(w) - s_2(w) \\ 2a(w) + s_1(w) \end{pmatrix} . \tag{2.14}$$

где $a(w)$ – нечётная, а $s_1(w)$ и $s_2(w)$ – чётные функции w. Как уже говорилось выше, для A -инвариантности необходимо и достаточно, чтобы (2.13) содержало $a(w)$ только в чётной или в нечётной степени. Сообразно этому возникает следующая однородная система линейных уравнений на коэффициенты полинома $P_N(S_1, S_2, S_3)$:

$$\sum_{m_1=N-k_1}^{\min(N,\,\ell+N-k_1+k_2+k,\,2N-k_2-\ell)} \;\sum_{m_2=\max(m_1-N+k_1-k_2,\,\ell-N+m_1,0)}^{\min(N-k_2,\,m_1,\,\ell+k)} C_{N-m_1,\,m_1-m_2,\,m_2}\, B^{m_1 m_2}_{\ell k} = 0$$

при 1) всех нечётных k $0 \le k \le N$ и всех ℓ $0 \le \ell \le N-k$;
2) всех чётных k $0 \le k \le N$ и всех ℓ $0 \le \ell \le N-k$. (2.15)

Системы (2.15,1) и (2.15,2) соответствуют чётности и нечётности P_N как функции w. Коэффициенты $B^{m_1 m_2}_{\ell k}$ задаются формулой

$$B^{m_1 m_2}_{\ell k} = (-1)^{m_1+m_2} \sum_{p=p_H}^{p_b} \sum_{q=q_H(p)}^{q_b(p)} (-1)^p\, 2^{m_2-\ell+2q+2p}\, C^{k-p-m_2-q+\ell}_{m_1-m_2}\, C^{\ell-q}_{m_2}\, C^{p}_{N-m_1}\, C^{q}_{N-m_1-p},$$

где

$$\begin{aligned} p_H &= \max(0,\, k-m_1), \\ p_b &= \min(N-m_1,\, k,\, \ell-m_2+k,\, N+m_2-m_1-\ell), \\ q_H &= \max(\ell-m_2,\, \ell-m_1-p+k,\, 0), \\ q_b &= \min(N-m_1-p,\, \ell,\, \ell-m_2-p+k). \end{aligned} \tag{2.16}$$

К системе (2.15) при условии 1) или 2) нужно еще добавить соотношения (2.12,1) или (2.12,2). Число уравнений (2.15) при k нечётных задается формулой

$$n = \left[E\left(\frac{N-1}{2}\right)+1\right] \times \left[N-E\left(\frac{N-1}{2}\right)\right], \tag{2.17}$$

а при чётных k

$$n=[E(\frac{N}{2})+1]\times[N+1-E(\frac{N}{2})] \quad . \tag{2.18}$$

Число неизвестных коэффициентов, определяемое из (2.12), в случае (2.12,1) есть

$$M_1=E(\frac{M+1}{2}), \tag{2.19}$$

а в случае (2.12,2)

$$M_2=E(\frac{M}{2}), \tag{2.20}$$

где M есть

$$M=(N-k_1+1)(k_1+1)+(k_1-k_2)k_2 \quad . \tag{2.21}$$

Вообще говоря, однородная система (2.15) вместе с условиями (2.12) является сильно переопределенной, так как n с ростом N становится существенно больше M_1 или M_2 .

Таким образом, задача нахождения функциональных связей сводится к анализу на совместность (исключая тривиальный случай, когда все коэффициенты равны нулю) системы (2.15) в двух случаях с условиями (2.12) (1 или 2) и к последующему нахождению всех коэффициентов C_{N-m_1,m_1-m_2,m_2}, выраженных через какой-нибудь один. Для того, чтобы система (2.15) вместе с (2.12) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, определяющей эту систему, был меньше числа неизвестных (M_1 или M_2). Разумеется, получить и проанализировать на нетривиальность решения огромное все возрастающее с ростом N количест-

во систем (2.15) очень трудно вручную. Однако это с успехом может сделать компьютер, если сообразно описанному алгоритму машина для каждого N при всех k_1 и k_2 (в четырех случаях) определит ранг матрицы в системе (2.15) и выдаст на печать ту матрицу, которая имеет нетривиальное решение. Поскольку коэффициенты матрицы, связанные с $B^{m_1 m_2}_{\ell k}$ (числа ℓ, k нумеруют строки, а m_1, m_2 – столбцы), есть целые числа, то вычисленные машиной коэффициенты точно соответствуют реальным. Поэтому, получив в свое распоряжение одну из систем (2.15), имеющую нетривиальное решение, не составит труда точно определить все коэффициенты C_{N-m_1, m_1-m_2, m_2}, а значит, и найти функциональную связь. Такой расчёт был проведен на ЭВМ для матрицы $A^{ч-л}$ и по N = 8 найдена только одна функциональная связь

$$P_2 = S_2^2 - S_1 S_3 = 0 \qquad (N = 2, k_1 = k_2 = 1),$$

а также $(P_2)^2 = 0$ при N = 4, $k_1 = k_2 = 2$ и $(P_2)^3 = 0$ при N = 6, $k_1 = k_2 = 3$, которая соответствует известному решению./1/ Таким образом, если для матрицы $A^{ч-л}$ имеются отличные от известной полиномиальные связи, то они, по крайней мере, имеют вид $P_N(S_1, S_2, S_3)$ с $N \geq 8$. Отметим также, что в применении к матрице A(1.1) алгоритм дает функциональные связи, соответствующие решениям, полученным в работах/1,3/.

Литература

1. *В.А.Мещеряков. Препринт ОИЯИ, Р-2369, Дубна, 1965.*
2. *В.А.Мещеряков. Метод решения статического предела дисперсионных уравнений рассеяния. Докторская диссертация. Дубна, 1967.*
3. *В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков, К.В.Рерих. Препринт ОИЯИ, Р2-4167, Дубна, 1968.*
4. *T.Rothelutner. Zs.Phys., 177, 287(1964).*
5. *P.B.Fairlie. J.Math. Phys., 7, 811 (1966).*

Рукопись поступила в издательский отдел
14 марта 1969 года.