ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4345

Р.Н.Фаустов, А.А.Хелашвили

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХ ЧАСТИЦ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

Р2 - 4345

Р.Н.Фаустов, А.А.Хелашвили*

УСЛОВИЕ НОРМИРОВКИ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОЙ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХ ЧАСТИЦ

Направлено в ЯФ

* Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Гр.ССР.

Используя двухвременную функцию Грина двух частиц, Логунов и Тавхелидзе [1] построили квазипотенциальное уравнение для одновременной волновой функции. Основным достоинством этого уравнения является его трехмерный характер, что проявляется в отсутствии нефизического параметра относительного времени (или соответственно – относительной энергии). Это обстоятельство позволяет найти интерпретацию физического смысла одновременной волновой функции [2]. Условие нормировки для нее, однако, как мы покажем ниже, имеет более сложный вид, по сравнению с обычным простым условием на интеграл от квадрата модуля волновой функции. Это усложнение возникает как следствие зависимости ядра уравнения (квазипотенциала) от полной энергии системы. Соответствующее условие нормировки для двухвременной волновой функции Бете-Солпитера хорошо известно [3].

Рассмотрим Фурье-преобразование двухвременной функции Грина двух частиц:

$$G(\vec{p},\vec{q};E)=-i\int e^{iEt-i\vec{p}(\vec{x}_1-\vec{x}_2)+i\vec{q}\vec{y}_1}\langle 0|T[\phi_1(t,\vec{x}_1)\phi_2(t,\vec{x}_2)\overset{+}{\phi}_2(0)\overset{+}{\phi}_1(0,\vec{y}_1)]|0\rangle dt\,d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{y}_1 \ ,$$

где E – полная энергия системы, а $\vec{p}$ и $\vec{q}$ –импульсы частиц конечного и начального состояний в системе центра инерции. В работе [1] было получено спектральное представление для функции $G(\vec{p},\vec{q};E)$, которое мы запишем в виде:

$$G(\vec{p},\vec{q};E) = \int_0^\infty dE' \left[\frac{I(\vec{p},\vec{q};E')}{E-E'+i\epsilon} - \frac{\tilde{\tilde{I}}(\vec{p},\vec{q};E')}{E+E'-i\epsilon} \right], \tag{2}$$

где

$$I(\vec{p},\vec{q};E) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(E-E_n)\,\delta(\vec{k}_n)\,\chi_n(\vec{p})\,\chi_n^*(\vec{q})$$

$$\tilde{\tilde{I}}(\vec{p},\vec{q};E) = (2\pi)^3 \sum_n \delta(E-E_n)\,\delta(\vec{k}_n)\,\tilde{\tilde{\chi}}_n(\vec{p})\,\tilde{\tilde{\chi}}{}^*_n(\vec{q})$$

$$\chi_n(\vec{p}) = \int d\vec{x}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle 0 | \phi_1(0,\vec{x})\,\phi_2(0) | n \rangle$$

$$\tilde{\tilde{\chi}}_n(\vec{p}) = \int d\vec{x}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \langle n | \phi_1(0,\vec{x})\,\phi_2(0) | 0 \rangle .$$

Допустим теперь, что среди полного набора стационарных состояний $|n\rangle$ имеется связанное состояние двух частиц $|B\rangle$ с энергией $E_B = M$. Определим тогда Фурье-преобразование одновременной волновой функции связанного состояния через функцию χ_n:

$$\Psi_B(\vec{p}) = \sqrt{2M}\,\chi_B(\vec{p}) . \tag{3}$$

В этом случае, как следует из спектрального представления (1), функция Грина имеет полюс в точке $E = M$, и вблизи полюса

$$G(\vec{p},\vec{q};E) = \frac{\Psi_B(\vec{p})\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{q})}{2M(E-M)} . \tag{4}$$

Введем теперь, как обычно [1], оператор квазипотенциала V:

$$G^{-1} = G_0^{-1} - V , \tag{5}$$

где G_0 –двухвременная функция Грина свободных частиц. Тогда из очевидных тождеств

$$G^{-1}G = G\,G^{-1} = 1 \tag{6}$$

и представления (4) следует, что волновая функция Ψ_B удовлетворяет уравнениям:

$$G_0^{-1}\Psi_B = V\Psi_B \quad \text{и} \quad \overset{*}{\Psi}_B G_0^{-1} = \overset{*}{\Psi}_B V , \tag{7}$$

где умножение понимается в операторном смысле как интегрирование по трехмерному импульсному пространству. Умножая тождества (6) на G и используя определение (5), мы приходим к соотношению:

$$G(G_0^{-1} - V)G = G . \tag{8}$$

Приравнивая вычеты в полюсе при $E = M$ в обеих частях равенства (8) с учётом представления (4) и уравнений (7), мы получаем условие нормировки для волновой функции Ψ_B [x/]:

$$\overset{*}{\Psi}_B \left[\frac{\partial}{\partial E} (G_0^{-1} - V) \right]_{E=M} \Psi_B = 2M$$

[x/] Аналогичное условие нормировки приведено в работе [3c].

или в более подробной записи

$$\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\vec{p}\,d\vec{q}\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,\{\frac{\partial}{\partial E}[G_0^{-1}(\vec{p},\vec{q};E)-V(\vec{p},\vec{q};E)]\}_{E=M}\Psi_B(\vec{q})=2M\,. \qquad (9)$$

Отметим, что это условие нормировки пригодно и для волновой функции, удовлетворяющей нерелятивистскому уравнению Шредингера. В этом случае

$$G_0^{-1}(\vec{p},\vec{q};E)=(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{q})\,[E-m_1-m_2-\frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2}]$$

и, если потенциал не зависит от энергии, мы приходим к обычному простому условию нормировки

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,\Psi_B(\vec{p})=2M\,.$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров релятивистских двухчастичных систем.

Начнем с системы двух скалярных частиц с массами m_1 и m_2. Тогда

$$G_0^{-1}(\vec{p},\vec{q};E)=(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{q})\,\frac{2\epsilon_1(p)\,\epsilon_2(p)}{\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)}\{E^2-[\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)]^2\}\,, \qquad (10)$$

где

$$\epsilon_{1,2}(p)=\sqrt{p^2+m_{1,2}^2}\,.$$

Уравнение (7) для волновой функции связанного состояния имеет вид:

$$\{E^2-[\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)]^2\}\,\Psi_B(\vec{p})=\frac{\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)}{2\epsilon_1(p)\,\epsilon_2(p)}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\,V(\vec{p},\vec{q};E)\,\Psi_B(\vec{q})\,, \qquad (11)$$

а условие нормировки (9) принимает форму

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,\frac{2\epsilon_1(p)\epsilon_2(p)}{\epsilon_1(p)+\epsilon_2(p)}\,\Psi_B(\vec{p})-\frac{1}{2M(2\pi)^6}\int d\vec{p}\,d\vec{q}\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,[\frac{\partial}{\partial E}V(\vec{p},\vec{q};E)]_{E=M}\,\Psi_B(\vec{q})=1\,. \qquad (12)$$

В качестве следующего примера рассмотрим систему двух частиц со спином 1/2 и массами m_1 и m_2. В этом случае вместо операторов $\overset{+}{\phi}$, очевидно, нужно использовать операторы $\bar{\phi}=\overset{+}{\phi}\gamma_0$. Волновая функция Ψ_B является шестнадцатикомпонентной величиной, и с помощью проекционных операторов Казимира может быть представлена в виде суммы четырех слагаемых, отвечающих четырем возможным комбинациям знаков энергии частиц. Тогда полная волновая функция связанного состояния удовлетворяет уравнению [/4/]

$$[E-H_1(\vec{p})-H_2(\vec{p})]\,\Psi_B(\vec{p})=\gamma_0^{(1)}\,\gamma_0^{(2)}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\,V(\vec{p},\vec{q};E)\,\Psi_B(\vec{q})\,, \qquad (13)$$

где

$$H_{1,2}(\vec{p})=\vec{\alpha}\cdot\vec{p}+m_{1,2}\,\gamma_0^{(1,2)}\,.$$

При этом

$$G_0^{-1}(\vec{p},\vec{q};E)=(2\pi)^3\,\delta(\vec{p}-\vec{q})\,\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\,[E-H_1(\vec{p})-H_2(\vec{p})]$$

и условие нормировки (9) имеет вид:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,\Psi_B(\vec{p})-\frac{1}{(2\pi)^6}\int d\vec{p}\,d\vec{q}\,\overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\,[\frac{\partial}{\partial E}V(\vec{p},\vec{q};E)]_{E=M}\,\Psi_B(\vec{q})=2M.$$

Можно также получить уравнения для проекций волновой функции на состояния с определенными знаками энергий частиц. Так, например, в работах [5] использовалась волновая функция, спроектированная на состояния, в которых обе частицы имеют одновременно положительные или отрицательные значения энергии.

Рассмотрим подробнее случай, когда волновая функция спроектирована на состояния с одними только положительными значениями энергии частиц [6]:

$$\Psi_B^{(+)}(\vec{p}) = \overset{*}{u}_1(p)\,\overset{*}{u}_2(-p)\,\Psi_B(\vec{p}), \quad \overset{*}{\Psi}{}_B^{(+)}(\vec{p}) = \overset{*}{\Psi}_B(\vec{p})\,\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\,u_1(p)\,u_2(-p)\,, \qquad (16)$$

где $u_{1,2}$ –спинорные волновые функции свободных частиц с положительной энергией, нормированные условием $\overset{*}{u}u = 1$. Аналогично определяются соответствующие функции Грина:

$$G^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E) = \overset{*}{u}_1(p)\,\overset{*}{u}_2(-p)\,G(\vec{p},\vec{q};E)\,\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}\,u_1(q)\,u_2(-q)$$

$$(17)$$

$$[\,G_0^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)\,]^{-1} = (E - \sqrt{p^2+m_1^2} - \sqrt{p^2+m_2^2})\,.$$

Второе слагаемое в спектральном представлении (2) при этом не дает вклада. Волновая функция $\Psi_B^{(+)}$ удовлетворяет простому уравнению:

$$(E - \sqrt{p^2+m_1^2} - \sqrt{p^2+m_2^2})\,\Psi_B^{(+)}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{q}\; V^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)\,\Psi_B^{(+)}(\vec{q})\,, \qquad (18)$$

где в соответствии с определением (5)

$$V^{(+)} = [\,G_0^{(+)}\,]^{-1} - [\,G^{(+)}\,]^{-1}\,.$$

Условие нормировки (9) принимает форму:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\;\overset{*}{\Psi}{}_B^{(+)}(\vec{p})\,\Psi_B^{(+)}(\vec{p}) - \frac{1}{(2\pi)^6}\int d\vec{p}\,d\vec{q}\;\overset{*}{\Psi}{}_B^{(+)}(\vec{p})\left[\frac{\partial}{\partial E}V^{(+)}(\vec{p},\vec{q};E)\right]_{E=M}\Psi_B^{(+)}(\vec{q}) = 2M \qquad (19)$$

В заключение авторы выражают благодарность А.Н.Тавхелидзе, В.Г.Кадышевскому, В.А.Матвееву, И.В.Полубаринову и Л.А.Слепченко за полезные обсуждения. Один из авторов (Р.Н.Ф.) благодарен К.Фронсдалу за стимулирование интереса к проблеме нормировки.

Литература

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).
2. F.J. Dyson, Phys. Rev., 91, 1543 (1953).
3. a) R.E. Cutkosky, M. Leon. Phys. Rev., 135, B1445 (1964).
   b) D. Lurie, A.J. Macfarlane, Y. Takahashi, Phys. Rev., 140, B1091 (1965).
   c) В.А.Матвеев. Препринт ОИЯИ, Р2-3847, Дубна 1968.
   C.H. Llewellyn Smith. CERN preprint TH, 946 (1968).
4. А.А.Хелашвили. Препринт ОИЯИ Р2-4327, Дубна 1969.
5. Г.Десимиров, Д.Стоянов. Препринт ОИЯИ, Р -1658, Дубна 1964.
   V.A. Matveev, R.M. Muradyan, A.N. Tavkhelidze. JINR preprint E2-3498, Dubna 1967.
6. R.N. Faustov. Nucl. Phys., 75, 669 (1966). V.G. Kadyshevsky, M.D. Mateev. Nuovo Cim., 55A, 275 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 марта 1969 года.