Теорет. и мат. физ., 1969, т.1 N1, с.19-33

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4323

Б.М.Зупник, В.И.Огиевецкий

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ КИРАЛЬНЫХ ГРУПП МЕТОДОМ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4323

Б.М.Зупник, В.И.Огиевецкий

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ КИРАЛЬНЫХ ГРУПП МЕТОДОМ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1. Введение

В последнее время интенсивно развивается и успешно применяется к описанию экспериментальных данных метод эффективных лагранжианов, частично инвариантных относительно нелинейных киральных преобразований группы $SU_2 \times SU_2$ [1-10], содержащий алгебру токов и позволяющий очень просто воспроизводить ее результаты. Нелинейные реализации киральной группы $SU_2 \times SU_2$ начали изучать Гюрси и другие авторы[1] несколько лет назад, но исчерпывающее их описание было дано Вайнбергом[10]. Естественна многочисленность работ, посвященных теории эффективных лагранжианов в рамках киральной группы $SU_3 \times SU_3$ или $U_3 \times U_3$ [12-20]. Кольман и др.[20] доказали важную общую теорему, согласно которой нелинейные реализации любой компактной связной полупростой группы Ли, линеаризующиеся на заданной ее подгруппе, определяются однозначно, с точностью до несущественного переопределения базисных функций поля.

В настоящей работе нелинейные реализации киральных групп исследуются методом производящих функций (МПФ ниже[x]) с привлечением интерполяционных полиномов Сильвестра-Лагранжа[22]. В силу адекватности

---

[x] В несколько иной форме МПФ применялся в [21] для вывода нелинейной спинорной реализации общековариантной группы в общей теории относительности.

задаче этот метод оказывается конструктивным, позволяет явно перечислить все нелинейные реализации и эффективно с ними работать, причём без увеличения сложности он применяется к группам $SU_n \times SU_n$ и $U_n \times U_n$ при любом n, поэтому нет надобности специально выделять $n = 2$ или 3.

В разделе II работы вкратце излагается МПФ и исследуются вариации полиномов Сильвестра–Лагранжа и собственных значений матрицы, описывающей мезоны 0^-, при нелинейных преобразованиях киральных групп.

Далее, в разделе III проводится анализ нелинейных реализаций киральной группы $U_n \times U_n$ для псевдоскалярных мезонов путем разрешения групповых соотношений между производящими функциями. Анализ показывает, что для этой группы существует три неэквивалентных класса нелинейных реализаций. Наличие трех классов неэквивалентных реализаций у группы $U_n \times U_n$ связано с тем, что она не полупростая, и подчеркивает важность условия полупростоты в теореме Кольмана, Весса и Зумино [20]. К группам типа $U_n \times U_n$ эта теорема неприменима.

В разделе IV рассматриваются и явно перечисляются все нелинейные реализации киральной группы $SU_n \times SU_n$ для псевдоскалярных мезонов. Все они эквивалентны между собой и отличаются заменой полевых переменных, которую можно явно указать.

Мезонное самосопряженное представление является ключевым, и с его помощью в разделе V изучаются нелинейные преобразования кварков Ψ в группах $SU_n \times SU_n$ и $U_n \times U_n$, которые не содержат матрицы γ_5 и оставляют инвариантными величины вида $\bar{\Psi}\Psi$. Производящие функции для нелинейных по мезонному полю кварковых реализаций получены в явном виде, и они определяются производящими функциями для псевдоскалярных полей. Показано, как строить в терминах производящих функций ковариантные производные.

Знание нелинейных реализаций для кварков дает возможность автоматически записывать нелинейные реализации для любых других полей (например, для октета барионов в группе $SU_3 \times SU_3$ и так далее).

II. Метод производящих функций

В этом разделе мы выведем основные соотношения МПФ киральных групп $U_n \times U_n$ и $SU_n \times SU_n$, линеаризующихся, соответственно, на подгруппах U_n и SU_n. Киральная группа $SU_n \times SU_n$ определяется алгеброй Ли "изотопических" T_i и "аксиальных" A_i генераторов $(i = 1, 2, \ldots, n^2 - 1)$.

$$\text{a)}\ [T_j, T_k] = iC_{jk\ell} T_\ell;\quad \text{б)}\ [T_j, A_k] = iC_{jk\ell} A_\ell;\quad \text{в)}\ [A_j, A_k] = iC_{jk\ell} T_\ell, \tag{2.1}$$

$C_{jk\ell}$ – структурные константы группы SU_n.

Киральная группа $U_n \times U_n$ содержит подгруппу $SU_n \times SU_n$ и две инвариантные Абелевы подгруппы U_1. В ней добавляются генераторы T_0 и A_0, коммутирующие со всеми генераторами. Генераторы T_i, T_0 коммутируют, а A_i, A_0 антикоммутируют с оператором чётности P.

По аналогии с группой SU_3 можно ввести совокупность $n^2 - 1$ эрмитовых $n \times n$ матриц τ_i с нулевыми шпурами и $\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{n}}\, I$

$$[\tau_j, \tau_k] = 2iC_{jk\ell} \tau_\ell \qquad \mathrm{Sp}(\tau_i \tau_j) = 2\delta_{ij}. \tag{2.2}$$

Киральные группы $U_n \times U_n$ и $SU_n \times SU_n$ имеют основную самосопряженную нелинейную реализацию для псевдоскалярных мезонов, знание которой позволяет записывать нелинейные реализации киральных групп для других полей. Самосопряженные нелинейные представления $SU_n \times SU_n$ реализуются на неприводимом SU_n мультиплете псевдоскалярных мезонов P_i $(i = 1, 2 \ldots n^2 - 1)$. Базис представления группы U_n содержит также синглет P_0. Образуем эрмитову матрицу $\xi = \sum_i P_i \tau_i$, тогда инфинитезимальное преобразование "изотопической" SU_n (или U_n) для мезонов ξ запишется в виде:

$$\delta_\beta \xi = \frac{i}{2}[\beta, \xi]. \qquad (2.3)$$

$\beta = \Sigma \beta_i \tau_i$ – эрмитова матрица параметров преобразования. Нелинейные преобразования матрицы ξ удобно описывать с помощью производящих функций. Характеристическое уравнение эрмитовой $n \times n$ матрицы ξ имеет n вещественных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$, образующих спектр матрицы ξ. Будем считать, что спектр невырожден, т.е. $\lambda_i \neq \lambda_k$ при $i \neq k$. Если числовая функция $F(\lambda)$ определена на спектре матрицы ξ, то матричная функция $F(\xi)$ всегда может быть разложена по интерполяционным полиномам Лагранжа-Сильвестра $Z_i(\xi)$, имеющим $n-1$ степень по ξ /22/:

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{n} F(\lambda_i) Z_i(\xi), \qquad (2.4)$$

$$Z_i(\xi) = \frac{(\xi - \lambda_1 I)\dots(\xi - \lambda_{i-1} I)(\xi - \lambda_{i+1} I)\dots(\xi - \lambda_n I)}{(\lambda_i - \lambda_1)\dots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\dots(\lambda_i - \lambda_n)}. \qquad (2.5)$$

Полиномы Z_i обладают проекционными свойствами

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i = 1; \qquad Sp\, Z_i = 1; \qquad Z_i Z_k = \delta_{ik} Z_k. \qquad (2.6)$$

Полезно помнить, что когда матрица ξ диагональна, то $Z_i(\xi)$ есть матрица, у которой единственный отличный от нуля элемент равен единице и стоит на пересечении i – строки и i –го столбца.

Теперь запишем n^2 –параметрическое инфинитезимальное преобразование матрицы ξ в максимально общем виде:

$$\delta_\alpha \xi = \sum_{k,\ell=1}^{n} (F_{k\ell} Z_k \alpha Z_\ell + G_{k\ell} Z_k Sp(Z_\ell \alpha)), \qquad (2.7)$$

где α –эрмитова $n \times n$ матрица параметров преобразования, $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ –производящие функции, произвольным образом зависящие от собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы ξ (или от $Sp\,\xi$, $Sp\,\xi^2 \dots Sp\,\xi^n$). С учётом тождества

$$Z_i \alpha Z_i \equiv Z_i Sp(Z_i \alpha) \quad \text{(для каждого } i \text{)} \qquad (2.8)$$

мы без ограничения общности можем считать $F_{kk} = 0$ в (2.7).

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения:

А) Если равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k Sp(Z_k \alpha) = 0 \qquad (b_k \text{ – числа}) \qquad (2.9)$$

имеет место для произвольной матрицы α, то с необходимостью при $Sp\,\alpha = 0$, $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, а при $Sp\,\alpha \neq 0$, $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$.

Проварьируем соотношение $\xi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Z_k$

$$\delta_\alpha \xi = \sum_{k=1}^{n} (\delta_\alpha \lambda_k Z_k + \lambda_k \delta_\alpha Z_k). \qquad (2.10)$$

Оказывается возможным явно определить вариации $\delta_\alpha \lambda_k$, $\delta_\alpha Z_k$ при нелинейном преобразовании (2.7).

Варьируя равенства (2.6), получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \delta Z_i = 0 \qquad Sp\, \delta Z_i = 0$$
$$\delta Z_i Z_k + Z_i \delta Z_k = \delta_{ik} \delta Z_k \qquad (2.11)$$

Б) Общее решение системы уравнений (2.11) имеет вид:

$$\delta Z_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (H_{ik} Z_i \alpha Z_k - H_{ki} Z_k \alpha Z_i) \qquad (2.12)$$

при произвольной функции H_{ik}.

Формула (2.12) позволяет сделать утверждение:

В) Если матрица ξ преобразуется по нелинейному закону (2.7), то соответствующее преобразование характеристических корней матрицы ξ имеет вид:

$$\delta_a \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} G_{ik}\, Sp(Z_k a). \tag{2.13}$$

Действительно, из (2.12) следуют соотношения

$$Sp(Z_k\, \delta Z_i) = 0; \qquad Sp(\xi\, \delta Z_i) = 0 \tag{2.14}$$

при любых $i,k = 1,2,\ldots n$. Имеет место красивое тождество

$$\lambda_i \equiv Sp(\xi Z_i), \tag{2.15}$$

варьируя которое и используя (2.7) и (2.14), доказываем справедливость (2.13). Теперь легко доказать следующее утверждение:

Г) Если матрица ξ преобразуется по закону (2.7), то соответствующее преобразование полиномов Сильвестра-Лагранжа имеет вид:

$$\delta_a Z_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}{}' \left(\frac{F_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k} Z_i a Z_k - \frac{F_{ki}}{\lambda_k - \lambda_i} Z_k a Z_i \right). \tag{2.16}$$

III. Нелинейные реализации киральной группы $U_n \times U_n$ для псевдоскалярных мезонов

В данном разделе с помощью МПФ описываются нелинейные реализации киральной группы $U_n \times U_n$ для псевдоскалярных мезонов ξ, линеаризующиеся на "изотопической" подгруппе U_n.

Сохраняющая чётность самосопряженная реализация группы $U_n \times U_n$ для мезонов ξ ($Sp\,\xi \neq 0$) образуется линейным U_n преобразованием (2.3) и нелинейным киральным преобразованием (2.7). Эрмитовость преобразования (2.7) накладывает на $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ условия:

$$\overset{*}{F}_{k\ell} = F_{\ell k}; \qquad \overset{*}{G}_{k\ell} = G_{k\ell}. \tag{3.1}$$

Преобразование (2.7) сохраняет чётность, если функции $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ будут чётными, так как $P\xi P^{-1} = -\xi$, $PaP^{-1} = -a$. Преобразования (2.3) и (2.7) удовлетворяют групповым условиям (2.1а) и (2.1б) при любых $F_{k\ell}$, $G_{k\ell}$, поэтому для того, чтобы (2.3) и (2.7) были реализацией киральной группы $U_n \times U_n$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух преобразований (2.7) с параметрами a_1 и a_2 удовлетворялась скобочная операция Софуса Ли:

$$(\delta_{a_2}\delta_{a_1} - \delta_{a_1}\delta_{a_2})\xi = \frac{1}{4}[[a_2, a_1], \xi] \tag{3.2}$$

в соответствии с групповым условием (2.1в).

Анализ группового условия (3.2) при $Sp\,a \neq 0$ и при $Sp\,a = 0$ проводится одинаково. Мы подставляем выражение (2.7) в скобочную операцию (3.2) и, применяя формулы (2.13), (2.16) МПФ, при учёте соотношения (2.8) получим эквивалентную групповому условию (3.2) систему уравнений:

$$\frac{F_{k\ell} - F_{t\ell}}{\lambda_k - \lambda_t} F_{kt} - \frac{F_{k\ell} - F_{kt}}{\lambda_\ell - \lambda_t} F_{t\ell} = \frac{1}{4}(\lambda_\ell - \lambda_k) \qquad (k \neq \ell \neq t \neq k) \tag{3.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial \lambda_j} G_{jt} - F_{k\ell} \frac{G_{kt} - G_{\ell t}}{\lambda_k - \lambda_\ell} + \qquad (3.4)$$

$$+ (\delta_{tk} - \delta_{t\ell})\left[\frac{F_{k\ell}^2}{\lambda_k - \lambda_\ell} + \frac{1}{4}(\lambda_k - \lambda_\ell) \right] = \begin{cases} 0 & \text{при } Sp\,\alpha \neq 0 \\ r_{k\ell} & \text{при } Sp\,\alpha = 0 \end{cases}$$

$$(G_{k\ell} - G_{kt})(F_{\ell t} - F_{t\ell}) = 0 \qquad (3.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial G_{k\ell}}{\partial \lambda_j} G_{jt} - \frac{\partial G_{kt}}{\partial \lambda_j} G_{j\ell} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } Sp\,\alpha \neq 0 \\ (s_{k\ell} - s_{kt}) & \text{при } Sp\,\alpha = 0. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Появление произвольных функций $r_{k\ell}$, $s_{k\ell}$ при $Sp\,\alpha = 0$ является следствием утверждения А) (2.9). Для того чтобы нелинейное преобразование (2.7) при $Sp\,\alpha \neq 0$ являлось киральным преобразованием группы $U_n \times U_n$, необходимо и достаточно, чтобы производящие функции $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ удовлетворяли системе уравнений (3.3)-(3.6). Полученное ниже общее решение системы уравнений (3.3-3.6) при $Sp\,\alpha \neq 0$ решает вопрос классификации нелинейных реализаций киральной группы $U_n \times U_n$ для псевдоскалярных мезонов ξ. При $G_{k\ell} = 0$ имеется только одно решение с антисимметричной $F_{k\ell} = \pm \frac{i}{2}(\lambda_k - \lambda_\ell)$, которое не подходит по чётности.

Общее симметричное решение уравнения (3.3) определяется системой произвольных функций $f_k(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ $(k = 1, 2, \ldots n)$

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_\ell)\,\mathrm{ctg}\,\frac{f_k - f_\ell}{2}. \qquad (3.7)$$

Функция $F_{k\ell}$ является эрмитовой (3.1) и чётной, поэтому в общем случае функции f_k образуют систему из n различных вещественных функций и

$$f_k(-\lambda_1, -\lambda_2 \ldots -\lambda_n) = -f_k(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Отметим, что при замене $f_k \to \phi_k = f_k + F$, где F – симметричная функция корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, вид производящей функции $F_{k\ell}$ (3.7) не изменяется. В $U_n \times U_n$ мы можем считать функции $f_k(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ независимыми (якобиан $\frac{D(f_1, f_2 \ldots f_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)} \neq 0$). Подставив решение (3.7) в уравнение (3.4) при $Sp\,\alpha \neq 0$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial f_\ell}{\partial \lambda_j} \right) G_{jt} = \delta_{kt} - \delta_{\ell t}. \qquad (3.8)$$

Учитывая свободу замены $f_k \to \phi_k = f_k + F$, расщепим (3.8) на эквивалентные уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f_k + F)}{\partial \lambda_j} G_{jt} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_j} G_{jt} = \delta_{kt} + a_t, \qquad (3.8a)$$

где a_t произвольно. Допустим, что якобиева матрица $\left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_\ell} \right\|$ невырождена, тогда решением уравнения (3.8а) будет

$$G_{rt} = \frac{\partial \lambda_r}{\partial \phi_t} + a_t \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \lambda_r}{\partial \phi_k}, \qquad (3.9)$$

где $\left\| \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi_\ell} \right\| = \left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial \lambda_\ell} \right\|^{-1}$. Решение для $G_{k\ell}$ получаем подстановкой выражения (3.9) в уравнение (3.6) при $Sp\,\alpha \neq 0$, с учётом того, что $\dfrac{\partial^2 \lambda_k}{\partial\phi_\ell \partial\phi_t} = \dfrac{\partial^2 \lambda_k}{\partial\phi_t\, \partial\phi_\ell}$

$$G_{k\ell} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial\phi_\ell} + C_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\lambda_k}{\partial\phi_m}, \tag{3.10}$$

$$G_{k\ell} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial\phi_\ell} - \frac{\sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\partial\lambda_k}{\partial\phi_r} \sum\limits_{n=1}^{n} \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\phi_\ell}}{B_0 + \sum\limits_{m,r=1}^{n} \dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\phi_r}}, \tag{3.11}$$

B_0, C_0 – постоянные. Решения (3.10), (3.11) при $C_0 \neq -\frac{1}{n}, B_0 \neq 0$ можно переписать в виде:

$$G_{k\ell} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial\bar\phi_\ell}; \quad \bar\phi_\ell = \begin{cases} \phi_\ell - \dfrac{C_0}{1+nC_0}\sum\limits_{r=1}^{n}\phi_r & \text{для решения (3.10)} \\ \phi_\ell + \dfrac{1}{B_0}\, Sp\, \xi & \text{для решения (3.11)} \end{cases} \tag{3.12}$$

Следовательно, киральная группа $U_n \times U_n$ имеет широкий класс нелинейных реализаций (2.3), (2.7) для мезонов, производящие функции которых:

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_\ell)\,\mathrm{ctg}\,\frac{f_k - f_\ell}{2}; \quad G_{k\ell} = \frac{\partial\lambda_k}{\partial f_\ell} \tag{3.13}$$

определяются системой из n независимых, вещественных, нечётных функций $f_k(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$. Для представления (3.13) можно построить матрицу

$$U(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \exp(-i\gamma_5 f_k) Z_k, \tag{3.14}$$

преобразующуюся по линейному представлению $U_n \times U_n$

$$\delta_\beta U(\xi) = \frac{i}{2}[\beta, U(\xi)]; \quad \delta_\alpha U(\xi) = -\frac{i\gamma_5}{2}\{\alpha, U(\xi)\}. \tag{3.15}$$

Более того, если некоторая матрица $U(\xi)$ преобразуется по представлению (3.15) за счёт преобразований типа (2.3), (2.7) своего матричного аргумента ξ, то при $Sp\,\alpha \neq 0$ можно утверждать:

1) матрица $U(\xi)$ является унитарной и может быть записана в виде $U(\xi) = \sum_k \exp(-i\gamma_5 f_k) Z_k$, где $f_k(\lambda_1, \ldots \lambda_n)$ – некоторая система функций;

$$2) \quad F_{k\ell} = \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_\ell)\,\mathrm{ctg}\,\frac{f_k - f_\ell}{2}, \tag{3.16}$$

$$3) \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial\lambda_j} G_{jt} = \delta_{kt}.$$

Таким образом, преобразование (2.7) должно быть киральным преобразованием типа (3.13) группы $U_n \times U_n$. Теперь ясно, что все нелинейные реализации типа (3.13) киральной группы $U_n \times U_n$ для мезонов ξ канонически эквивалентны. Различные реализации типа (3.13), определяемые соответственно системами независимых функций $f_k(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ и $\bar f_k(\bar\lambda_1 \ldots \bar\lambda_n)$, связаны взаимно-однозначной заменой переменных поля:

$$U(\xi) = U(\bar\xi); \quad f_k(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \bar f_k(\bar\lambda_1 \ldots \bar\lambda_n). \tag{3.17}$$

Приведем несколько частных примеров киральных преобразований типа (3.13):

а) рациональная модель /1,2,5,7/ $U = \dfrac{1 - i\gamma_5\xi}{1 + i\gamma_5\xi}$, $f_k = 2\,\mathrm{arctg}\,\lambda_k$

$$\delta_\alpha \xi = \frac{1}{2}(\alpha + \xi\alpha\xi). \tag{3.18a}$$

б) экспоненциальная модель $U = \exp(-2i\gamma_5 \xi)$, $f_k = 2\lambda_k$

$$\delta_a \xi = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_\ell}{\mathrm{tg}(\lambda_k - \lambda_\ell)} Z_k \dot{a} Z_\ell ; \qquad (3.18б)$$

в) σ-модель /6,7/ $U = \sqrt{1-\xi^2} + i\gamma_5 \xi$; $f_k = -\arcsin \lambda_k$

$$\delta_a \xi = -\frac{1}{2} \{ a , \sqrt{1-\xi^2} \} . \qquad (3.18в)$$

Матрицу $U(\xi)$ можно разделить на две части:

$$U(\xi) = \sigma(\xi) + i\gamma_5 P(\xi) \equiv \sum_{k=1}^{n} (\cos f_k - i\gamma_5 \sin f_k) Z_k , \qquad (3.19)$$

преобразующиеся в соответствии с обобщенной σ-моделью /17/

$$\delta_a \sigma = \frac{1}{2} \{ a , P \} ; \quad \delta_a P = -\frac{1}{2} \{ a , \sigma \} \qquad (3.20)$$

при киральных преобразованиях (3.13). Укажем, что

$$\delta_a \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Sp}\,(Z_k a) = \mathrm{Sp}\, a . \qquad (3.21)$$

Вернемся теперь к решениям (3.10, 3.11) для $G_{k\ell}$ при $C_0 = -\frac{1}{n}$, $B_0 = 0$, определяющим два неэквивалентных (3.13) класса нелинейных реализаций киральной группы $U_n \times U_n$ для мезонов ξ. В первом случае $F_{k\ell} = \frac{1}{2}(\lambda_k - \lambda_\ell) \,\mathrm{ctg}\, \frac{\phi_k - \phi_\ell}{2}$;

$$G_{k\ell} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi_\ell} \equiv \frac{\partial \lambda_k}{\partial f_\ell} - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial f_m} . \qquad (3.22)$$

Здесь $\phi_\ell = f_\ell - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f_r$, где f_k – система независимых функций. Обратного перехода не существует, так как нельзя определить n независимых функций f_k через зависимые функции $\phi_k \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_k \equiv 0 \right)$.

Решение (3.10б) для $G_{k\ell}$ при $B_0 = 0$ определяет еще один интересный класс нелинейных реализаций группы $U_n \times U_n$:

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2} (\Lambda_k - \Lambda_\ell) \,\mathrm{ctg}\, \frac{\phi_k - \phi_\ell}{2}$$

$$G_{k\ell} = \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \phi_\ell} \equiv \frac{\partial \lambda_k}{\partial f_\ell} - \frac{\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial f_r} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \lambda_m}{\partial f_\ell}}{\sum_{m,r=1}^{n} \frac{\partial \lambda_m}{\partial f_r}} , \qquad (3.23)$$

здесь

$$\Lambda_k = \lambda_k - \frac{1}{n} \mathrm{Sp}\, \xi ; \quad \phi_k = f_k - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f_r .$$

Ясно, что с помощью Λ_k , ϕ_k нельзя построить матрицу, преобразующуюся по представлениям (3.13) и (3.22). Реализации (3.22) и (3.23) принципиально отличаются от реализации (3.13) тем, что для них невозможно построить матрицу $U(\xi)$, преобразующуюся по линейному киральному закону (3.15) при $\mathrm{Sp}\, a \neq 0$. Действительно, нельзя удовлетворить условию (3.16), так как в реализациях (3.22) и (3.23) $\det \| G_{k\ell} \| = 0$. Примером реализации (3.22) при $f_k = 2\,\mathrm{arctg}\, \lambda_k$ будет:

$$\delta_a \xi = \frac{1}{2} (a + \xi a \xi) - \frac{1}{2n} (1 + \xi^2) \mathrm{Sp}\, a . \qquad (3.24)$$

Запишем также реализацию (3.23) при $f_k = 2\,\mathrm{arctg}\,\lambda_k$

$$\delta_a \xi = \frac{1}{2}(a + \xi a \xi) - \frac{1+\xi^2}{2(n + \mathrm{Sp}\,\xi^2)}\,\mathrm{Sp}(a + \xi^2 a). \tag{3.25}$$

Здесь $\mathrm{Sp}\,\xi \neq 0$, $\mathrm{Sp}\,a \neq 0$, однако $\mathrm{Sp}\,\delta_a \xi = 0$.

Отметим еще одно важное отличие реализаций (3.22), (3.23) от реализации (3.13).

Пусть преобразование (2.7) имеет инвариант $I(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n)$, тогда из условия $\delta_a I = 0$ получаем при $\mathrm{Sp}\,a \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial \lambda_j} G_{jk} = 0, \qquad (k = 1, 2 \dots n). \tag{3.26}$$

Для реализации (3.13) $\det \| G_{k\ell} \| \neq 0$, поэтому $I \equiv \mathrm{const}$. В то же время реализация (3.22) имеет единственный инвариант $I = \sum_{k=1}^{n} f_k(\lambda_1 \dots \lambda_n)$, а для реализации (3.23) единственным инвариантом является $I = \mathrm{Sp}\,\xi$. Бесшпуровость ($\mathrm{Sp}\,\delta_a \xi = 0$) преобразований (3.23) непосредственно связывает их с нелинейными реализациями киральной $SU_n \times SU_n$.

IV. Нелинейные реализации киральной группы $SU_n \times SU_n$ для псевдоскалярных мезонов

Будем исследовать нелинейные реализации киральной группы $SU_n \times SU_n$ на псевдоскалярных мезонах ξ группы SU_n ($\mathrm{Sp}\,\xi = 0$):

$$\delta_\beta \xi = \frac{i}{2}[\beta, \xi] \qquad (\mathrm{Sp}\,\beta = 0) \tag{4.1}$$

$$\delta_a \xi = \sum_{k,\ell=1}^{n} (F_{k\ell} Z_k a Z_\ell + G_{k\ell} Z_k \mathrm{Sp}(Z_\ell a)). \qquad (\mathrm{Sp}\,a = 0) \tag{4.2}$$

Обозначим корни бесшпуровой матрицы ξ через Λ_m, $(\sum_{m=1} \Lambda_m = 0)$. Производящие функции $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ в группе $SU_n \times SU_n$ суть функции от Λ_m и на них накладываются те же требования эрмитовости и чётности, что и в группе $U_n \times U_n$. Шпур матрицы ξ должен быть равен нулю, отсюда следует, что и $Sp\, \delta_a \xi = 0$, т.е. на производящую функцию $G_{k\ell}$ следует наложить условие

$$\sum_{k=1}^{n} G_{k\ell} = G \ , \tag{4.3}$$

где G не зависит от индекса ℓ и может быть отлична от нуля, так как $Sp\, a = 0$. С другой стороны, при $Sp\, a = 0$ преобразование (4.2) не меняется при заменах $G_{k\ell} \to G_{k\ell} + G_k$ при любом G_k. Учитывая это, и полагая $G_k = -\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} G_{k\ell}$, мы без ограничения общности можем считать, что

$$\text{а)} \ \sum_{k=1}^{n} G_{k\ell} = 0 \ ; \qquad \text{б)} \ \sum_{\ell=1}^{n} G_{k\ell} = 0 \ . \tag{4.4}$$

Скобочная операция Ли в группе $SU_n \times SU_n$ записывается в точности так же, как и в $U_n \times U_n$, и дается тем же соотношением (3.2). Разрешая его, получаем для $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ систему групповых уравнений (3.3)-(3.6), в которой следует только заменить λ_i на Λ_i.

Условия (4.4) соответствуют выбору $r_{k\ell} = 0$, $s_{k\ell} = 0$ для произвольных функций в уравнениях (3.4) и (3.6).

Уравнение (3.3) для группы $SU_n \times SU_n$ снова имеет одно общее решение:

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2}(\Lambda_k - \Lambda_\ell)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\phi_k - \phi_\ell}{2} \ . \tag{4.5}$$

Здесь $\phi_k(\Lambda_1 \ldots \Lambda_n)$ – n вещественных, нечётных функций. Корни Λ_1, $\Lambda_2 \ldots \Lambda_n$ линейно зависимы, поэтому $\det \left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial \Lambda_\ell} \right\| = 0$, независимо от выбора функций ϕ_k. Решение (4.5) допускает замену $\phi_k \to \bar{\phi}_k = \phi_k + F$, где F – любая функция $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$. Подстановка решения (4.5) в уравнение (3.4) при дополнительных условиях (4.4) дает нам уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \Lambda_j} (\bar{\phi}_k - F) G_{jt} \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_k}{\partial \Lambda_j} G_{jt} = \delta_{kt} - \frac{1}{n}. \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.6) видно, что для бесшпуровых киральных преобразований группы $SU_n \times SU_n$ без ограничения общности можно положить:

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k (\Lambda_1 \dots \Lambda_n) = 0 . \tag{4.7}$$

Уравнение (4.6) при дополнительных условиях (4.4), (4.7) имеет единственное решение для $G_{k\ell}$:

$$G_{k\ell} = \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \phi_\ell}. \tag{4.8}$$

Матрица $\left\| \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \phi_\ell} \right\|$ – однозначно определяется как так называемая псевдообратная матрица /22/ к якобиевой матрице $\left\| \frac{\partial \phi_k}{\partial \Lambda_\ell} \right\|$. Следовательно, нелинейные реализации киральной группы $SU_n \times SU_n$ для мезонов определяются единым образом по формулам (4.1), (4.2) при

$$F_{k\ell} = \frac{1}{2} (\Lambda_k - \Lambda_\ell) \operatorname{ctg} \frac{\phi_k - \phi_\ell}{2}; \quad G_{k\ell} = \frac{\partial \Lambda_k}{\partial \phi_\ell}, \tag{4.9}$$

где ${}_n\phi_k(\Lambda_1\ldots\Lambda_n)$ – система вещественных, нечётных функций, для которых $\sum\limits_{k=1}\phi_k = 0$. Для каждого представления $SU_n \times SU_n$ типа (4.9) можно единственным образом построить матрицу

$$U(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \exp(-i\gamma_5 \phi_k) Z_k , \tag{4.10}$$

преобразующуюся по линейному представлению (3.15). Отсюда следует каноническая эквивалентность всех нелинейных реализаций киральной группы $SU_n \times SU_n$, линеаризующихся на подгруппе SU_n. Существует однозначный переход от преобразований типа (3.23) киральной $U_n \times U_n$ при $Sp\,a = 0$ к преобразованиям (4.9) группы $SU_n \times SU_n$. Достаточно вычислить функции $F_{k\ell}$ и $G_{k\ell}$ для преобразования (3.23) и в полученных выражениях заменить λ_1 на Λ_1, причём таким способом можно получить все преобразования (4.9).

Приведенные ниже примеры киральных преобразований группы $SU_n \times SU_n$ получены из преобразований (3.23)

$$\delta_a \xi = \frac{1}{2}\left(a + \xi a \xi - \frac{1+\xi^2}{n + Sp\,\xi^2} Sp(\xi^2 a)\right). \tag{4.11}$$

Здесь $\phi_k = 2\,\mathrm{arctg}\,\Lambda_k - \frac{2}{n}\sum\limits_{\ell=1}^{n} \mathrm{arctg}\,\Lambda_\ell$.

На возможность преобразования (4.11) указывалось Волковым /14/, Макфарланом и Вейцом /19/ и Зупником /15/. Экспоненциальная модель:

$$U = e^{-2i\gamma_5 \xi} ; \quad \delta_a \xi = \frac{1}{2} \sum_{k,\ell=1}^{n} \frac{\Lambda_k - \Lambda_\ell}{\mathrm{tg}(\Lambda_k - \Lambda_\ell)} Z_k a Z_\ell . \tag{4.12}$$

В $SU_n \times SU_n$ аналоге σ-модели при $\phi_k = -\arcsin\Lambda_k + \frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n} \arcsin\Lambda_m$ получим преобразование:

$$\delta_a \xi = -\frac{1}{2}\{ a, \sqrt{1-\xi^2} \} + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{Sp\sqrt{1-\xi^2}} Sp(a\sqrt{1-\xi^2}). \qquad (4.13)$$

Нелинейные реализации (4.9) киральной $SU_n \times SU_n$ не имею инвариантов. Это следует из того факта, что единственным инвариантом представления (3.23) является $Sp\,\xi$.

Киральные преобразования кварков

Рассмотренные выше самосопряженные нелинейные реализации киральных групп дают возможность построить нелинейные реализации групп $U_n \times U_n$ и $SU_n \times SU_n$ для других мультиплетов группы SU_n.

Производящие функции различных нелинейных реализаций группы $U_n \times U_n$ (3.13), (3.22-23) и реализаций группы $SU_n \times SU_n$ (4.9) записываются одинаково. Это дает нам возможность рассматривать нелинейные реализации для n – компонентных кварков одновременно для группы $U_n \times U_n$ и для группы $SU_n \times SU_n$

$$\delta_\beta \Psi = \frac{i}{2} \beta \Psi \qquad (5.1)$$

$$\delta_a \Psi = i\Phi(a, \xi)\Psi, \qquad (5.2)$$

где $\Phi(a,\xi) = \frac{1}{i}\sum_{k,\ell=1}^{n} (\Phi_{k\ell} Z_k a Z_\ell + R_{k\ell} Z_k\, Sp\, Z_\ell a)$.

Здесь $\Phi_{k\ell}$, $R_{k\ell}$ – производящие функции для киральных преобразований кварков, причем в силу тождества (2.8) можно считать, что $\Phi_{kk} = 0$.

В (5.2) не входит матрица γ_5 и мы будем требовать выполнения очень удобного для построения инвариантных лагранжианов условия, чтобы величина $\bar{\Psi}\Psi$ была инвариантом преобразования (5.2). Для этого необходимо и достаточно, чтобы:

$$\Phi^*_{k\ell} = -\Phi_{\ell k} \quad ; \qquad R^*_{k\ell} = -R_{k\ell} \quad . \tag{5.3}$$

Для сохранения пространственной чётности функции $\Phi_{k\ell}$ и $R_{k\ell}$ должны быть нечётными функциями от своих аргументов λ_i .

Преобразование (5.2) является киральным преобразованием группы $U_n \times U_n$ или группы $SU_n \times SU_n$, если

$$(\delta_{a_1} \delta_{a_2} - \delta_{a_2} \delta_{a_1}) \Psi = \frac{1}{4} [a_2 , a_1] \Psi \tag{5.4}$$

для любых двух преобразований (5.2). Анализируя условие (5.4), мы, естественно, считаем, что поле ξ преобразуется по киральному закону типа (4.9) соответствующей киральной группы, а вариации $\delta_a \lambda_k$ и $\delta_a Z_k$ определяются формулами (2.13) и (2.16).

Система групповых уравнений для производящих функций $\Phi_{k\ell}$ и $R_{k\ell}$ имеет следующий вид:

$$\frac{\Phi_{k\ell} - \Phi_{t\ell}}{\lambda_k - \lambda_t} F_{kt} - \frac{\Phi_{k\ell} - \Phi_{kt}}{\lambda_\ell - \lambda_t} F_{t\ell} - \Phi_{kt} \Phi_{t\ell} = \frac{1}{4} \tag{5.5}$$
$$t \neq k \neq \ell \neq t$$

$$- \left(\frac{\Phi_{k\ell} F_{k\ell}}{\lambda_k - \lambda_\ell} - \frac{1}{4} \right)(\delta_{t\ell} - \delta_{tk}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{k\ell}}{\partial \lambda_j} G_{jt} +$$
$$+ (R_{kt} - R_{\ell t})\left(\Phi_{k\ell} + \frac{F_{k\ell}}{\lambda_k - \lambda_\ell}\right) = 0 \qquad k \neq \ell \tag{5.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial R_{k\ell}}{\partial \lambda_j} G_{jt} - \frac{\partial R_{kt}}{\partial \lambda_j} G_{j\ell} \right) = 0 \qquad t \neq \ell \, . \tag{5.7}$$

Система (5.7–5.9) имеет единственное линейное решение $\Phi_{k\ell} = \pm\frac{i}{2}$; $R_{k\ell} = \pm\frac{i}{2}\delta_{k\ell}$, которое не подходит по чётности. Отбросим также имеющее особенность решение

$$\Phi_{k\ell} = -\frac{F_{k\ell}}{\lambda_k - \lambda_\ell} \equiv -\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{f_k - f_\ell}{2}. \tag{5.8}$$

Из уравнения (5.6) видно, что для действительных $\Phi_{k\ell}$ функция $R_{k\ell}$ может быть только действительной. Остается одно решение уравнения (5.5)

$$\Phi_{k\ell} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{f_k - f_\ell}{4} \tag{5.9}$$

Оно вещественно, и поэтому функция $R_{k\ell}$ по условию (5.3) обращается в нуль, причём при $R_{k\ell} = 0$ решение (5.9) для $\Phi_{k\ell}$ удовлетворяет уравнению (5.6). В формуле (5.9) f_k – система функций, определяющих киральное преобразование мезонов ξ в соответствующей группе.

Например, преобразованию (3.18а) группы $U_n \times U_n$ и преобразованию (4.11) группы $SU_n \times SU_n$ соответствует реализация (5.1,2) для спиноров при

$$\Phi_{k\ell} = \frac{\lambda_k - \lambda_\ell}{2(1 + \lambda_k\lambda_\ell + \sqrt{(1+\lambda_k^2)(1+\lambda_\ell^2)}\,)}. \tag{5.10}$$

В группе $SU_2 \times SU_2$ преобразование нуклонов N, соответствующее производящей функции (5.10), сводится к

$$\delta_a N = \frac{1}{4}[\pi, a]\, N \qquad (\pi \text{ –пионная матрица}) \tag{5.10а}$$

Отметим, что в $SU_3 \times SU_3$ мезоны входят более сложным образом, весьма нелинейно. Зная преобразования (5.1), (5.2) для спиноров Ψ_a ($a = 1,2,\ldots n$), мы можем автоматически записывать нелинейные реализации киральных групп на любых спинорах $\Psi^{cd\ldots}_{ab\ldots}$ группы SU_n. Запишем, например, нелинейные преобразования барионов $B_a^{\ b}$ в киральных группах

$$\delta_\beta B = \frac{i}{2}[\beta, B]\ ;\ \delta_a B = i[\Phi(a,\xi), B\,]. \tag{5.11}$$

В реализациях (3.13) группы $U_n \times U_n$ и (4.9) группы $SU_n \times SU_n$, для которых определена линейно преобразующаяся матрица $U(\xi)$ (3.14), (4.10), мы можем каноническим преобразованием [7]

$$\psi = U^{-\frac{1}{2}}\Psi \equiv \sum_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{i}{2}\gamma_5 f_k\right) Z_k \Psi \tag{5.12}$$

перейти к линейному представлению для кварков ψ :

$$\delta_\beta \psi = \frac{i}{2}\beta\psi \quad \cdot \quad \delta_a \psi = -\frac{i}{2}\gamma_5 a\,\psi\,. \tag{5.13}$$

Воспользовавшись заменой (5.12), нетрудно написать ковариантную производную спинорного поля Ψ :

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + U^{\frac{1}{2}}\,\partial_\mu U^{-\frac{1}{2}})\Psi\,, \tag{5.14}$$

преобразующуюся подобно полю Ψ :

$$\delta_a(D_\mu \Psi) = i\,\Phi\,(a,\xi)\,D_\mu\Psi\,. \tag{5.15}$$

Теперь легко записать различные инварианты нелинейных реализаций типа (3.13) и (4.9) киральных групп:

$$\mathrm{Sp}(\partial_\mu U \partial_\mu \overset{+}{U}); \quad \bar{\Psi}\gamma_\mu D_\mu \Psi + m_\psi \bar{\Psi}\Psi; \tag{5.16}$$

$$\mathrm{Sp}[\bar{B}\gamma_\mu(\partial_\mu + U^{1/2}\partial_\mu U^{-1/2})B] + m_B \mathrm{Sp}\bar{B}B$$

и строить инвариантные лагранжианы.

В заключение авторы выражают сердечную признательность Б.Н.Валуеву и Д.Стоянову за полезные обсуждения.

Литература

1. S.Weinberg. Phys. Rev. Lett., 18, 188 (1967).
2. J.Schwinger. Phys. Letters 24B, 473 (1967), Phys. Rev. Lett., 18, 923 (1967), Phys. Rev. 167, 1432 (1968).
3. J.A.Cronin. Phys. Rev., 161, 1483 (1967).
4. W.A.Bardeen, B.Lee. Canadian Summer Institute Lectures, 1967.
5. I.Wess, B.Zumino. Phys. Rev., 163, 1727 (1967).
6. L.Brown. Phys. Rev., 163, 1802 (1967).
7. P.Chang, F.Gursey. Phys. Rev., 164, 1752 (1967). F.Gursey. Effective Lagrangians in Particle Physics, prepr. Schladming (1968).
8. Y.Ohnuki, Y.Yamaguchi, Chiral Dynamics, Prepr. Tokyo, 1967.
9. B.W.Lee, H.T.Nieh. Phys. Rev., 166, 1507 (1968).
10. S.Weinberg. Phys. Rev., 166, 1568 (1968).
11. F.Gursey. Nuovo Cim., 16, 230 (1960), Ann. Phys. (N.Y.) 12, 91 (1961). G.Kramer, H.Rollnik, B.Stech, Zeits. Phys., 159, 564 (1959), M.Gell-Mann, M.Levy. Nuovo Cim., 46, 705 (1967).

12. T.Minamikawa, Y.Miyamoto. Prog. Theor. Phys., 38, 1195 (1967).
13. B.W.Lee, Phys. Rev. Lett., 20, 617 (1968).
14. Д.В.Волков. ЖЭТФ, Письма, 7, 385 (1968).
15. Б.М.Зупник. Дипломная работа, Днепропетровский университет, 1968 г.
16. T.Shiozaki. Prog. Theor. Phys., 39, 189 (1968) ; prepr. Nagoya (1968).
17. M.Levy. Nuovo Cim., 52, 23 (1967). S.Gasiorovicz, D.A.Geffen. Prepr. Argone (1968).
18. W.A.Bardeen, B.W.Lee. prep., Stony Brook (1968).
19. A.I. Macfarlane , P.H. Weicz. Nuovo Cim., 55A, 853 (1968); prepr. Cambridge (1968).
20. C.G.Callan, S.Coleman, I.Wess, B.Zumino. Structure of Phenomenological Lagrangians, I, II, prepr. (1968).
21. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов. ЖЭТФ, 48, 1625 (1965).
22. Ф.Р.Гантмахер. "Теория матриц". Наука, Москва, 1967 год.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1969 года.