ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4322

Л.Г.Заставенко

ОБ ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ ГАМИЛЬТОНИАНА В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 4322

Л.Г.Заставенко

ОБ ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ ГАМИЛЬТОНИАНА В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1. Мы рассмотрим простейший случай скалярного нейтрального поля с самодействием при одной пространственной размерности:

$$H = \frac{1}{2} \int dk \left[- \frac{\delta^2}{\delta\phi(k)\,\delta\phi(-k)} + (k^2 + M^2)\phi(k)\phi(-k) \right]$$
$$+ g \int \prod_{i=1}^{4} (\phi(k_i) dk_i) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4). \tag{1}$$

Здесь интегралы будем считать берущимися по области

$$-\ell < k < \ell, \qquad -\ell < k_i < \ell. \tag{2}$$

Введем обозначение:

$$t = M^2 + 12\, g\, \ln(2\ell). \tag{3}$$

Значения трех параметров g , t , ℓ полностью определяют гамильтониан H .

1.1. Обычный выбор[x)]

---

x) Он отвечает записи

$$H = \frac{1}{2} \int dk [-\delta^2 / \delta\phi(k)\delta\phi(-k) + (k^2 + \mu^2)\, \phi(k)\, \phi(-k)]$$
$$+ g\, \hat{N} \int \prod (\phi(k_i) dk_i)\, \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4); \tag{1'}$$

где $\hat{N}$ – символ нормального произведения /2/.

$$M^2 = \mu^2 - 12g \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dk}{\sqrt{k^2+\mu^2}} =$$

$$= \mu^2 - 12g \ln(2\ell/\mu)$$

соответствует

$$t = \mu^2 - 6g \ln(1/\mu^2), \tag{4}$$

здесь μ - затравочная масса покоя.

1.2. Для фиксированных значений g и t уравнение Шредингера

$$H\Omega = \lambda\Omega \tag{5}$$

допускает переход к пределу $\ell \to \infty$ без возникновения расходимостей /3/.

1.3. Мы рассмотрим основное состояние гамильтониана (1) в зависимости от величины параметра t (значение g считаем фиксированным $g > 0$). Доступным для исследования является, очевидно, случай $t \to \infty$, соответствующий стандартному случаю слабой связи (согласно (4) затравочная масса покоя неограниченно растет с ростом t ; случай слабой связи в гамильтониане (1) реализуется, как известно, если $g \to 0$ при фиксированном μ , либо $\mu \to \infty$ при фиксированном g). Однако имеется еще один доступный для исследования (и столь же простой) случай

$$t \to -\infty .$$

Этот предельный случай является отправным для исследования явления вырождения вакуума.

1.4. При $t \to -\infty$ конструкция п. 2.2. дает два взаимно ортогональных функционала, принадлежащих нижнему уровню; эти функционалы переходят один в другой при инверсии $\phi \to -\phi$; усреднение по ним дает:

$$\overline{\phi(k)} = \pm \nu\delta(k).$$

1.5. Напротив того, при $t \to +\infty$ функционал основного состояния единственен и инвариантен относительно инверсии, так что:

$$\overline{\phi(k)} = 0 .$$

1.6. Ввиду зависимости (3) оператора (1) от параметра t раздвоение основного состояния при $t \to -\infty$ не может считаться неожиданностью. Простейшим примером, в котором имеет место нечто похожее, является уравнение (п. 2.10)

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + tx^2 + gx^4\right)\psi = \lambda\psi . \tag{6}$$

1.7. Согласно (4) при $t \to -\infty$ $\mu \to 0$, поэтому с точки зрения стандартного случая слабой связи случай $t \to -\infty$ является далеким и сложным; однако в действительности при $t \to -\infty$ реализуется также случай слабой связи (хотя и необычный).

1.8. Вместо двух параметров t и g уравнения пунктов 2.1., 2.2. содержат лишь один, ϵ или β , являющийся их функцией; аналогия с уравнением (6) показывает естественность этого свойства подобия.

1.9. Параметром малости разложения пункта 2.2 является величина β^{-2} , которая может быть выражена как функция от t и g (уравнение (23)); условие (необычной) слабой связи не исчерпывается возможностью

$$g = \text{const}, \quad t \to -\infty$$

$$(\beta^2 = -t/(4g) + \ldots),$$

но содержит целый континуум возможностей, и в частности, предельный случай

$$t = \text{const}, \quad g \to +\infty$$

$$(8\beta^2 = 12 \ln g + 12\ln(12\ln g) \ldots,$$
$$-2t/g),$$

который, таким образом, не является случаем сильной связи.

1.10. Анализ уравнения (5) мы будем вести по способу, предложенному нами ранее /3/.

2. Представим функционал основного состояния Ω_0 в виде

$$\Omega_0 = \exp(-\kappa)$$

и перепишем уравнение (5) в форме

$$\frac{1}{2}\int dk \left[\frac{\delta^2 \kappa}{\delta\phi(k)\,\delta\phi(-k)} - \frac{\delta\kappa}{\delta\phi(k)}\,\frac{\delta\kappa}{\delta\phi(-k)} + (k^2+M^2)\phi(k)\,\phi(-k)\right]$$

$$+ g\int \Pi(\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4) = \lambda\ . \qquad (7)$$

Рассмотрим два разных конструктивных способа построения решений уравнения (7).

2.1. Будем искать функционал κ в виде

$$\kappa = \frac{1}{2}\Big[\int a(k)\,\phi(k)\,\phi(-k)\,dk\ +$$

$$+\int C_4(k_1,k_2,k_3,k_4)\,\Pi(\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$

$$+\int C_6(k_1,k_2,k_3,\ldots,k_6)\,\Pi(\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1+k_2+\ldots k_6) \qquad (8)$$

$$+\ \ldots\ \Big].$$

Подставив (8) в (7), получаем уравнения для определения коэффициентных функций:

$$a^2(p) = p^2+m^2+6\int dk\,[C_4(p,-p,k,-k)-C_4(0,0,k,-k)],$$

$$\Sigma_4 C_4 = 2g+15\int dk\, C_6(k_1,k_2,k_3,k_4,k,-k),$$

$$\Sigma_6 C_6 + 2\cdot 2\,[C_4 C_4] = 28\int dk\, C_8(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6,k,-k). \qquad (9)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Здесь

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a(k_i), \qquad (10)$$

$$m^2 \equiv M^2+6\int dk\, C_4(0,0,k,-k), \qquad (11)$$

$$[C_4 C_4](k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6) = \mathrm{simm}(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6),$$

$$C_4(k_1,k_2,k_3,-k_1-k_2-k_3)\ C_4(k_4,k_5,k_6,-k_4-k_5-k_6). \qquad (12)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Заменим коэффициентные функции и независимую переменную:

$$p = mq,$$

$$a(p) = m\,A(q),$$

$$C_4 = (g/m)\,D_4(q_1,q_2,q_3,q_4), \qquad (13)$$

$$C_6 = (g^2/m^3)\,D_6(q_1,q_2,\ldots,q_6);$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

и преобразуем систему (9) к виду

$$A^2 = q^2+1+6\epsilon\int ds\,[D_4(q,-q,s,-s)-D_4(0,0,s,-s)],$$

$$\sigma_4 D_4 = 2+15\,\epsilon\int D_6(q_1,q_2,q_3,q_4,s,-s)\,ds, \qquad (14)$$

$$\sigma_6 D_6 + 2\cdot 2\,[D_4 D_4] = 28\epsilon\int D_8(q_1,q_2,\ldots,q_6,s,-s);$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

подобно (10), здесь

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} A(q_i),$$

$$\epsilon = g/m^2. \tag{15}$$

Система (14) при $\epsilon = 0$ решается точно:

$$A(q) = \sqrt{q^2 + 1},$$

$$D_4 = 2/\sigma_4,$$

$$D_6 = -4[D_4 D_4]/\sigma_6.$$

Знание решения при $\epsilon = 0$ позволяет построить для $\epsilon > 0$ решение в виде ряда по степеням ϵ. В частности:

$$A(q) = \omega_q - 3\epsilon(1 - 1/\omega_q) \int \frac{ds}{(\omega_s + \omega_q)(\omega_s + 1)} + \ldots,$$

$$D_4(q, -q, s, -s) = (\omega_q + \omega_s)^{-1} \; . \; . \; . \; .$$

Здесь

$$\omega_q = \sqrt{q^2 + 1}.$$

Заметим, что согласно (15), при постоянном g пределу $\epsilon \to 0$ соответствует $m \to \infty$.

2.2. Положим в (7)

$$\phi(k) = \psi(k) + \beta\delta(k), \tag{16}$$

так что (7) перейдет в

$$\frac{1}{2} \int dk \left[\frac{\delta^2 \kappa}{\delta\psi(k)\,\delta\psi(-k)} - \frac{\delta\kappa}{\delta\psi(k)} \frac{\delta\kappa}{\delta\psi(-k)} + (k^2 + M^2 + 12g\beta^2)\psi(k)\psi(-k) \right]$$

$$+ \beta(M^2 + 4g\beta^2)\psi(0) + 4g\beta \int \prod_{i=1}^{3} (\psi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$+ g \int \prod_{i=1}^{4} (\psi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = \lambda'. \tag{17}$$

Функционал κ на этот раз будем искать в виде:

$$\kappa = \frac{1}{2} \Big[\int a(k)\psi(k)\psi(-k)\,dk$$

$$+ \int C_3(k_1 k_2 k_3) \prod_{i=1}^{3} (\psi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3) \tag{18}$$

$$+ \int C_4(k_1 k_2 k_3 k_4) \prod_{i=1}^{4} (\psi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4).$$

Подставив (18) в (17), получаем уравнения для определения коэффициентных функций:

$$0 = 2\beta(M^2 + 4g\beta^2) + 3\int C_3(k, -k, 0)\,dk, \tag{19}$$

$$a^2 = p^2 + M^2 + 12g\beta^2 + 6\int C_4(p, -p, k, -k)\,dk,$$

$$\Sigma_3 C_3 = 8g\beta + 10\int C_5\,dk,$$

$$\Sigma_4 C_4 + \frac{3 \cdot 3}{4}[C_3 C_3] = 2g + 15\int C_6\,dk.$$

. . . .

Исключая параметр M^2 с помощью уравнения (19), получаем

$$a^2(p) = p^2 + 8g\beta^2 + \int \left(6C_4 - \frac{3}{2\beta} C_3\right) dk.$$

Далее, заменяя коэффициентные функции и независимую переменную

$$p = \sqrt{8g}\,|\beta|\,q,$$

$$a(p) = \sqrt{8g}\,|\beta|\,A(q),$$

$$C_3 = \sqrt{8g}\ \beta/|\beta|\ D_3\ ,$$
$$C_4 = \sqrt{8g}\, D_4/|\beta|\ ,\qquad (20)$$
$$C_5 = \sqrt{8g}\ D_5/(\beta|\beta|\ ),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

приведем уравнения к виду

$$A^2(q) = q^2 + 1 + \beta^{-2}\int ds\,[6D_4(q,-q,s,-s) - \frac{3}{2}D_3(s,-s,0)],$$

$$D_3\ \sigma_3 = 1 + 10\,\beta^{-2}\int D_5(q_1,q_2,q_3,s,-s)\,ds\,,$$
$$D_4\ \sigma_4 = -\frac{3\cdot 3}{4}[D_3 D_3] + \frac{1}{4} + \frac{15}{\beta^2}\int D_6\ ds\ , \qquad (21)$$
$$D_5\,\sigma_5 = -2\,\frac{3\cdot 4}{4}\,[D_3\ D_4] + \frac{21}{\beta^2}\int D_7\ ds\,.$$

Подобно (14), система (21) при $\beta^{-2}=0$ решается точно; это позволяет для $\beta^{-2}>0$ построить решение в виде ряда по степеням β^{-2}. В частности:

$$D_3(q,-q,0) = (1+2\omega_q)^{-1} + \dots\ ,$$

$$A(q) = \omega_q + \frac{1}{2\,\omega_q\,\beta^2}\{-\frac{6}{8}(\omega_q - \frac{1}{2})\int\frac{ds}{(\omega_q+\omega_s)(\omega_s+1/2)}$$
$$-\frac{9}{4}\int\frac{ds}{\omega_q+\omega_s}[\frac{1}{(2\omega_q+1)(2\omega_s+1)} + \frac{2}{(\omega_q+\omega_s+\omega_{q+s})^2}]\}.$$

2.3. При выводе уравнений (14), (12) параметр M^2 был выражен некоторым сложным образом((11), (19)) через новые параметры m^2, β. Пользуясь формулами преобразования (13), (20) и определением t (3) и подставляя в нулевом приближении по параметрам ϵ, β^{-2} значения функций D_3, D_4 данные в конце пунктов 2.1, 2.2, находим из (14), (21):

$$t = m^2 - 6\int C_4(0,0,k-k)\,dk + 12g\,\ln(2\ell) =$$
$$= m^2 - 12g\,\ln\frac{1}{m} + 12\,g + \dots \qquad (22)$$

для случая п. 2.1 и

$$t = -4g\beta^2 - \frac{3}{2\beta}\int C_3(k,-k,0)\,dk + 12g\,\ln(2\ell) =$$
$$= -4g\beta^2 + 12\,g\,\ln\sqrt{8g\beta^2} \qquad (23)$$
$$+ g\,[\frac{4\pi}{\sqrt{3}} + \frac{a_1}{\beta^2} + \dots]$$

для случая п. 2.2. Отсюда следует, что предельному случаю $\epsilon\to 0$ соответствует $t\to+\infty$, а предельному случаю $\beta^{-2}\to 0$ – $t\to-\infty$.

2.4. Выпишем теперь в первом приближении по ϵ, β^{-2} энергии состояний п.п. 2.1, 2.2. Из (7), (8) находим для λ выражение

$$\lambda = \frac{1}{2}\delta(0)\int a(k)\,dk\ . \qquad (24)$$

Точно так же, подставляя (18) в (17), получаем

$$\lambda' = \frac{1}{2}\delta(0)\int a(k)\,dk\ .$$

Следует учесть также, что λ' отличается от параметра, входящего в уравнение (7):

$$\lambda = \lambda' + (M^2/2)\,\beta^2\int\delta(k)\,\delta(-k)\,dk$$
$$+ g\beta^4\int\prod_{i=1}^{4}(\delta(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4). \qquad (25)$$

Таким образом, для случая пункта 2.2.

$$\lambda = \delta(0)\,[\,M^2\beta^2/2 + g\beta^4 + \frac{1}{2}\int a(k)\,dk\,]\,. \tag{26}$$

Выразив в (24), (26) $a(k)$ через $A(k)$ по формулам (13), (20) и подставив выражения A, данные в конце пунктов 2.1, 2.2, получим после выкладок:

$$\frac{\lambda}{\delta(0)} = \frac{\ell^2}{2} - 3g(\ln(2\ell))^2 + \ln(2\ell)(m^2 - 6g\ln\frac{1}{m^2} + 12g)/2$$

для п. 2.1 и

$$\frac{\lambda}{\delta(0)} = \frac{\ell^2}{2} - 3g(\ln(2\ell))^2 + \ln(2\ell)(-4g\beta^2 - 6g\ln\frac{1}{\sqrt{8g\beta^2}} + 6g\frac{2\pi}{3\sqrt{3}})/2$$

для п. 2.2. Члены, которые остаются конечными при $\ell\to\infty$, здесь опущены. С учетом (22), (23) полученные формулы могут быть объединены в утверждение, что

$$\lambda/\delta(0) = \frac{\ell^2}{2} - 3g(\ln(2\ell))^2 + \ln(2\ell)(\frac{t}{2} + f(t)) + \ldots, \tag{27}$$

где

$$f(t)/t \to 0 \qquad \text{при} \quad t\to\pm\infty\,;$$

точками обозначены члены, конечные при $\ell\to\infty$. Следует оговориться, что энергия основного состояния не имеет физического смысла; подсчет, проведенный в настоящем пункте, однако, полезен тем, что он показал правильную – растущую – зависимость собственного значения от t (при $t\to\pm\infty$).

2.5. Формулы (24), (25), (26) производят довольно темное впечатление ввиду наличия неопределенного фактора $\delta(0)$. Если, однако, с самого начала понимать в (7), (8) (17), (18) интегралы как интегральные суммы, например,

$$\int a(k)\phi(k)\phi(-k)\,dk \to h\sum_i a(k_i)\phi_i\phi_{-i}$$

и так далее, $k_i = h\cdot i$, $i = 0, \pm1, \pm2\ldots$, то $\delta(0)$ в (24)-(26) заменяется на h и нечеткость исчезает.

2.6. Замена

$$\beta\to-\beta$$

позволяет получить из решения п. 2.2 еще одно решение уравнения (7), принадлежащее тому же самому собственному значению (26); ввиду (16), (20) полученные таким образом два решения переходят друг в друга при преобразовании

$$\phi(k)\to-\phi(k).$$

2.7. При понимании системы (7) как системы с дискретным набором степеней свободы (пункт 2.5) не представляет труда на основании (6), (8), (18) получить формальные выражения для нормы $N = \int\Omega_0^2\prod d\phi_i$ и всевозможных средних. В экспоненте оставим лишь первый, квадратичный по ϕ или ϕ_i, член κ; остальные разложим в степенные ряды. Нам понадобятся интегралы

$$\int\exp(-h\sum a(k_i)\phi(k_i)\phi(-k_i))\prod d\phi(k_i) = \prod_{k_i}\sqrt{\frac{\pi}{h\,a(k_i)}} \equiv N_0\,.$$

$$\int\exp(-h\sum a(k)\phi(k)\phi(-k))\prod d\phi(k)\sum_{k_1,k_2,\ldots k_n\ldots k_{2n}} C_{k_1k_2\ldots k_{2n}}\phi(k_1)\phi(k_2)\ldots\phi(k_{2n})$$

$$= N_0\,[\sum_{k_1,k_2\ldots k_n} C_{k_1,-k_1,k_2,-k_2\ldots k_n,-k_n}\prod_{j=1}^{n}(2h\,a(k_j))^{-1} + \ldots];$$

точками обозначена совокупность $(2n-1)!!-1$ членов, где спаривание произведено иначе, чем в выписанном первом члене. При подсчете нормы возникает большое число членов,

$$N = N_0(1+\Sigma),$$

каждому из которых соответствует определенный способ спаривания, определенная диаграмма; величина $C_{k_1 k_2 \ldots}$, составляется из произведений коэффициентных функций C_3, C_4, C_5, ... (8) или (18). Как оказывается, норма может быть представлена в виде

$$N = N_0 \exp(\Sigma'),$$

где Σ' содержит лишь те члены из Σ, которым соответствуют связные диаграммы.

Рассмотрим далее интеграл

$$Y = \int \Omega_0^2 \, \Pi \, d\phi(k_j)\, Z(\phi),$$

где

$$Z(\phi) = \Sigma\, Y(k_1, k_2, \ldots k_{2n})\,\phi(k_1)\phi(k_2)\ldots\phi(k_{2n}).$$

Как и раньше, для Y получаем представление в виде суммы большого числа членов, каждому из которых соответствует диаграмма. Можно показать, что величина $\bar{Z} \equiv Y/N$ равна сумме тех членов Y, которым соответствуют связные диаграммы.

2.8. Заменяя интегралы в (18) суммами (п. 2.5) и пользуясь правилами пункта 2.7, получаем средние значения $\psi(k)$ и $\psi(k)\psi(k')$:

$$\overline{\psi(0)} = -\Big[\sum_k 3h^2 \frac{C_3(k,-k,0)}{(2ha(k))(2ha(0))}$$

$$-\sum_{k_1,k_2} 15h^4 \frac{C_5(k_1,-k_1,k_2,-k_2,0)}{(2ha(k_1))(2ha(k_2))\,2ha(0)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1,k_2} 24 \frac{h^2 C_3(k_1,k_2,-k_1-k_2)\,h^3 C_4(-k_1,-k_2,k_1+k_2,0)}{2ha(k_1)\,2ha(k_2)\,2ha(k_1+k_2)\,2ha(0)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1,k_2} 36 \frac{h^2 C_3(k_1,-k_1,0)\,C_4(k_1,-k_1,k_2,-k_2)\,h^3}{(2ha(k_1))^2\,2ha(k_2)\,2ha(0)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1,k_2} 36 \frac{h^2 C_3(k_1,-k_1,0)\,h^3 C_4(k_2,-k_2,0,0)}{2ha(k_1)\,2ha(k_2)\,(2ha(0))^2}$$

$$+\ \ldots\Big]\,\delta_{k,0}\,.$$

Здесь

$$\delta_{k,0} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0, \end{cases}$$

$$\overline{\psi(k)\psi(-k)} = \sum_{k_1} 12 \frac{h^3 C_4(k_1,-k_1,k,-k)}{2ha(k_1)(2ha(k))^2}$$

$$+\sum_{k_1,k_2} 90 \frac{h^5 C_6(k_1,-k_1,k_2,-k_2,k,-k)}{2ha(k_1)\,2ha(k_2)\,(2ha(k))^2}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1} 36 \frac{h^2 C_3(-k,-k_1,k+k_1)\,C_3(k,k_1,-k-k_1)\,h^2}{(2ha(k))^2\,2ha(k_1)\,2ha(k_1+k_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k_1} 36 \frac{h^2 C_3(k,-k,0)\,C_3(k_1,-k_1,0)\,h^2}{(2ha(k))^2\,2ha(k_1)\,2ha(0)}$$

$$+9\delta_{k,0}\sum_{k_1,k_2} \frac{h^2 C_3(k_1,-k_1,0)\,C_3(k_2,-k_2,0)\,h^2}{(2ha(0))^2\,2ha(k_1)\,2ha(k_2)}$$

$$+ 180 \sum_{k_1,k_2} \frac{h^2 C_3(k, k_1, -k-k_1) h^4 C_5(-k, -k_1, k+k'_1, k_2, -k_2)}{(2ha(k))^2\, 2ha(k_1)\, 2ha(k_2)\, 2ha(k_1+k_2)}$$

$$+ 45 \sum_{k_1,k_2} \frac{h^2 C_3(k, -k, 0) h^4 C_5(k_1, -k_1, k_2, -k_2, 0)}{(2ha(k))^2\, 2ha(k_1)\, 2ha(k_2)\, 2ha(0)}$$

$$+ 60 \sum_{k_1,k_2} \frac{h^2 C_3(k_1, k_2, -k_1-k_2) h^4 C_5(k, -k, -k_1, -k_2, +k_1+k_2)}{(2ha(k))^2\, 2ha(k_1)\, 2ha(k_2)\, 2ha(k_1+k_2)}$$

$$+ 90 \sum_{k_1,k_2} \frac{h^2 C_3(k_1, -k_1, 0) h^4 C_5(k, -k, k_2, -k_2, 0)}{(2ha(k))^2\, 2ha(k_1)\, 2ha(k_2)\, 2ha(0)}$$

$$+ 90\, \delta_{k,0} \sum_{k_1,k_2,k_3} \frac{h^2 C_3(k_1, -k_1, 0) h^4 C_5(k_2, -k_2, k_3, -k_3, 0)}{(2ha(0))^2\, 2ha(k_1)\, 2ha(k_2)\, 2ha(k_3)} .$$

Переходя от суммы к интегралам, с помощью формул (20) получаем

$$\overline{\psi(k)} = \delta(k)\left[\frac{3}{4}\int \frac{\beta \quad dq}{|\beta|\ \omega_q (1+2\omega_q)} + \ldots\right];$$

точками обозначены члены, исчезающие вместе с β^{-2}. Таким образом для величины ν (16) находим

$$\nu = \beta + \frac{3\beta}{4|\beta|}\int \frac{dq}{\omega_q(1+2\omega_q)} + \ldots \qquad (28)$$

Заметим, что члены $\overline{\psi(k)\psi(-k)}$, содержащие $\delta_{k,0}$ (и имеющие порядок величины h^{-2}), в точности равны $(\overline{\psi(0)})^2$, а остающиеся члены имеют порядок величины h^{-1}. Таким образом,

$$\overline{(\psi(0) - \overline{\psi(0)})^2} = [\overline{\psi(0)}]^2 - [\overline{\psi(0)}]^2 \approx h^{-1} .$$

Аналогично устанавливается, что вообще при $k = 2n-1$ и $k = 2n$

$$\overline{[\psi(0) - \overline{\psi(0)}]^k} \approx h^{-n} .$$

Отсюда следует, что распределение по $\psi(0)$, то есть функция, полученная интегрированием распределения Ω_0^2 по всем переменным, кроме $\psi(0)$, зависит от аргумента $[\psi(0) - \overline{\psi(0)}]\sqrt{h}$ только;

$$\int \Omega_0^2 \prod_{k \neq 0} d\psi(k) = \rho[(\psi(0) - \overline{\psi(0)})\sqrt{h}];$$

здесь $\rho(x)$ – положительное распределение, имеющее все моменты. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что рассмотренные выше два основных состояния (п. 2.7) взаимно ортогональны (для них $\overline{\phi(0)}$ имеют порядок величины h^{-1} и отличаются знаком (16), (28)).

2.9. Относительно зависимости основного состояния от параметра t при промежуточных значениях этого параметра кажется наиболее вероятным, что существует критическое значение $t = t_0$, такое, что при $t \geq t_0$ основное состояние единственно, а при $t < t_0$ раздвоено.

2.10. Для уравнения (6) собственная функция основного состояния четна по x, при больших отрицательных значениях t эта функция имеет два симметрично расположенных максимума, которые в пределе $t \to -\infty$ становятся непересекающимися. Особенность уравнения с бесконечным числом степеней свободы (1), (3), (5) состоит в том, что аналогичные максимумы в его основном состоянии не пересекаются при всех значениях t, меньших, чем t_0. Поэтому каждый из этих максимумов является независимой функцией основного состояния.

3. Вкратце рассмотрим вырождение основного состояния в случае заряженного поля, когда

$$H = h \sum_k \left[- \frac{\partial^2}{h^2 \partial\phi(k)\, \partial\bar{\phi}(+k)} + (k^2 + M^2)\phi(k)\bar{\phi}(+k) \right]$$

$$+ g h^3 \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} \phi(k_1)\phi(k_2)\bar{\phi}(k_3)\overline{\phi(+k_1 + k_2 - k_3)} ;$$

здесь черта сверху означает комплексное сопряжение (в отличие от 2,8). Процедура пункта 2.2 позволяет получить (для достаточно малых значений t) инвариантный при преобразовании

$$\phi(k) \to e^{i\alpha} \phi(k)$$

функционал основного состояния, локализованный в смысле п. 2,8 около "круга"

$$\phi(k) = \nu\delta(k), \qquad 0 \leq \arg\nu < 2\pi$$

(величина $|\nu|$ определяется подобно (28)). Для заряженного поля вырождение основного состояния оказывается бесконечно кратным. Действительно, заменим в H переменные

$$\phi(0) = r e^{i\theta} ,$$

$$\phi(k) = \phi'(k) e^{i\theta} ,$$

тогда в выражении H кинетическая энергия примет вид

$$T = \frac{1}{h}\left(-\sum_{k\neq 0} \frac{\partial^2}{\partial\phi'(k)\partial\bar{\phi}'(k)} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2}\right).$$

Упомянутый выше функционал основного состояния Ω_0 не зависит от угла θ ; положим

$$\Omega_m \equiv e^{im\theta} \Omega_0 .$$

Очевидно,

$$H\Omega_m = e^{im\theta} \left(H + \frac{m^2}{h r^2}\right)\Omega_0 .$$

Так как $r \approx \nu/h$ и $h \to 0$, то все функционалы $\Omega_m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ являются собственными функционалами оператора H , принадлежащими одному и тому же собственному значению.

Автор выражает благодарность профессору Д.И. Блохинцеву и академику М.А. Маркову за неоднократные обсуждения и постоянный интерес к работе.

Литература

1. J.Goldstone. Nuovo Cimento, 19, 154 (1961).
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, Москва, 1957.
3. Л.Г. Заставенко. К квантовой теории скалярного нейтрального поля с самодействием в случае одной пространственной степени свободы. Препринт ОИЯИ, 3113, Дубна, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1969 года.