ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4321

Л.Г.Заставенко

ЧАСТИЧНЫЙ УЧЕТ САМОДЕЙСТВИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4321

Л.Г.Заставенко

ЧАСТИЧНЫЙ УЧЕТ САМОДЕЙСТВИЯ В ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

§ 1. Введение. Формулировка задачи

В настоящей работе мы продолжаем начатое ранее /1/ исследование скалярного нейтрального поля в свободном от расходимостей случае одной пространственной степени свободы.

Заменой

$$\Omega = u e^{-\kappa},$$

где $e^{-\kappa}$ – функционал основного состояния гамильтониана:

$$H = \frac{1}{2} \int dk \, [\pi(k)\,\pi(-k) + (k^2 + M^2)\,\phi(k)\,\phi(-k)] + g \int \prod_{i=1}^{4} (\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4), \tag{1}$$

а κ и u –степенные функционалы (A.4), (A.4′), уравнение Шредингера

$$H\Omega = \lambda\,\Omega$$

преобразовано в работе /1/ к виду уравнений (A.6) и (A.10) для определения функционала основного состояния и функционалов возбужденных состояний соответственно (здесь и далее (A.4), (A.6) ...–формулы (4), (6)... работы /1/).

Уравнения (A.6), (A.10) не содержат неопределенной величины энергии основного состояния и могут быть решены стандартными математическими методами (в сочетании с обрыванием).

1.1. Таким образом можно получить решение уравнения основного состояния и для уравнения возбужденных состояний – набор решений, соответствующих одночастичным состояниям, двухчастичным состояниям и так далее. По физическому смыслу любым двум импульсам p_1, p_2 можно сопоставить двухчастичное состояние рассеяния $u(p_1, p_2)$, соответствующее взаимному рассеянию двух одночастичных состояний с первоначальными импульсами p_1 и p_2, $u(p_1)$ и $u(p_2)$. Функционал этого состояния имеет вид:

$$u(p_1,p_2) = \int \gamma_2^{p_1 p_2}(k_1,k_2)\phi(k_1)dk_1 dk_2\, \delta(k_1+k_2-p_1-p_2) \quad (2)$$

$$+ \int \gamma_4^{p_1,p_2}(k_1,k_2,k_3,k_4)\prod_{i=1}^{4}(\phi(k_i)\,dk_i)\,\delta(k_1+k_2+k_3+k_4-p_1-p_2),$$

$$+ \ldots\ldots$$

где ядра γ_2, γ_4 суть аналитические функции g при $g>0$; γ_4, γ_6, ... исчезают при $g\to 0$; $\gamma_2^{p_1 p_2}(k_1,k_2)$ при $g\to 0$ стремится к пределу

$$\delta(k_1-p_1)\delta(k_2-p_2)+\delta(k_1-p_2)\delta(k_2-p_1).$$

Если Λ_{p_1}, Λ_{p_2} и Λ_{p_1,p_2} – энергии состояний $u(p_1)$, $u(p_1)$ и $u(p_1,p_2)$, то должно быть

$$\Lambda_{p_1,p_2} = \Lambda_{p_1} + \Lambda_{p_2}. \quad (3)$$

Между тем, из системы уравнений, описывающей двухчастичные состояния, (полученной при подстановке (2) в (9), (6)), равенство (3) не усматривается. Для того, чтобы равенство (3) стало очевидным, надо преобразовать уравнение возбужденных состояний к другому виду. Это преобразование и является основным содержанием настоящей работы.

1.2. Оно сводится к переходу от функции $\phi(p)$ – как независимой переменной – к функции $u(p)$ – функции одночастичного состояния с импульсом p.

§ 2. Преобразование

Функцию одночастичного состояния мы, несколько изменив обозначения /1/, запишем в виде:

$$u(p) = \phi(p) + \int \gamma_3^p (k_1, k_2, k_3) \prod_{i=1}^{3} (\phi(k_i) dk_i) \delta(k_1 + k_2 + k_3 - p)$$

$$+ \int \gamma_5^p (k_1, k_2 \ldots k_5) \prod_{i=1}^{5} (\phi(k_i) dk_i) \delta(k_1 + k_2 + \ldots k_5 - p), \tag{4}$$

$$+ \ldots \ldots$$

$u(p)$ определяется как решение уравнения

$$H' u(p) = \Lambda_p u(p), \tag{5}$$

где

$$H' \equiv \int dk \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(k)\,\delta\phi(-k)} + \frac{\delta\kappa}{\delta\phi(k)} \frac{\delta}{\delta\phi(-k)} \right] \tag{6}$$

переходящее в $\phi(p)$ при $g \to 0$.

2.1. Формальным обращением "степенного ряда" (4) является

$$\phi(p) = u(p) + \int \Gamma_3^p (k_1, k_2, k_3) \prod_{i=1}^{3} (u(k_i) dk_i) \delta(k_1 + k_2 + k_3 - p)$$

$$+ \int \Gamma_5^p (k_1, k_2, \ldots k_5) \prod_{i=1}^{5} (u(k_i) dk_i) \delta(k_1 + k_2 + \ldots k_5 - p) \tag{7}$$

$$\ldots \ldots$$

Здесь

$$\Gamma_3^p (k_1, k_2, k_3) = -\gamma_3^p (k_1, k_2, k_3)$$

$$\Gamma_5^p (k_1, k_2, \ldots k_5) = -\gamma_5^p (k_1, k_2, \ldots k_5) \tag{8}$$

$$+ 3\,\mathrm{simm}(k_1, k_2, \ldots k_5)\, \Gamma_3^p (k_1, k_2, p - k_1 - k_2)\, \Gamma_3^{p - k_1 - k_2} (k_3, k_4, k_5).$$

2.2. Рассмотрим упомянутое в п. 1.1. двухчастичное состояние рассеяния u_{p_1,p_2}. Оно определяется уравнением Шредингера

$$H^1 u = \Lambda_{p_1,p_2} u \quad . \tag{9}$$

Вместо того чтобы искать представление $u(p_1,p_2)$ "рядом" по степеням ϕ представим этот функционал "рядом" по степеням u :

$$\begin{aligned} u(p_1,p_2) = &\int X_2^{p_1 p_2}(k_1,k_2)\, u(k_1)\, u(k_2)\, dk_1\, dk_2\, \delta(k_1+k_2-p_1-p_2) \\ &+ \int X_4^{p_1 p_2}(k_1,k_2,k_3,k_4) \prod_{i=1}^{4}(u(k_i)dk_i)\, \delta(k_1+k_2+k_3+k_4-p_1-p_2) \\ &+ \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

подставив (10) в (9), получим

$$\begin{aligned} H^1 u(p_1,p_2) = &\int X_2^{p_1 p_2}(k_1,k_2)\,(\Lambda_{k_1}+\Lambda_{k_2}) \prod_{i=1}^{2}(u(k_i)dk_i)\, \delta(k_1+k_2-p_1-p_2) \\ &\int X_4^{p_1 p_2}(k_1,\ldots k_4)\,(\Lambda_{k_1}+\Lambda_{k_2}+\Lambda_{k_3}+\Lambda_{k_4}) \prod_{i=1}^{4}(u(k_i)dk_i)\, \delta(k_1+\ldots k_4-p_1-p_2) \\ &+ \ldots \\ &-\frac{1}{2}\int da\, db\, Y(a,b)\,[\,2\cdot 1\, X_2^{p_1 p_2}(a,b)\, \delta(a+b-p_1-p_2) + \\ &+ 4\cdot 3\, X_4^{p_1 p_2}(a,b,k_1,k_2) \prod_{i=1}^{2}(u(k_i)dk_i)\, \delta(k_1+k_2+a+b-p_1-p_2) \\ &+ 6\cdot 5\, X_6^{p_1 p_2}(a,b,k_1,\ldots k_4) \prod_{i=1}^{2}(u(k_i)dk_i)\, \delta(k_1+k_2+k_3+k_4+a+b-p_1-p_2) \\ &+ \ldots\,] . \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь

$$Y(a,b) = \int dk\, \frac{\delta u(a)}{\delta\phi(k)}\, \frac{\delta u(b)}{\delta\phi(-k)} \, . \tag{12}$$

Часть (11), содержащая Y, возникает от действия двух вариационных производных первого члена (6) на разные функционалы $u(k_i)$, $u(k_j)$, остающаяся часть функционала $H^1u(p_1, p_2)$, с учетом уравнения (5), определяющего $u(p)$, преобразуется к виду не содержащей Y, части (11).

2.3. С помощью (4) и (7) получаем степенное разложение функционала (12):

$$Y(a,b) = \delta(a+b) + \int Y_2(a, b, k_1, k_2) \prod_{i=1}^{2} (u(k_i) dk_i) \delta(a+b-k_1-k_2)$$

$$+ \int Y_4(a, b, k_1, k_2, k_3, k_3) \prod_{i=1}^{4} (u(k_i) dk_i) \delta(a+b-k_1-k_2-k_3-k_4) \tag{13}$$

$$+ \ldots .$$

Определив коэффициентные функции $z_n(p,k;k_1,k_2,\ldots k_n)$ разложением:

$$\frac{\delta u(p)}{\delta\phi(k)} = \delta(p-k) + \int z_2(p,k;k_1,k_2) \prod_{i=1}^{2} (u(k_i) dk_i) \delta(p-k-k_1-k_2)$$

$$+ \ldots$$

так, что

$$z_2(p, k; k_1, k_2) = 3\gamma_3^p(k, k_1, k_2)$$

$$z_4(p, k; k_1, \ldots k_4) = 5\gamma_5^p(k, k_1, \ldots . k_4) +$$

$$-6\, \mathrm{simm}(k_1, k_2, k_3, k_4) \gamma_3^p(k, k_1, p-k_1-k) \gamma_3^{p-k_1-k}(k_2, k_3, k_4)$$

$$\ldots .$$

легко находим

$$Y_2(p, q; k_1, k_2) = z_2(p, -q; k_1, k_2) + z_2(q, -p; k_1, k_2)$$

$$Y_4(p,q;k_1,\dots k_4)=z_4(p,-q;k_1,\dots k_4)+z_4(q,-p;k_1,\dots k_4)$$

$$+\,\mathrm{simm}(k_1,k_2,k_3,k_4)\,z_2(p,p-k_1-k_2;k_1,k_2)\,z_2\,(q,q-k_3-k_4;k_3,k_4)$$

2.4. Из (11) и (13) находим следующую форму уравнения Шредингера:

$$(\Lambda_{p_1p_2}-\Lambda_{k_1}-\Lambda_{k_2})\,X_2^{p_1p_2}(k_1,k_2)=$$

$$=-\frac{1\cdot 2}{2}\int X_2^{p_1p_2}(a,b)\,Y_2(a,b;k_1,k_2)\,\delta(a+b-p_1-p_2)\,da\,db$$

$$-\frac{3\cdot 4}{2}\int X_4^{p_1p_2}(a,b,k_1,k_2)\,\delta(a+b)\,da\,db$$

$$(\Lambda_{p_1p_2}-\Lambda_{k_1}-\Lambda_{k_2}-\Lambda_{k_3}-\Lambda_{k_4})\,X_4^{p_1p_2}(k_1,k_2,k_3,k_4)=$$

$$-\frac{1\cdot 2}{2}\int da\,db\,Y_4(a,b;k_1,k_2,k_3,k_4)\,X_2^{p_1p_2}(a,b)\delta(a+b-p_1-p_2) \tag{14}$$

$$-\frac{3\cdot 4}{2}\int da\,db\,\mathrm{simm}(k_1,k_2,k_3,k_4)\,Y_2(a,b;k_1,k_2)\,X_4^{p_1p_2}(a,b;k_3,k_4)$$

$$\delta(a+b+k_3+k_4-p_1-p_2)$$

$$-\frac{5\cdot 6}{2}\int da\,db\,X_6^{p_1p_2}(a,b,k_1,k_2,k_3,k_4)\,\delta(a+b)$$

$$\dots$$

2.5. При такой форме записи соотношения аддитивности типа (3) являются столь же очевидными, как, например, в задаче о взаимодействии двух частиц для нерелятивистского уравнения Шредингера (в импульсном представлении):

$$\left(\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}\right)\Psi(p_1,p_2)+\int V(p_1-p_2-q_1+q_2)\Psi(q_1,q_2)\delta(p_1+p_2-q_1-q_2)\,dq_1dq_2=E\Psi(q_1,q_2)$$

Здесь соотношения (3) следуют из предположения о гладкости потенциала V, добавка к V сингулярной части $V(p)\to V(p)+\delta(p)$ нарушает аддитивность.

§ 3. Заключительные замечания

Преобразование § 2 использует одночастичное решение уравнения Шредингера для упрощенной записи этого уравнения. Физически произведенное преобразование соответствует частичному учету и исключению самодействия – именно той его части, которая ответственна за образование одночастичного состояния. Однако продолжение процедуры § 2 для полного учета самодействия путем включения в разложение (10) степеней функционалов связанных двухчастичных и более сложных состояний (если таковые имеются), по-видимому, невозможно.

Полный учет самодействия может быть произведен методом Экштейна[2], наше же преобразование (§ 2) предпринято с более узкой целью – убедиться в справедливости необходимых соотношений аддитивности (3). Кроме того, форма (14) уравнения двухчастичного состояния, вероятно, удобнее, чем первоначальная форма уравнения Шредингера (типа (А.10)).

Пользуюсь случаем выразить благодарность академику М.А. Маркову за интерес к работе. Я весьма обязан также Б.Н. Захарьеву и М.И. Широкову, обратившим мое внимание на работу[2].

Литература

1. Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ Р2-3113, Дубна 1967 год.

2. H.Ekstein. Nuovo Cimento **4**, 1017 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1969 г.