ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4320

Л.Г.Заставенко

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 4320

Л.Г.Заставенко

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СКАЛЯРНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО ПОЛЯ С САМОДЕЙСТВИЕМ В СЛУЧАЕ ДВУХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

§1. В в е д е н и е

Мы будем рассматривать систему, определенную гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\int d\vec{k}\,[\,\pi(\vec{k})\,\pi(-\vec{k}) + (\vec{k}^{\,2} + M^2)\,\phi(\vec{k})\,\phi(-\vec{k})\,] + \\ + g\int \prod_{i=1}^{4}(\phi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4)\,. \tag{1}$$

Здесь интегралы берутся по области

$$|\vec{k}\,| < \ell\,, \quad |\vec{k}\quad| < \ell$$

двумерного пространства.

1.1. Часто используется запись гамильтониана (1) в форме

$$H = \frac{1}{2}\int dk\,[\,\pi(\vec{k})\,\pi(-\vec{k}) + (\vec{k}^{2} + \mu^2)\,\phi(\vec{k})\,\phi(-\vec{k})\,] + \\ + g\hat{N}\int \prod_{i=1}^{4}(\phi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4) + \\ + \frac{1}{2}\,\delta\mu^2\int \phi(\vec{k})\,\phi(-\vec{k})\,dk\,, \tag{1'}$$

где $\hat{N}$ – символ нормального произведения /2/; при этом параметры M^2 и μ^2 , $\delta\mu^2$ связаны соотношением

$$\mu^2 + \delta\mu^2 = M^2 + 12\,g\int\frac{d\vec{k}}{2E_k} \tag{2}$$

и соотношением (3); $E_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}$. Как известно, теория возмущений в рассматриваемом случае содержит единственный неприводимый расходящийся график – график собственной энергии второго порядка:

$$H''(p,p') = -\frac{4\cdot 4!}{2E_p} g^2 \int \frac{dk_1\, dk_2\, dk_3}{2E_{k_1} 2E_{k_2} 2E_{k_3}} \delta(k_1 + k_2 + k_3 - p)\delta(p' - p) \frac{(2\pi)^2}{V}$$

$$\left[\frac{1}{E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} + E_p} + \frac{1}{E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} - E_p} \right].$$

Таким образом, выбор величины $\delta\mu^2$ в (1')

$$\delta\mu^2 = 4\cdot 4!\, g^2 \int \frac{dk_1\, dk_2\, dk_3}{2E_{k_1}\, 2E_{k_2}\, 2E_{k_3}} \left[\frac{\delta(k_1 + k_2 + k_3 - p)}{E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} + E_p} + \frac{\delta(k_1 + k_2 + k_3 - p)}{E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} - E_p} \right] \quad (3)$$

обеспечивает отсутствие расходимостей в теории возмущений: если рассматривать два последние члена (1') как возмущение, то все порядки теории возмущений по константе связи g оказываются конечными.

1.2. В настоящей работе мы применим в рассматриваемом двумерном случае метод работы /1/. При попытке построить решение уравнения Шредингера

$$H\Omega = \lambda\Omega \quad (4)$$

возникают расходимости. Все они, однако, могут быть отнесены за счет некоторого множителя в Ω. Именно, если

$$w = \exp\left[\frac{1}{2} z(\ell) \int \phi(k)\phi(-k)\, dk \right],$$

где $Z(\ell)$ – функция, определенная уравнением (13), и

$$\Omega = w\,\Omega',$$

то все коэффициентные функции, определяющие функционал Ω', имеют конечный предел при $\ell \to \infty$.

В двумерном случае, как и в одномерном /3/, для достаточно малых значений константы M^2 основное состояние – вырождено. Случаи вырожденного и невырожденного вакуума рассматриваются отдельно в §3 и §2. В §4 выведены регуляризованные уравнения возбужденных состояний.

В Приложениях даны формулы, выражающие параметр M^2 через r, g, ℓ; из них, в частности, видно, что случаям §2 и §3 соответствуют разные области значений M^2.

1.3. Уравнения §2 и §3 описывают систему взаимодействующих частиц. Эти уравнения получены при выборе (3) перенормировочной (то есть логарифмически большой) части массового параметра. Отличный от (3) на величину $O(\ln\ell)$ выбор $\delta\mu^2$ приводит к уравнениям, описывающим систему частиц с бесконечно большой массой покоя $\approx \ln\ell$; взаимодействие между этими частицами исчезает при $\ell \to \infty$.

§2. Невырожденное основное состояние

Представим функционал Ω_0 основного состояния в виде

$$\Omega_0 = e^{-\kappa},$$

где

$$\kappa = \frac{1}{2}\Big(\int a(\vec k)\phi(\vec k)\phi(-\vec k)\, d\vec k +$$

$$+ \int C_4(\vec k_1, \vec k_2, \vec k_3, \vec k_4) \prod_1^4 (\phi(\vec k_i)\, d\vec k_i)\, \delta(\vec k_1 + \vec k_2 + \vec k_3 + \vec k_4) +$$

$$+ \int C_6(\vec k_1, \vec k_2, \ldots, \vec k_6) \prod_1^6 (\phi(\vec k_i)\, d\vec k_i)\, \delta(\vec k_1 + \vec k_2 + \ldots \vec k_6).$$

Тогда из (1), (4) следуют уравнения

$$\begin{aligned} &a^2(\vec p) = p^2 + m^2 + 6 \int (C_4(\vec p, -\vec p, \vec k, -\vec k) - C_4(0,0,\vec k, -\vec k))\, d\vec k, \\ &\Sigma_4 C_4(\vec p_1 \vec p_2, \vec p_3, \vec p_4) = 2g + 15 \int C_6(\vec p_1, \vec p_2, \vec p_3, \vec p_4, \vec k, -\vec k)\, d\vec k, \\ &\Sigma_6 C_6(\vec p_1, \ldots \vec p_6) + 2\cdot 2[C_4 C_4] = 28 \int C_8(\vec p_1, \ldots, \vec p_6, \vec k - \vec k)\, d\vec k \end{aligned} \quad (5)$$

для определения коэффициентных функций a, C_4, C_6... Здесь, как и в /1/, /3/,

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a(\vec k_i),$$

$$m^2 = M^2 + 6\int C_4(0,0,\vec k,-\vec k)\,d\vec k,$$

$$[C_4C_4](\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3,\vec k_4)\vec k_5,\vec k_1) \equiv \mathrm{simm}(\vec k_1,\vec k_2\dots\vec k_6)\qquad(6)$$

$$C_4(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3,-\vec k_1-\vec k_2-\vec k_3)C_4(\vec k_4,\vec k_5,\vec k_6,-\vec k_4-\vec k_5-\vec k_6).$$

. . . .

В отличие от /1/, в рассматриваемом двумерном случае уравнения (5) не допускают прямого перехода к пределу $\ell\to\infty$, ибо подинтегральные выражения в (5) при больших k убывают как k^{-2}, так что интегралы при $\ell\to\infty$ неограниченно растут.

2.1. Действительно, приняв

$$C_4 \approx 2g/\Sigma_4,$$

$$C_6 \approx -4[C_4C_4]/\Sigma_6,\qquad(7)$$

$$C_8 \approx -12[C_4C_6]/\Sigma_8$$

. . . . .

и подставив эти выражения в интегралы, находим

$$6\int[C_4(\vec p,-\vec p,\vec k,-\vec k)-C_4(0,0,\vec k,-\vec k)]\,d\vec k = -6[a(\vec p)-a(0)]\int\frac{d\vec k}{[a(\vec p)+a(\vec k)][a(0)+a(\vec k)]};\qquad(8)$$

так как для больших $\vec k$ $a(\vec k)\approx k$, то интеграл здесь $\approx\ln\ell$; далее

$$15\int C_6(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3,\vec k_4,\vec k,-\vec k)\,d\vec k = 6C_4(\vec k_1,\dots,\vec k_4)\sum_{i=1}^{4}\int\frac{C_4(\vec k,-\vec k,\vec k_i,-\vec k_i)}{\Sigma_4+2a_k}\,d\vec k +$$

$$+36\,\mathrm{simm}(\vec k_1,\vec k_2,\vec k_3,\vec k_4)\int\frac{C_4(\vec k_1,\vec k_2,\vec k,-\vec k_1-\vec k_2-\vec k)C_4(\vec k_3,\vec k_4,-\vec k,-\vec k_3-\vec k_4+\vec k)}{\Sigma_4+2a_k}\,d\vec k.$$

Здесь первый член имеет порядок величины $\ln\ell$, второй при $\ell\to\infty$ стремится к конечному пределу; вообще несложная комбинаторика дает, в

приближении (7), следующую величину расходящейся части интеграла $\int C_{2+n}\,d\vec k$:

$$\frac{n(n+2)}{2}\int C_{n+2}(\vec k_1,\vec k_2,\dots,\vec k_n,\vec k,-\vec k)\,d\vec k \approx 6C_n(\vec k_1,\vec k_2,\dots,\vec k_n)\sum_{i=1}^{n}\int d\vec k\,\frac{C_4(\vec k,-\vec k,\vec k_i,-\vec k_i)}{\Sigma_n+2a(\vec k)}.\qquad(9)$$

2.2. Итак, все интегралы в (5) неограниченно растут (как $\ln\ell$) с ростом ℓ. Поэтому нельзя ожидать, что все коэффициентные функции a, C_4, C_6 . . . при $\ell\to\infty$ стремятся к конечным пределам. Заметим, однако, что большие величины входят в (8), (9) весьма специфическим образом, именно, так, что все они могут быть отнесены только за счет функции a. Мы положим

$$a(\vec p) = b(\vec p) - Z,\qquad(10)$$

где z – большое число, которое, как мы покажем, можно выбрать так, чтобы все функции b, C_4, C_6 . . . при $\ell\to\infty$ стремились к конечным пределам. Заметим, что соотношение

$$a(0) = m,$$

следующее из (5), и (10) требует замены m на новый параметр r:

$$r \equiv m + Z = b(0),\qquad(11)$$

не зависящий от ℓ. Переписываем уравнения (5) в виде

$$b^2(\vec p) = p^2 + r^2 + 2z[b(\vec p)-r] + 6\int d\vec k\,[C_4(\vec p,-\vec p,\vec k,-\vec k)-C_4(0,0,\vec k,-\vec k)],$$

$$\sigma_4C_4 = 2g + 4ZC_4 + 15\int C_6\,dk,\qquad(12)$$

$$\sigma_6C_6 + 4[C_4C_4] = 6ZC_6 + 28\int C_8\,dk.$$

. . . .

Здесь

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b(\vec p_i).$$

Заменив формулы (7) на

$$C_4 \approx 2g/\sigma_4 ,$$

$$C_6 \approx -4[C_4 C_4]/\sigma_6$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

и повторяя манипуляции пункта 2.1, убеждаемся, что при выборе Z

$$Z = 3g \int \frac{d\vec{k}}{(b(\vec{k})+r)^2} \tag{13}$$

расходимости в правой части (12) не возникают (члены с Z компенсируют расходимости интегралов). Таким образом, уравнения

$$b^2(\vec{p}) = p^2 + r^2 + 6\int d\vec{k}\,[C\,(\vec{p},-\vec{p},\vec{k},-\vec{k}) - C\,(0,0,\vec{k},-\vec{k}) + g\,\frac{b(\vec{p})-r}{(b(\vec{k})+r)^2}],$$

$$C_4\sigma_4 = 2g + \int dk\,[15\,C_6(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,\vec{k},-\vec{k}) + 12g\,\frac{C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4)}{(b(\vec{k})+r)^2}], \tag{14}$$

$$C_6\sigma_6 + 4[C_4 C_4] = \int d\vec{k}\,[28\,C_8 + 18\,g\,\frac{C_6}{(b(\vec{k})+r)^2}]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

являются регуляризованной формой уравнений (5).

2.3. При обрывании системы (14) необходимо в последнем из взятых уравнений выкинуть правую часть целиком, а не $\int C_{n+2}\,d\vec{k}$ или $C_n\int d\vec{k}/(r+b(\vec{k}))^2$ отдельно, иначе возникнут расходимости.

2.4. Решение системы (14) позволяет, в частности, выразить параметр M^2 через r, g, ℓ; полученное выражение согласуется с (3) (см. Приложение 1).

§3. Вырожденное основное состояние

Подобно /3/, положим

$$\phi(k) = \psi(k) + \beta\,\delta(k),$$

представим κ, $\kappa \equiv -\ln\Omega_0$ в виде

$$\kappa = \frac{1}{2}[\,C_1\psi(0) + \int a(\vec{k})\,\psi(\vec{k})\,\psi(-\vec{k})\,d\vec{k} +$$

$$+ \int C_3(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)\prod_{i=1}^{3}(\psi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3)$$

$$+ \int C_4(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4)\prod_{i=1}^{4}(\psi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4);$$

$$+ \cdots\ ]$$

для определения коэффициентных функций получаем уравнения (ср. /3/, уравнение (19) и следующие)

$$\frac{2}{2}\,C_1 a(0) = 2M^2\beta + 8g\beta^3 + 3\int C_3(\vec{k},-\vec{k},0)\,dk,$$

$$\frac{3}{2}\,C_1 C_3(\vec{p},-\vec{p},0) + a^2(\vec{p}) = p^2 + M^2 + 12g\beta^2 + 6\int C_4(\vec{p},-\vec{p},\vec{k},-\vec{k})\,d\vec{k},$$

$$\frac{4}{2}\,C_1 C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,0) + \Sigma_3 C_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) =$$

$$= 8g\beta + 10\int C_5(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{k},-\vec{k})\,d\vec{k},$$

$$\frac{5}{2}\,C_1 C_5(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,0) + \Sigma_4 C_4 + \frac{3\cdot 3}{4}[C_3 C_3] =$$

$$= 2g + 15\int C_6(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,\vec{k},-\vec{k})\,d\vec{k},$$

$$\frac{6}{2}\,C_1 C_6(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_5,0) + \Sigma_5 C_5 + 2\,\frac{3\cdot 4}{4}[C_3 C_4] \tag{15}$$

$$= 21\int C_7(\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_5,\vec{k},-\vec{k})\,d\vec{k},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Выберем значение C_1:

$$C_1 = -2\beta Z,$$

и перейдем от $a(\vec{p})$ к новой неизвестной функции $b(\vec{p})$:

$$a(\vec{p}) = b(\vec{p}) - Z,$$

величину Z, как и ранее, будем считать определенной формулой (13), где $r = b(0)$. После этого можно переписать уравнения (15), начиная с третьего, в виде:

$$\sigma_3 C_3 - 8g\beta = \int d\vec{k}\,[\,10\,C_5(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{k},-\vec{k}) +$$

$$+ 3g\,(3C_3(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) + 4\beta C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,0))/(b(\vec{k})+r)^2],$$

$$\sigma_4 C_4 + \frac{3\cdot 3}{4}[C_3C_3] - 2g = \int d\vec{k}\,[\,15\,C\,(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,\vec{k},-\vec{k}) + \qquad (16)$$

$$+ 3g(\,4C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4) + 5\beta C_5(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,0))/(b(\vec{k})+r)^2\,],$$

$$\sigma_5 C_5 + 2\,\frac{3\cdot 4}{4}[C_3C_4] = \int d\vec{k}[\,21\,C_7(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\dots,\vec{p}_5,\vec{k},\ -\vec{k}) +$$

$$+ 3g\,(5C_5(\vec{p}_1,\dots,\vec{p}_5) + 6\beta C_6(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,\vec{p}_5,0))/(b(\vec{k})+r)^2],$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

3.1. Пренебрежем в (16) правыми частями, определим из таких уравнений функции C_3, C_4, C_5, . . . и подставим эти функции в правые части (16). Рассмотрение, подобное проведенному в пункте 2.1, показывает, что при этой подстановке расходимости не возникают.

3.2. Используя выбранное выше значение C_1 и формулу (13), перепишем второе уравнение системы (15) в следующей эквивалентной форме:

$$b^2(\vec{p}) = p^2 + r^2 + 6\int dk\,[\,C_4(\vec{p},-\vec{p},\vec{k},-\vec{k}) - C_4(0,0,\vec{k},-\vec{k}) +$$

$$+ g(b(\vec{p}) - r + \frac{3\beta}{2}(C_3(\vec{p},-\vec{p},0) - C_3(0,0,0)))/(b(\vec{k})+r)^2\,]. \qquad (17)$$

Здесь константа r, $r = b(0)$, определяется соотношением

$$8g\beta^2 + \int d\vec{k}\,[\,6C_4(0,0,\vec{k},-\vec{k}) - 3C_3(\vec{k},-\vec{k},0)/(2\beta)] + \qquad (18)$$

$$+ 3\beta Z\,C_3(0,0,0) - r(r-Z) = 0,$$

которое следует из (17) и первых двух уравнений системы (15).

3.3. Приближенно определим C_4 способом пункта 3.1; подставив полученное выражение в (17), убеждаемся, что расходимостей не возникает. При этом надо учесть, что, ввиду первого уравнения (16), величина

$$\int \frac{C_3(\vec{k},-\vec{k},0)}{b(\vec{k}) + b(\vec{p})}\,dk - \beta Z$$

конечна (то есть стремится к конечному пределу при неограниченном росте параметра обрезания ℓ). Тем же путем можно убедиться, что уравнение (18) фактически не содержит больших величин (типа Z): они взаимно компенсируются, так что (18) сводится к

$$8g\beta^2 = r^2 + \dots$$

3.4. Уравнения (16), (17), (18) и есть уравнения, определяющие основное состояние в случае, когда оно вырождено.

§4. Возбужденные состояния

Собственные функционалы возбужденных состояний мы, как и в работе [1], представим в виде произведения Ω_0 на неизвестный функционал u :

$$\Omega = u\,\Omega_0 \,,$$

здесь Ω_0 – функционал основного состояния.

4.1. В случае невырожденного вакуума мы будем искать u в виде степенного ряда по нечетным степеням ϕ:

$$u = \Gamma_1^{\vec{p}}\,\phi(p) + \int \Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)\prod_{i=1}^{3}(\phi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{p}) +$$

$$+ \int \Gamma_5^{\vec{p}}(\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_5)\prod_{i=1}^{5}(\phi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_{45}+\vec{k}_5-\vec{p}),$$

$$\cdots$$

Для определения коэффициентных функций и энергии возбуждения $\Lambda(p)$ получаем уравнения (ср. [1]), формула (10)):

$$[\Lambda(p) - a(\vec{p})]\,\Gamma_1^{\vec{p}} = -3\int \Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{k},-\vec{k},\vec{p})\,d\vec{k},$$

$$[\Lambda(p) - \Sigma_3]\,\Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) = 2\,C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,-\vec{p})\,\Gamma_1^{\vec{p}} -$$

$$-10\int \Gamma_5^{\vec{p}}(\vec{k},-\vec{k},\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)\,d\vec{k},$$

$$[\Lambda(p) - \Sigma_5]\,\Gamma_5^{\vec{p}}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_5) = 3\cdot 1\,C_6(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_5,-\vec{p})\;\Gamma_1^{\vec{p}} +$$

$$+2\cdot 3\,\mathrm{simm}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots\vec{p}_5)\,C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\,\Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{p}_4,\vec{p}_5,\vec{p}-\vec{p}_4-\vec{p}_5) -$$

$$-21\int \Gamma_7^{\vec{p}}(\vec{p}_1,\ldots\vec{p}_5,\vec{k},-\vec{k})\,d\vec{k},$$

$$\cdots$$

Здесь во втором уравнении $\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=\vec{p}$, в третьем $\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3+\vec{p}_4+\vec{p}_5=\vec{p}$ и так далее. Подставим

$$a = b - Z$$

и, воспользовавшись для Z выражением (13), перепишем уравнения в виде

$$[\Lambda(p) - b(\vec{p})]\,\Gamma_1^{\vec{p}} = -\int d\vec{k}\,[\,3\,\Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{k},-\vec{k},\vec{p}) + 3\,g\,\Gamma_1^{p}/(b(\vec{k})+r)^2\,]$$

$$[\Lambda(p) - \sigma_3]\,\Gamma_3^{p} - 2\,C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,-\vec{p})\,\Gamma_1^{p} =$$

$$= -\int d\vec{k}\,[\,10\,\Gamma_5^{\vec{p}}(\vec{k},-\vec{k},\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3) + 9\,g\,\Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)/(b(\vec{k})+r)^2\,] \tag{19}$$

$$[\Lambda(p) - \sigma_5]\,\Gamma_5^{\vec{p}} - 3\,C_6(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4,\vec{p}_5,-\vec{p})\,\Gamma_1^{\vec{p}} -$$

$$-6\,\mathrm{simm}(\vec{p}_1,\vec{p}_2\ldots\vec{p}_5)\,C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,-\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\,\Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{p}_4,\vec{p}_5,-\vec{p}_5-\vec{p}_4+\vec{p}) =$$

$$= -\int d\vec{k}\,[\,21\,\Gamma_7^{\vec{p}}(\vec{k},-\vec{k},\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots\vec{p}_5) + 15\,g\,\Gamma_5^{\vec{p}}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots\vec{p}_5)/(b(\vec{k})+r)^2\,].$$

Определим приближенно Γ_3, Γ_5, . . . уравнениями (19) без правых частей. Подставив найденные таким образом выражения в интегралы справа, убеждаемся, что расходимостей не возникает.

4.2. В случае вырожденного вакуума мы будем искать u в виде

$$u = \Gamma_1^{\vec{p}}\,\psi(\vec{p}) + \int \Gamma_2^{\vec{p}}(\vec{k},\vec{k})\prod_{i=1}^{2}(\psi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i)\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{p}) +$$

$$+ \int \Gamma_3^{\vec{p}}(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3)\prod_{i=1}^{3}(\psi(\vec{k}_i)\,d\vec{k}_i))\,\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{p})$$

$$+ \cdots$$

Получаем уравнения:

$$[\Lambda(p)-a(\vec p)]\,\Gamma_1^{\vec p}=-3\int d\vec k\,\Gamma_3^{\vec p}(\vec p,\vec k,-\vec k)+\frac{2}{2}C_1\Gamma_2^{\vec p}(\vec p,0),$$

$$[\Lambda(p)-\Sigma_2]\,\Gamma_2^{\vec p}=-6\int d\vec k\,\Gamma_4^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec k,-\vec k)+$$

$$+\frac{3}{2}C\;\Gamma_3^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,0)+\frac{3}{2}C_3(\vec p_1,\vec p_2,-\vec p)\,\Gamma_1^{\vec p}),$$

$$[\Lambda(p)-\Sigma_3]\,\Gamma_3^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)=-10\int d\vec k\,\Gamma_5^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3,\vec k,-\vec k)+$$

$$+\frac{4}{2}C_4(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3,-\vec p)\,\Gamma_1^{\vec p}+$$

$$+\frac{3\cdot 2}{2}\,\mathrm{simm}\,(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)\,C_3(\vec p_1,\vec p_2,-\vec p_1-\vec p_2)\,\Gamma_2^{\vec p}(\vec p_3,\vec p-\vec p_3)$$

$$+\frac{1\cdot 4}{2}C_1\Gamma_4^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3,0)$$

. . . .

Здесь во втором уравнении $\vec p_1+\vec p_2=\vec p$, в третьем уравнении $\vec p_1+\vec p_2+\vec p_3=\vec p$ и так далее. Подставим:

$$a(\vec p)=b(\vec p)-Z\,,$$

$$C_1=-2\beta Z\;;$$

воспользовавшись еще формулой (13), перепишем уравнения следующим образом:

$$[\Lambda(p)-b(\vec p)]\,\Gamma_1^{\vec p}=-\int d\vec k\Big[3\,\Gamma_3^{\vec p}(\vec p,\vec k,-\vec k)+3g\,\frac{1\,\Gamma_1^{\vec p}+2\beta\,\Gamma_2^{\vec p}(\vec p,0)}{(b(\vec k)+r)^2}\Big],$$

$$[\Lambda(p)-\sigma_2]\,\Gamma_2^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2)-\frac{3\cdot 1}{2}C_3(\vec p_1,\vec p_2,-\vec p)\,\Gamma_1^{\vec p}=$$

$$=-\int d\vec k\Big[6\,\Gamma_4(\vec p_1,\vec p_2,\vec k,-\vec k)+3g\,\frac{2\Gamma^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2)+3\beta\,\Gamma_3^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec 0)}{(b(\vec k)+r)^2}\Big],\qquad(20)$$

$$[\Lambda(p)-\sigma_3]\,\Gamma_3^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)-2C_4(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3,-\vec p)\,\Gamma_1^{\vec p}-$$

$$-3\,\mathrm{simm}\,(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)\,C_3(\vec p_1,\vec p_2,-\vec p_1-\vec p_2)\,\Gamma_2^{\vec p}(\vec p_3,\vec p-\vec p_3)=$$

$$=-\int dk\Big[10\,\Gamma_5^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3,\vec k,-\vec k)+3g\,\frac{3\Gamma_3^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3)+4\beta\,\Gamma_4^{\vec p}(\vec p_1,\vec p_2,\vec p_3,0)}{(b(\vec k)+r)^2}\Big]$$

. . .

Как и в пункте (3.1), убеждаемся, что при построении решений системы (20) расходимости не возникают.

4.3. Итак, нами получены регуляризованные уравнения для определения возбужденных состояний.

В заключение выражаю благодарность профессору Д.И. Блохинцеву и академику М.А. Маркову за интерес к работе.

Приложение 1

Мы выразим параметр M^2 через r, g, ℓ в случае §2. С точностью g^2, имеем из (14):

$$C_4 = \frac{2g}{\sigma_4} + \frac{2g}{\sigma_4^2}\Big[\,12\,g \int \frac{d\vec{k}}{(b(\vec{k})+r)^2} - 6\,g \sum_{i=1}^{4} \int \frac{d\vec{k}}{(b(\vec{k})+b(\vec{p}_i))(2b(\vec{k})+\sigma_4)}\Big] -$$

$$-\frac{36}{\sigma_4}\,\mathrm{simm}(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3,\vec{p}_4)\int d\vec{k}\,\frac{C_4(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{k},-\vec{k}-\vec{p}_1-\vec{p}_2)\,C_4(\vec{p}_3,\vec{p}_4,-\vec{k},\vec{k}-\vec{p}_3-\vec{p}_4)}{2\,b(\vec{k})+\sigma_4}\,.$$

Отсюда следует

$$\int C_4(\vec{q},-\vec{q},0,0)\,d\vec{q} = g\int\frac{d\vec{q}}{b(\vec{q})+r} + 6\,g^2\Big[\int\frac{d\vec{q}}{(b(\vec{q})+r)^2}\Big]^2 -$$

$$-6\,g^2\int\frac{d\vec{k}\,d\vec{q}}{(b(\vec{k})+r)^2\,(b(\vec{q})+r)^2(b(\vec{k})+b(\vec{q}))} -$$

$$-24\,g^2\int\frac{d\vec{k}\,d\vec{q}\,d\vec{x}\,\delta(\vec{k}+\vec{q}+\vec{x})}{(b(\vec{k})+r)\,(b(\vec{k})+b(\vec{q})+r)\,(b(\vec{k})+b(\vec{q})+b(\vec{x})+r)^2}\,.$$

Здесь в первом члене надо, согласно первому из уравнений (14), подставить

$$b(\vec{k}) = \omega(k) + 3\,g\,\frac{(\omega(k)-r)^2}{\omega(k)}\int\frac{d\vec{q}}{(\omega(q)+r)^2\,(\omega(q)+\omega(k))} + \ldots,$$

в остальных достаточно принять

$$b(\vec{k}) = \omega(k) + \ldots\,; \quad \omega(k) \equiv \sqrt{k^2+r^2}.$$

Таким образом,

$$g\int\frac{d\vec{q}}{b(\vec{q})+r} = g\int\frac{d\vec{k}}{\omega(k)+r} - 3\,g^2\int\frac{(\omega(q)-r)^2\,d\vec{k}\,d\vec{q}}{(\omega(k)+r)^2(\omega(q)+r)^2(\omega(k)+\omega(q))\,\omega(q)} +$$

$$+\ldots = g\int\frac{d\vec{k}}{\omega(k)+r} - \frac{3g^2}{2}\Big\{\Big[\int\frac{d\vec{k}}{(\omega(k)+r)^2}\Big]^2 + r^2\Big(\int\frac{d\vec{k}}{\omega(k)(\omega(k)+r)^2}\Big)^2 -$$

$$-4\,r\int\frac{d\vec{k}\,d\vec{q}}{(\omega(k)+r)^2(\omega(q)+r)^2\,(\omega(k)+\omega(q))}\Big\}$$

$$+\ \ldots$$

и, учитывая (6), (11), находим:

$$M^2 = (r-Z)^2 - 6\,g\int\frac{d\vec{q}}{\omega(q)+r} + Z'^2 - 4Z^2 + 2Z^2 +$$

$$+24\,g^2\int\frac{d\vec{k}\,d\vec{q}\,d\vec{x}\,\delta(\vec{k}+\vec{q}+\vec{x})}{\omega(k)\omega(q)\,\omega(x)\,[\,\omega(k)+\omega(q)+\omega(x)\,]}\ \Big]\,.$$

Здесь мы не выписываем конечные члены порядка g^2; величина Z' отличается от (13) заменой $b(\vec{k}) \to \omega(k)$. Согласно (13), (14) несложно убедиться, что разность $Z-Z'$ есть конечная величина порядка g^2; опуская ее, получаем искомое выражение M^2 через $M\,r$, $r\,g$, ℓ:

$$M^2 = r^2 - 6\,g\int\frac{d\vec{k}}{\omega(k)} + 6\,g\,r^2\int\frac{d\vec{k}}{\omega(k)\,(\omega(k)+r)^2} +$$

$$+24\,g^2\int\frac{d\vec{k}\,d\vec{q}\,d\vec{x}\,\delta(\vec{k}+\vec{q}+\vec{x})}{\omega(k)\,\omega(q)\,\omega(x)\,[\,\omega(k)+\omega(q)+\omega(x)\,]} +$$

$$+\ \ldots$$

Полученное представление согласуется с формулами (2) и (3) п. 1.1 и приводит к следующей связи параметров r и μ:

$$\mu^2 = r^2 + 12\,\pi\,g\,r + O(g^2)\,.$$

Приложение 2

Приводим без вывода выражение M^2 через r, g, ℓ в случае вырожденного вакуума:

$$M^2 = -\frac{r^2}{2} - 6g\int \frac{d\bar{k}}{\omega(k)} +$$

$$+24g^2\int \frac{d\vec{k}\, d\vec{q}\, d\vec{x}\, \delta(\vec{k}+\vec{q}+\vec{x})}{\omega(k)\omega(q)\omega(x)[\omega(k)+\omega(q)+\omega(x)]} +$$

$$+ \ldots ;$$

$$8g\beta^2 = r^2 + \text{const} \cdot gr + \ldots .$$

Литература

1. Л.Г. Заставенко. К квантовой теории скалярного нейтрального поля с самодействием в случае одной пространственной степени свободы. Препринт ОИЯИ, 3113, Дубна, 1967.
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, Москва, 1957.
3. Л.Г. Заставенко. Об основном состоянии гамильтониана в простейшей модели квантовой теории поля. Препринт ОИЯИ Р2-4332, Дубна, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1969 года.