СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4301

Р.П.Зайков

# ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4301

Р.П.Зайков

# ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ БЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

## 1. Введение

Обычно, когда рассматриваем Лагранжеву теорию свободного поля $\Phi(x)$, которое преобразуется по неприводимому представлению группы Лоренца $[\ell_0, \ell_1]$, энергия не получается положительно определенной, если $\ell_0$ – целое или полуцелое число и $\ell_1 = \ell_0 + n + 1$, где $n$ –целое положительное число[1]. Тогда поле $\Phi(x)$ описывает частицы со спином $s = \ell_0, \ell_0 + 1, \ldots, \ell_0 + n$. Чтобы устранить неопределенность в знаке энергии, на компоненты поля накладываются дополнительные условия (д.у.), которые сохраняют только часть $V_s(x)$ поля $\Phi(x)$, описывающую частицы с максимальным спином $s = \ell_0 + n$[2-6]. Например, если имеем дело с векторным полем, которое преобразуется по представлению $[0,2]$ группы Лоренца и описывает частицы со спином $s = 0$ и 1, на компоненты поля накладывается условие Лоренца[7], которое устраняет часть поля с $s = 0$.

При наличии взаимодействия нужно вводить суперпозицию состояний со спинами $n-1, n-2 \ldots$, но таким образом, чтобы при выключении внешнего поля совершился переход снова к полю со спином $n$ [3].

В работе[8] было получено спектральное представление двухточечной функции для широкого класса полей. Для конечнокомпонентных полей без наложений д.у., как легко проверить, эти функции удовлетворяют всем аксиомам теории поля[9], в том числе и условию спектральности. Но, согласно теореме реконструкции[9], можно восстановить теорию свободного поля, зная только его двухточечные функции. Поэтому представляет интерес попытаться изменить Лагранжев формализм для тензорного поля $\Phi(x)$

без д.у. таким образом, чтобы из него следовала положительная определенность энергии. Это можно сделать, например, следующим образом: расщепляя поле $\Phi(x)$ на поля с определенными значениями спина $V_s(x)$ и представляя Лагранжеву функцию поля $\Phi(x)$ как сумму Лагранжевых функций полей $V_s(x)$ без д.у.

Поля $V_s(x)$, описывающие частицы со спином $s$, получаются от поля $\Phi(x)$ с помощью проекционных операторов, введенных в работе[4]. Лагранжев формализм тензорного поля второго ранга на основе проекционных операторов с д.у. был развит в работе[5], а в работе[6] построен Лагранжев формализм тензорных полей до 4-того ранга.

Массы, соответствующие полям $V_s(x)$, можно выбирать произвольным образом. Полученная нами теория является локальной независимо от выбора массового спектра. В этом состоит ее отличие от бесконечно-компонентных теорий, где, согласно[10], поля с массовыми спектрами являются нелокальными[8].

Объединение полей $V_s(x)$ с разными спинами в единое поле сильно сужает класс возможных взаимодействий, если постулировать взаимодействия без производных. Более того, из-за зацепления уравнений взаимодействующих полей, которые мы получаем (для некоторых классов взаимодействий), следует, что это объединение в случае взаимодействующих полей не является тривиальным. Здесь нам не приходится сталкиваться с трудностями включения дополнительных полей, как в работе[3].

Мы ограничиваемся рассмотрением эрмитовых тензорных полей, т.е. полей, которые преобразуются по представлению группы Лоренца с $\ell_0 = 0$[1].

Обобщение для неэрмитовых полей можно сделать тривиальным образом.

## 2. *Тензорное поле*

По представлению $[0, n+1]$ группы Лоренца преобразуются тензоры ранга $n$, которые обладают следующими свойствами:

$$\Phi^{\mu_1 \cdots \mu_i \cdots \mu_j \cdots \mu_n}(x) = \Phi^{\mu_1 \cdots \mu_j \cdots \mu_i \cdots \mu_n}(x) \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

$$g_{\mu_1 \mu_2} \Phi^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_n}(x) = 0 .$$

Здесь $g_{\mu\nu}$ метрический тензор в пространстве Минсковского $g_{00} = -g_{kk} = 1$ $(k=1,2,3)$

Тензорные представления группы Лоренца $[0, n+1]$, которые являются неприводимыми относительно группы Лоренца, являются при $n > 0$ приводимыми относительно квантовомеханической группы Пуанкаре/9/. Они содержат представления группы Пуанкаре со спином $s = 0, 1, \ldots, n$. Разложение тензоров по неприводимым представлениям группы Пуанкаре мы делаем посредством операторов проецирования на состояния со спином $s$ – $\Pi_S$ $(S = 0, \ldots, n)$. Явный вид этих операторов можно получить от операторов $K_S$, полученных в работе/8/ путем симметризаций и вычитаний их шпуров.

В импульсном представлении они являются полиномами $2n$ степени относительно $\frac{p^{\mu}}{|p|}$ и, следовательно, являются нелокальными операторами. Переход в $x$ – представление делается, как обычно, посредством замены $p^{\mu} = -i \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$.

Операторы $\Pi_S$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\Pi^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{(s)\nu_1 \cdots \nu_n} \Pi^{\nu_1 \cdots \nu_n}_{(s')\tau_1 \cdots \tau_n} = \delta_{ss'} \Pi^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{(s)\tau_1 \cdots \tau_n} \tag{2.2}$$

и

$$\sum_{s=0}^{n} \Pi^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{(s)\nu_1 \cdots \nu_n} = I^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \cdots \nu_n} . \tag{2.3}$$

Здесь $I$ –единичный оператор в пространстве симметрических тензоров со шнуром, равным 0.

Поля $V_s$ с определенным спином $s$ получаем посредством проекционных операторов:

$$V_{(s)}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) = \Pi_{(s)\nu_1 \cdots \nu_n}^{\mu_1 \cdots \mu_n} \Phi^{\nu_1 \cdots \nu_n}(x) . \tag{2.4}$$

Поле $V_{(s)}$ имеет только $2S+1$ независимых компонент. Имея в виду (2.2) и (2.4), получаем, что:

$$\Pi_{(s)\nu_1 \cdots \nu_n}^{\mu_1 \cdots \mu_n} V_{(s')}^{\nu_1 \cdots \nu_n}(x) = 0 , \quad \text{если} \quad s \neq s' .$$

Из условия полноты (2.3) следует, что:

$$\Phi^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) = \sum_{s=0}^{n} V_{(s)}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) . \tag{2.5}$$

### *3. Лагранжев формализм свободного поля*

Релятивистски инвариантный лагранжиан реального свободного тензорного поля

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{1}{2} : \frac{\partial \Phi^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial \Phi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)}{\partial x_{\tau}} : \tag{3.1}$$

$$- \frac{m}{2} : \Phi^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) \Phi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) :$$

без д.у. приводит к выражению для энергии, которое не является знакоопределенным. Здесь, как обычно, знак : : означает, что операторы записаны в нормальной форме.

Мы покажем, что можно изменить лагранжиан (3.1) таким образом, чтобы энергия получалась положительно определенной. Будем рассматривать два случая: а) когда имеем произвольный массовый спектр и б) когда массы частиц с разными спинами одинаковы.

а) Докажем, что положительную определенность энергий в случае, когда имеется массовый спектр, можно получить, если заменить лагранжиан (3.1) на лагранжиан:

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}\Big\{ :\frac{\partial V_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n}(x)}{\partial x^{\tau}}\,\frac{\partial V_{(s)\mu_1\dots\mu_n}(x)}{\partial x_{\tau}}: -$$

$$-m_s^2 : V_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n}(x)\,V_{(s)\mu_1\dots\mu_n}(x): \Big\}.$$

Согласно (2.4), лагранжиан (3.2) относительно тензорного поля $\Phi(x)$ не является локальным. Это следует из явного вида проекционных операторов/8/.

Массы $m_s$ можно рассматривать как собственные значения произвольной функции $f(\hat{S}^2)$ оператора спина $\hat{S}^2$. Оператор спина имеет вид:

$$\hat{S}^2=\frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}-M_{\sigma\mu}M^{\sigma\nu}\,\frac{p^{\mu}p_{\nu}}{p^2}, \tag{3.3}$$

где $M_{\mu\nu}$ – генераторы подгруппы Лоренца, группы Пуанкаре.

Варьируя лагранжиан (3.2), получаем уравнения:

$$\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}(\Box+m_s^2)V_{(s)}(x)=0. \tag{3.4}$$

При получении этих уравнений мы пользовались условием (2.3).

Если подействовать на систему уравнений (3.3) операторами проектирования $\Pi_{(s)}(s=0,\dots,n)$, то получим:

$$(\Box + m_s^2)\, V_{(s)}(x) = 0 \quad (s=0,\dots,n). \tag{3.5}$$

Решения уравнений (3.5) можно представить посредством операторов рождения и уничтожения:

$$V_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int_{p^0 = w_{\underline{p}}^{(s)}} \frac{d^3 p}{p^0} \sum_{\zeta=-s}^{s} \left(a_{s,\zeta}(p)\, e^{-ipx} + a^*_{s-\zeta}(\underline{p})\, e^{ipx}\right) u_{s\zeta}^{\mu_1\dots\mu_n}(\underline{p}), \tag{3.6}$$

где $w_p^{(s)} = \sqrt{\underline{p}^2 + m_s^2}$, $u_{s\zeta}^{\mu_1\dots\mu_n}(\underline{p})$ – собственные векторы физического спина (3.3) и его третьей проекции с собственными значениями $s$ и $\zeta$ /11/. Эти векторы удовлетворяют условиям ортонормированности

$$g_{\mu_1\nu_1}\dots g_{\mu_n\nu_n}\, \bar{u}_{s\zeta}^{\mu_1\dots\mu_n}(\underline{p})\, u_{s\zeta'}^{\nu_1\dots\nu_n}(\underline{p}) = (-1)^s\, \delta_{\zeta\zeta'}, \tag{3.7}$$

где $\overline{u_{s\zeta}} = u_{s-\zeta}$.

Векторы $u_{s\zeta}$ и $u_{s'\zeta'}$, если $s \neq s'$, в случае, когда $m_s \neq m_{s'}$ не являются ортогональными. Нам необходимо только условие (3.7). Используя (3.7). можно показать, что:

$$\sum_{\zeta=-s}^{s} (-1)^s\, u_{s\zeta}^{\mu_1\dots\mu_n}(\underline{p})\, \bar{u}_{s\zeta}^{\nu_1\dots\nu_n}(\underline{p}) = \tilde{\tilde{\Pi}}_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n,\nu_1\dots\nu_n} = \Pi_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n,\nu_1\dots\nu_n}(p^2 = m_s^2). \tag{3.8}$$

Оператор $\tilde{\tilde{\Pi}}_{(s)}$, когда имеется не полностью вырожденный массовый спектр, не является проекционным оператором.

$$\tilde{\tilde{\Pi}}^{\mu_1\dots\mu_n}_{(s)\nu\ \dots\nu}\ u^{\nu_1\dots\nu_n}_{s\zeta}(\underline{p}) = u^{\mu_1\dots\mu_n}_{s\zeta}(\underline{p}),$$

но

$$\Pi^{\mu_1\dots\mu_n}_{(s)\nu_1\dots\nu_n}\ u^{\nu_1\dots\nu_n}_{s'\zeta'}(\underline{p}) \neq 0, \qquad \text{когда} \quad s \neq s'.$$

Операторы $\tilde{\tilde{\Pi}}_{(s)}$, в отличие от проекционных операторов $\Pi_{(s)}$, являются локальными.

Для операторов рождения $a^*_{s\zeta}$ и уничтожения $a_{s\zeta}$ мы принимаем обычные канонические коммутационные соотношения:

$$\begin{gathered}[a_{s\zeta}(\underline{p}),\ a_{s'\zeta'}(\underline{q})] = w^{(s)}_{\underline{p}}\ \delta_{ss'}\delta_{\zeta\zeta'}\ \delta(\underline{\underline{p}}-\underline{\underline{q}}) \\ [a_{s\zeta}(\underline{p}),\ a_{s'\zeta'}(\underline{q})] = [a^*_{s\zeta}(\underline{p}),\ a^*_{s\zeta}(\underline{q})] = 0 .\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из условия полноты проекционных операторов следует:

$$\Phi(x) = \sum_{s=0}^{n} V_{(s)} = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \sum_{s\zeta} \int_{p^0=w^{(s)}_{\underline{p}}} \frac{d^3 p}{p^0} \left(a_{s\zeta}(\underline{p})e^{-ipx} + a^*_{s-\zeta}(\underline{p})e^{ipx}\right) u_{s\zeta}(\underline{p}). \tag{3.10}$$

**Из лагранжиана (3.2) получаем следующий тензор энергии-импульса:**

$$T^{\mu\nu} = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{s} : \frac{\partial V^{\sigma_1\dots\sigma_n}_{(s)}(x)}{\partial x_\mu}\ \frac{\partial V_{(s)\sigma_1\dots\sigma_n}}{\partial x_\nu} : - g^{\mu\nu}\ \mathfrak{L}(x). \tag{3.11}$$

Оператор энергии-импульса имеет вид:

$$P^{\mu} = \int d^3x\, T^{\mu o}(x) . \tag{3.12}$$

Подставляя (3.6) в (3.12), имея в виду (3.7) и (3.9), получаем

$$P^{\mu} = \sum_{s\zeta} \int_{p^0 = w_p^{(s)}} \frac{d^3p}{p^0} a^*_{s\zeta}(\underline{p})\, a_{s\zeta}(\underline{p}) . \tag{3.13}$$

Из (3.13) видно, что оператор энергий $P^0$ является положительно определенным.

Из (3.10) и (3.13) получаем гейзенберговские уравнения движения

$$i[P^{\mu}, \Phi^{\nu_1 \dots \nu_n}(x)] = \frac{\partial \Phi^{\nu_1 \dots \nu_n}(x)}{\partial x_{\mu}} . \tag{3.14}$$

Они показывают, что оператор энергии-импульса действительно является генератором пространственно-временных сдвигов.

Согласно (3.11)

$$\pi^{\mu_1 \dots \mu_n}_{(s)}(x) = (-1)^s \frac{\partial V^{\mu_1 \dots \mu_n}_{(s)}}{\partial x^0} \tag{3.15}$$

можно рассматривать как канонически сопряженные эмульсии к полям $V_{(s)}(x)$.

Коммутационные соотношения для поля $\Phi(x)$ получаем из (3.10), (3.8) и (3.9):

$$[\Phi^{\mu_1\dots\mu_n}(x),\Phi^{\nu_1\dots\nu_n}(y)]=i\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\,\overset{\approx}{\Pi}{}_s^{\mu_1\dots\mu_n,\nu_1\dots\nu_n}\,\Delta(m_s^2;x-y)\ . \qquad (3.26)$$

Здесь $\Delta(m_s^2, x-y)$ – перестановочная функция Паули–Йордана скалярного поля с массой $m_s$. Коммутационные соотношения (3.13) являются локальными. Подействовав проекционным оператором спина $s$ на обе стороны (3.16), получаем

$$[V_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n}(x),V_{(s')}^{\nu_1\dots\nu_n}(y)]=i(-1)^s\delta_{ss'}\overset{\approx}{\Pi}{}_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n,\nu_1\dots\nu_n}\Delta(m_s;\ x-y) \qquad (3.17)$$

$$(s=0,\dots,n)\ .$$

Эти соотношения можно получить и из (3.6).

Из (3.15) и (3.6) получаем еще:

$$[\pi_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n}(x),\pi_{(s')}^{\nu_1\dots\nu_n}(y)]=i(-1)^s\delta_{ss'}\overset{\approx}{\Pi}{}_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n,\nu_1\dots\nu_n}\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(m_s;x-y) \qquad (3.18)$$

$$(s=0,\dots n)$$

и

$$[\pi_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n}(x),V_{(s')}^{\nu_1\dots\nu_n}(y)]=-i(-1)^s\delta_{ss'}\overset{\approx}{\Pi}{}_{(s)}^{\mu_1\dots\mu_n,\nu_1\dots\nu_n}\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(m_s;x-y)\ . \qquad (3.19)$$

$$(s=0,\dots,n)$$

Если в коммутационных соотношениях (3.16), (3.17), (3.18) и (3.19) положим $x_0=y_0$, то в правых частях получаем либо нули, либо пространственные дельта-функции и их производные. Но, согласно работе /12/, это не противоречит каноническому формализму. Как пример в Приложении приводятся коммутационные соотношения векторного поля.

б). В случае, когда массы частицы с разными спинами одинаковы, можно сильно упростить теорию, если заменить лагранжиан (3.2) лагранжианом

$$\mathfrak{L}(x)=\frac{1}{2}:\frac{\partial\tilde{\tilde{\Phi}}^{\mu_1\cdots\mu_n}(x)}{\partial x^{\nu}}\ \frac{\partial\Phi_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)}{\partial x}:-\frac{m^2}{2}:\tilde{\tilde{\Phi}}^{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\Phi_{\mu_1\cdots\mu_n}(x): \tag{3.20}$$

Здесь

$$\tilde{\tilde{\Phi}}^{\mu_1\cdots\mu_n}(x)=\Lambda^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n}\Phi^{\nu_1\cdots\nu_n}(x) \tag{3.21}$$

и

$$\Lambda^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu_1\cdots\nu_n}=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\,\Pi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{(s)\nu_1\cdots\nu_n}. \tag{3.22}$$

Из (2.2) и (2.3) следует:

$$\Lambda^2=I. \tag{3.23}$$

Варьируя лагранжиан (3.20) и имея в виду (3.21), получаем уравнения Клейна-Гордона

$$(\Box+m^2)\,\Phi(x)=0 \tag{3.24}$$

и

$$(\Box+m^2)\,\tilde{\tilde{\Phi}}(x)=0. \tag{3.25}$$

Уравнения (3.24) и (3.25) не являются независимыми, они переходят одно в другое через оператор $\Lambda$.

Решение уравнения (3.24) можно представить в виде (3.10), учитывая, что $m_s = m$, $(s = 0, \dots, n)$. Согласно (3.21), $\tilde{\Phi}(x)$ можно представить:

$$\tilde{\tilde{\Phi}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \sum_{s\zeta} (-1)^s \int_{p^0 = w_{\underline{p}}} \frac{d^3 p}{p^0} \left( a_{s\zeta}(\underline{p}) e^{-ipx} + a^*_{s-\zeta}(\underline{p}) e^{ipx} \right) u^{\mu_1 \dots \mu_n}_{s\zeta}(\underline{p}) . \quad (3.26)$$

Входящие сюда в $\Phi(x)$ и $\tilde{\tilde{\Phi}}(x)$ тензоры $u_{s\zeta}(\underline{p})$ удовлетворяют условию ортонормированности:

$$g_{\mu_1 \nu_1} \dots g_{\mu_n \nu_n} \bar{u}^{\mu_1 \dots \mu_n}_{s\zeta}(\underline{p})\, u^{\nu_1 \dots \nu_n}_{s' \zeta'}(\underline{p}) = (-1)^s \delta_{ss'} \delta_{\zeta\zeta'} , \quad (3.27)$$

т.е. они являются ортонормированными, не только когда $s = s'$, как это было в случае с массовым спектром, но и когда $s \neq s'$.

Из лагранжиана (3.20) получаем следующий тензор энергий-импульса:

$$T^{\mu\nu} = : \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}^{\sigma_1 \dots \sigma_n}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Phi_{\sigma_1 \dots \sigma_n}(x)}{\partial x_\nu} : - g^{\mu\nu} \mathfrak{L}(x) . \quad (3.28)$$

Здесь

$$\pi^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = \frac{\partial \tilde{\tilde{\Phi}}^{\mu_1 \dots \mu_n}(x)}{\partial x^0} . \quad (3.29)$$

можно рассматривать как канонически сопряженный импульс к полю $\Phi(x)$. В отличие от случая а, здесь имеем только один сопряженный импульс. Из (3.28), (3.10) и (3.26) следует, что оператор энергии-импульса можно представить в виде (3.13).

Поле $\Phi(x)$ и его канонически сопряженный импульс удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\Phi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x), \Phi^{\nu_1\ldots\nu_n}(y)] = i \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \overset{\approx}{\Pi}^{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_n} \Delta(m; x-y) \tag{3.30}$$

и

$$[\pi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x), \Phi^{\nu_1\ldots\nu_n}(y)] = i\, I^{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_n} \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(m, x-y). \tag{3.31}$$

Полагая $x^0 = y^0$, в отличие от случая а, из (3.31) получаем:

$$[\pi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x), \Phi^{\nu_1\ldots\nu_n}(y)]_{x^0=y^0} = -i\, I^{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_n} \delta(\underline{x}-\underline{y}). \tag{3.32}$$

### *4. Взаимодействия со скалярным полем*

Описание частиц с разными спинами $s = 0, \ldots, n$ посредством единого поля $\Phi(x)$ позволяет упростить лагранжиан взаимодействия. Мы будем рассматривать только взаимодействия с прямой связью. В зависимости от того, участвуют ли во взаимодействии все спиновые состояния, которые содержатся в поле $\Phi(x)$, либо только одно состояние, например, с максимальным значением спина, мы будем называть эти взаимодействия соответственно не тривиальными, либо тривиальными.

Как пример тривиального взаимодействия можно рассматривать взаимодействие

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g\,\Phi^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)\, J_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)\,, \tag{4.1}$$

где $J_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)$ – сохраняющийся ток, который не зависит от поля $\Phi(x)$.

Такие взаимодействия для векторного поля обсуждались в работе /13/.

Примером нетривиальных взаимодействий являются локальные взаимодействия со скалярным полем

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g\,\Phi^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)\,\Phi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)\,\phi(x)\,. \tag{4.2}$$

Соответствующие уравнения поля $\Phi(x)$ имеют вид:

$$\sum_{s=0} (-1)^s (\Box + m_s^2)\, V_{(s)}(x) = g\,\Phi(x)\,\phi(x)\,. \tag{4.3}$$

При помощи проекционных операторов $\Pi_{(s)}$ мы можем расщепить эту систему на $n+1$ систем. Из явного вида операторов $\Pi_{(s)}$ следует, что:

$$\Pi_s(\Phi(x)\,\phi(x)) \neq 0 \qquad \text{при} \quad s = 0, \ldots, n\,, \tag{4.4}$$

Если на поле $\phi(x)$ не напишем специальных условий, то мы не получим свободное уравнение ни для какого $s$. Кроме того, если поле $\phi$ не является постоянным, в правой части уравнений

$$(\Box + m_s^2)\, V_{(s)}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) = \Pi_{(s)}^{\mu_1 \cdots \mu_n, \nu_1 \cdots \nu_n} (\Phi_{\nu_1 \cdots \nu_n}(x)\,\phi(x)) \quad (s = 0, \ldots, n)$$

будут участвовать все спиновые состояния, которые содержатся в поле $\Phi(x)$.

Функцию распространения тензорного поля $\Phi(x)$ можно выразить через двухточечные функции этого поля

$$D_c^{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_n}(x-y)=i<0|T(\Phi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x)\Phi^{\nu_1\ldots\nu_n}(y)|0>= \tag{4.5}$$

$$=i\theta(x^0-y^0)<0|\Phi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x)\Phi^{\nu_1\ldots\nu_n}(y)|0>+i\theta(y^0-x^0)<0|\Phi^{\nu_1\ldots\nu_n}(y)\Phi^{\mu_1\ldots\mu_n}(x)|0>.$$

Используя полученные в работе[8] представления двухточечных функций, получим:

$$D_c^{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_n}(x-y)=\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{\tilde{\tilde{\Pi}}{}^{\mu_1\ldots\mu_n,\nu_1\ldots\nu_n}_{(s)}\,e^{ip(x-y)}}{p^2-m_s^2-i\epsilon}. \tag{4.6}$$

При получении (4.6) из (4.5) мы отбросили все "контактные" члены, которые получаются при коммутации $\theta$ -функции с операторами $\tilde{\tilde{\Pi}}_{(s)}$, как это обычно делается[14].

Из (4.6) следует, что при $n>0$ теория неперенормируема [6].

Автор выражает глубокую благодарность И.Т.Тодорову за многочисленные обсуждения, а также Д.И.Блохинцеву, Х.Я.Христову Д.Ц.Стоянову и К.В.Рериху за интерес к работе и ценные замечания.

## *Приложение*

Операторы $\tilde{\tilde{\Pi}}_{(s)}$ векторного поляи имеют вид:

$$\tilde{\tilde{\Pi}}{}^{\mu\nu}_{(0)}=\frac{p^\mu p^\nu}{m_0^2}\;;\quad \tilde{\tilde{\Pi}}{}^{\mu\nu}_{(s)}=g^{\mu\nu}-\frac{p^\mu p^\nu}{m_1^2}\,. \tag{П.1}$$

Из (3.17), (3.19) и (П.1) получаем:

$$[\Phi^k(x),\Phi^\ell(y)]_{x^0=y^0}=[\Phi^0(x),\Phi^0(y)]_{x^0=y^0}=0\,,$$

$$[\Phi^0(x), \Phi^k(y)]_{x^0=y^0} = +i\left(\frac{1}{m_0^2}+\frac{1}{m_1^2}\right)\frac{\partial}{\partial k^k}\,\delta(\underline{x}-\underline{y}),$$

$$[\pi^0_{(0)}(x), V^0_{(0)}(y)]_{x_0=y_0} = i\left(1+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^k}\right)\delta(\underline{x}-\underline{y}),$$

$$[\pi^0_{(0)}(x), V^k_{(0)}(y)]_{x_0=y_0} \equiv [\pi^k_{(0)}(x), V^0_{(0)}(y)]_{x^0=y^0} = 0 \qquad (\Pi.2)$$

$$[\pi^k_{(0)}(x), V^\ell_{(0)}(y)]_{x_0=y_0} = -i\,\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_\ell}\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

$$[\pi_{(1)}(x), V^0_{(1)}(y)]_{x_0=y_0} = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{m_1^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^k}\,\delta(\underline{x}-\underline{y})$$

$$[\pi^k_{(1)}(x), V^0_{(1)}(y)]_{x_0=y_0} = [\pi^0_1(x), V^k_{k(1)}(y)]_{x_0=y_0} = 0$$

$$[\pi^k_{(1)}(x), V^\ell_{(1)}(y)]_{x_0=y_0} = i\left(g^{k\ell}+\frac{1}{m_1^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^\ell}\right)\delta(\underline{x}-\underline{y}).$$

### *Литература*


1. *И.М.Гельфанд, Р.А.Миплос, З.Я.Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца. Физматгиз (1958). М.А.Наймарк. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз (1958).*
2. M. Fierz. Helv. Phys. Acta 12, 3 (1939).
3. M. Fierz and W. Pauli. Proc. Roy, Soc., A173, 211 (1939).
4. C. Fronsdal. Nuovo Cim. Suppl., 9, 410 (1958).
5. R.J. Rivers. Nuovo Cim., 34, 386 (1964).
6. Shau Jin Chang. Phys. Rev., 148, 1259 (1967).
7. *Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, Москва, 1957 г.*

8. I.T. Todorov and R.P. Zaikov. [redacted] ICTP Trieste, preprint IC/68/50, Internal Report (1968).
9. R.F. Streater and A.S, Wightman. PCT, Spin and Statiscs and all that, Benjamin New York (1964).
имеется русск. перевод. "Наука", Москва (1966).
10. I.T. Grodsky and R.T. Streater. Phys. Rev. Letters 20, 695(1968).
11. D.T. Stroyanov and I.T. Todorov. [redacted]. [redacted] ICTP Trieste preprint IC/67/38 (1968).
12. G. Källen. University of Lund, Lund, preprint (1968).
13. В.И.Огиевецкий, И.В.Полубаринов. ЖЭТФ 41, 247 (1961).
14. S. Weinberg, Phys. Rev., 133, B1318 (1964). H.D.I. Abarbanel and Y. Frishman, Stanford University, Stanford preprint SLAC-PUB-390 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 февраля 1969 года.