3/III-69

Nucl. Phys., 1969, v. B12, n2, c. 426-432

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4294

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нгуен Нгок Тхуан

РЕДЖЕВСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И ГРАНИЦА СНИЗУ ДЛЯ УБЫВАНИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

1969

P2 - 4294

Нгуен Нгок Тхуан

РЕДЖЕВСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И ГРАНИЦА СНИЗУ ДЛЯ УБЫВАНИЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Направлено в Nucl. Phys.

1. Введение

В работе Церулуса и Мартэна[1] впервые было показано, что из представления Мандельстама вытекает нижнее ограничение на убывание амплитуды упругого рассеяния при фиксированном угле. Результаты Церулуса и Мартэна были обобщены в работах Логунова и Мествиришвили[2], Мартэна[3], Чю и Тана[4]. В работах Нгуен Ван Хьеу и Балуни[5,6] были получены оценки снизу для амплитуды рассеяния при фиксированной передаче импульса t, как следствие строго доказанных аналитических свойств амплитуд. В настоящей работе мы установим нижнюю границу убывания амплитуд упругого рассеяния на основе предположения, что эти амплитуды $F(S^{x/},t)$ при фиксированном S аналитичны по t в комплексной плоскости t с разрезами и полюсами по вещественной оси. Ради простоты рассуждения предположим, что полюсов нет. Однако легко проверить, что все полученные результаты справедливы и при наличии полюсов. Что касается поведения $F(S,t)$ при $S \to \infty$, то мы предположим, что

$$|F(S,t)| \leq S^{\alpha(t)}, \qquad (1)$$

причём $\alpha(t)$ может расти при $t \to \infty$. В случае представления Мандельстама $\alpha(t)$ ограничено. Однако, поскольку в последнее время весьма широко обсуждается возможность существования линейно растущей

---

x/ ВНИМАНИЕ! Здесь и далее вместо S следует читать s.

траектории Редже [7], желательно рассмотреть более общий случай, когда $\alpha(t)$ может расти как полином. Мы покажем, что в силу этих аналитических свойств сечение при фиксированном t и $S \to \infty$ не может стремиться к нулю быстрее закона убывания в реджистике. Для траектории Редже мы получим некоторые ограничения.

Чтобы вывести наши результаты, наряду с теоремой Адамара о трех кругах [8] мы будем пользоваться в основном дисперсионными правилами сумм, вытекающими из теоремы Иенсена [8]. Подобные правила сумм, примененные впервые Логуновым, Соловьевым, Тавхелидзе и др. [9,10], стали весьма хорошим математическим аппаратом для анализа экспериментальных данных [11].

2. Применение теоремы Адамара

Рассмотрим сначала амплитуду упругого рассеяния $F(S,t)$ удовлетворяющую представлению Мандельстама. Тогда $\alpha(t)$ ограничено. Для нахождения ограничения снизу достаточно рассматривать мнимую часть $A(S,t)$. Положим,

$$f(S,t) = \frac{A(S,t)}{A(S,0)} . \tag{2}$$

Поскольку $A(S,0)$ не может убывать быстрее некоторой степени $1/S$, то $f(S,t)$ удовлетворяет условию

$$|f(S,t)| \leq S^N . \tag{3}$$

Обозначим через k трехмерный импульс частиц в с.ц.м. В плоскости переменной W, где

$$W = 2k^2 + t , \tag{4}$$

разрезы идут от a до $+\infty$ и от $-a$ до $-\infty$, где

$$a = 2k^2 + 4m_\pi^2 . \qquad (5)$$

Посредством отображения

$$\eta = \frac{a}{W}\left[a - \sqrt{a^2 - W^2}\right] \qquad (6)$$

мы преобразуем плоскость W в круг с радиусом a. Тогда точка $t=0$, т.е. $W=2k^2$, переходит в

$$c = \frac{a}{2k^2}\left[a - \sqrt{a^2 - 4k^4}\right] . \qquad (7)$$

Рассмотрим интервал $-(4k^2 - t_0) \leq t \leq -t_0$ с некоторым $t_0 > 0$. Посредством преобразований (4) и (6) он превращается в интервал $-d \leq \eta \leq d$

$$d = \frac{a}{2k^2 - t_0}\left[a - \sqrt{a^2 - (2k^2 - t_0)^2}\right] . \qquad (8)$$

При помощи отображения

$$\xi = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - d^2}}{d} \qquad (9)$$

мы преобразуем сегмент $[-d, d]$ в единичный круг, а эллипс с фокусами в точках $[-d, d]$ и большой полуосью a, содержащейся полностью в круге $|W| \leq a$, переходит в кольцо с внутренним и внешним радиусами 1 и R, соответственно,

$$R = \frac{a}{d} + \sqrt{\frac{a^2}{d^2} - 1} \; . \tag{10}$$

Точка $t = 0$, т.е. $W = 2k^2$ или $\eta = c$ переходит в точку

$$r = \frac{c}{d} + \sqrt{\left(\frac{c}{d}\right)^2 - 1} \; . \tag{11}$$

Обозначим через M максимум $|f(S,t)|$ на окружность $|\xi| = R$, а через m – максимум $|f(S,t)|$ в интервале

$$-(2k^2 - t_0) \le t \le -t_0 \; .$$

В силу теоремы Адамара о трех кругах мы имеем

$$m \ge \left(\frac{1}{M}\right)^{\frac{\ln r / \ln R}{1 - \ln r / \ln R}} \; . \tag{12}$$

Подставляя сюда значения r, R и пользуясь условием (3), мы получим

$$\max \left| \frac{A(S,t)}{A(S,0)} \right| \ge S^{-N \frac{\Psi(t_0)}{1 - \Psi(t_0)}} \tag{13}$$

$$-(4k^2 - t_0) \le t \le -t_0 \; ,$$

где

$$\Psi(t_0) = [\,1 - (1 + \frac{t_0}{4\,m_\pi^2})^{-\frac{1}{2}}\,]^{\frac{1}{2}}\,, \tag{14}$$

а N – некоторая константа. Если $A(S,t)$ монотонно убывает, то отсюда получим

$$\left|\,\frac{A(S,t)}{A(S,0)}\,\right| \geq S^{-N\frac{\Psi(t)}{1-\Psi(t)}}\,. \tag{15}$$

В частности, если амплитуда имеет реджевское поведение, то условие (13) и (15) представляет собой некоторое ограничение снизу для траектории Редже $\alpha(t)$. При $t \to -\infty$ мы имеем

$$\alpha(t) \geq -2N\sqrt{|t|} + \alpha(0)\,. \tag{16}$$

Полученные результаты показывают, грубо говоря, что при фиксированном t сечение упругого рассеяния не может стремиться к нулю быстрее закона убывания в реджистике/12/, причем это заключение справедливо при всех t.

3. Применение теоремы Иенсена

Если $\alpha(t)$ не ограничено, то изложенные выше рассуждения неприменимы. В этом случае вместо условия (3) мы имеем более слабое условие при $S \to \infty$

$$|f(S,t)| \le S^{\beta(t)} \tag{17}$$

для любого t. Рассмотрим случай, когда $\beta(t)$ растет не быстрее $t^{1-\epsilon}$ для некоторого $\epsilon > 0$

$$\beta(t) \le \mathrm{const}\, |t|^{1-\epsilon} . \tag{18}$$

Здесь и в дальнейшем повсюду const обозначает положительную константу. Тогда для каждого достаточно большого S

$$|f(S,t)| \le e^{\mathrm{const}\,|t|^{1-\epsilon}} \tag{19}$$

при $t \to \infty$ в любом направлении. Мы покажем, что $f(S,t)$ также не может убывать быстрее $e^{-\mathrm{const}\,|t|^{1-\epsilon}}$

$$|f(S,t)| \ge e^{-\mathrm{const}\,|t|^{1-\epsilon}} . \tag{20}$$

Посредством отображения

$$\eta = \frac{\sqrt{1+t/t_0} - \sqrt{1-t/4m_\pi^2}}{\sqrt{1+t/t_0} + \sqrt{1-t/4m_\pi^2}} \tag{21}$$

для некоторого $t_0 < 2k^2$ мы преобразуем плоскость t в единичный круг, причем разрезы $t \geq 4m_\pi^2$, $t \leq -4k^2 - 4m_\pi^2$ и сегмент $-4k^2 - 4m_\pi^2 \leq t \leq -t_0$ превращается в единичную окружность. Положим, что $f(S,t) = h(S,\eta)$. Так как $h(S,0) = 1$, то в силу теоремы Иенсена/8/

$$\int_0^{2\pi} \ln | h(S, e^{i\phi}) | d\phi \geq 0. \tag{22}$$

Возвращаясь к старой переменной t, мы получим точное правило сумм

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\ln | f(S,-t) |}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}} dt + \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln | f(S,t) |}{t\sqrt{(t-4m_\pi^2)(t+t_0)}} dt \tag{23}$$

Из условий (19) и (20) следует, что интегралы сходятся. Аналогичное правило сумм было использовано в работе Мартэна/3/ для изучения поведения амплитуд при фиксированном угле.

Пусть $t_0 \ll 2k^2$. Разобьем первый интеграл в (23) на две части: от t_0 до t_1 $(t_1 > t_0)$ и от t_1 до ∞, где $t_1 < 4k^2$.

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln | f(S,-t) |}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}} dt + \int_{t_1}^{\infty} \frac{\ln | f(S,-t) |}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}} dt +$$

$$+ \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln | f(S,t) |}{t\sqrt{(t-4m_\pi^2)(t+t_0)}} dt \geq 0. \tag{24}$$

Пользуясь неравенством (17) для оценки последних двух интегралов, получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln|f(S,-t)|}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}}\,dt + A(t_0,t_1)\ln S \geq 0\,, \tag{25}$$

где $A(t_0 t_1)$ – некоторое положительное число, зависящее от t_0 и t_1.

Допустим, что в интервале $-t_1 \leq t \leq -t_0$

$$|f(S,t)| \leq e^{-\Phi(S)\,\beta(t)} \tag{26}$$

Тогда на основе (25) имеем

$$-\Phi(S)\int_{t_0}^{t_1} \frac{\beta(t)}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}}\,dt + A(t_0,t_1)\ln S \geq 0,$$

т.е.

$$\Phi(S) \leq B(t_0,t_1)\ln S\,. \tag{27}$$

Рассмотрим случай, когда амплитуда монотонно убывает. Тогда в интервале $-t_1 \leq t \leq -t_0$ $|f(S,t)|$ достигает максимального значения в точке $t=-t_0$, и мы имеем

$$\ln|f(S,-t_0)|\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}} + A(t_0,t_1)\ln S \geq 0\,.$$

Мы можем взять, например, $t_1 = 2t_0$ и получим

$$\ln |f(S,-t_0)| \geq -c(t_0)\ln S, \qquad (28)$$

т.е.

$$|f(S,-t)| \geq e^{-c(t)\ln S}. \qquad (29)$$

Соотношения (25) и (29) снова показывают, что при каждом фиксированном t сечение упругого рассеяния не может стремиться к нулю быстрее закона убывания в теории полюсов Редже.

Перейдем теперь к изучению поведения функции $c(t)$ в (29) при $t \to -\infty$. Для этой цели рассмотрим амплитуду при больших отрицательных передачах импульса (но находящихся в физической области). Выберем $4m_\pi^2 \leq t_0 \ll 2k^2$, $t_1 = (1+\delta)t_0$ для некоторого $\delta > 0$ и дадим оценки двух последних интегралов в (24). Необходимо разделить два различных случая. Если $\epsilon > \frac{1}{2}$, то имеем

$$\int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln|f(S,t)|}{t\sqrt{(t-4m_\pi^2)(t+t_0)}}dt \leq \frac{\ln S}{\sqrt{t_0}}\int_{4m_\pi^2}^{\infty}\frac{\beta(t)\,dt}{t\sqrt{(t-4m_\pi^2)}} = \qquad (30)$$

$$= \text{const}\,\frac{\ln S}{\sqrt{t_0}}.$$

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{\ln|f(S,-t)|}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}}dt \leq \frac{\ln S}{\sqrt{t_0\delta}}\int_{t_1}^{\infty}\frac{\beta(-t)}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)}}dt = \text{const}\,\frac{\ln S}{\sqrt{t_0}}, \qquad (31)$$

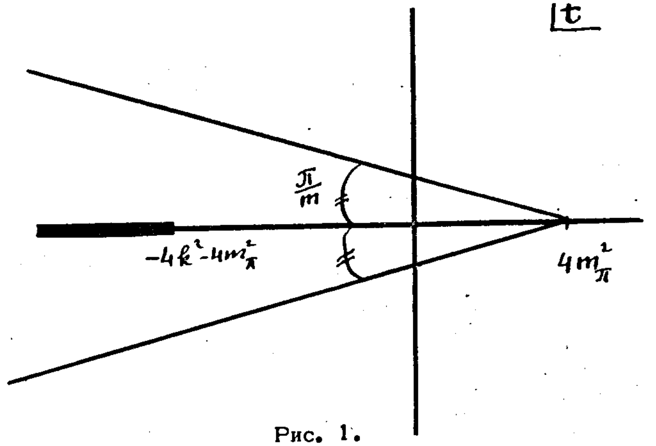

Рис. 1.

так как интеграл

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{\beta(t)}{t\sqrt{t+4m_\pi^2}}\,dt$$

при всех t_1 ограничен. Что касается первого интеграла в (24), то имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\ln|f(S,-t)|}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}}\,dt \le \max_{-t_1\le t\le -t_0} \ln|f(S,t)| \,.$$

$$\cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{t^{3/2}\sqrt{t-t_0}} \le \max \ln|f(S,t)| \frac{1}{t_0} \int_{1}^{1+\delta} \frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{x-1}} = \tag{32}$$

$$= \text{const}\,\frac{1}{t_0} \max_{-t_1\le t\le -t_0} \ln|f(S,t)| \,.$$

В результате получаем неравенство

$$\text{const} \max_{-t_1\le t\le -t_0} \ln|f(S,t)| \frac{1}{t_0} \ge -\text{const}\,\frac{\ln S}{\sqrt{t_0}} \,. \tag{33}$$

Мы имеем, таким образом, оценку

$$\max_{-t_1 \le t \le -t_0} \ell n \, | f(S,t) | \ge -\text{const} \sqrt{t_0} \, \ell n \, S , \quad t_0 \ge 4 m_\pi^2 . \tag{34}$$

Если $f(S,t)$ монотонно убывает, неравенство сводится к условию

$$\ell n \, | f(S,t) | \ge -\text{const} \sqrt{|t|} \, \ell n \, S \tag{35}$$

при $t \to -\infty$. Соотношения (34) и (35) являются обобщениями результатов, полученных в предыдущем параграфе.

В случае, когда $\epsilon \le \frac{1}{2}$, интегралы в (30) и (31) расходятся, и мы должны пользоваться другими оценками интегралов в (24). Так как при достаточно больших t имеет место условие (18), то

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{\ell n \, | f(S,-t) |}{t \sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}} \, dt \le \text{const} \, \ell n \, S \int_{t_1}^{\infty} \frac{t^{1-\epsilon}}{t^{3/2} \sqrt{(t-t_0)}} \, dt =$$

$$= \text{const} \, \ell n \, S \, \frac{1}{t_0^{\epsilon}} \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dx}{x^{\epsilon} \sqrt{x(x-1)}} = \text{const} \, \frac{\ell n \, S}{t_0^{\epsilon}} . \tag{36}$$

Аналогично

$$\int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln |f(S,t)|}{t\sqrt{(t-4m_\pi^2)(t+t_0)}}\, dt \le \frac{\ln S}{\sqrt{t_0}} \int_{4m_\pi^2}^{(1+\delta)4m_\pi^2} \frac{\beta(t)}{t^{3/2}\sqrt{t-4m_\pi^2}}\, dt \quad +$$

$$+ \ln S \sqrt{\frac{1+\delta}{\sigma}} \int_{(1+\delta)4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\beta(t)}{t^{3/2}\sqrt{t+t_0}}\, dt \le \text{const}\, \frac{\ln S}{\sqrt{t_0}} + \tag{37}$$

$$+ \ \text{const}\, \frac{\ln S}{t_0^{\epsilon}} \ .$$

Неравенство (24) принимает вид

$$\max_{-t_1 \le t \le -t_0} \ln |f(S,t)| \frac{1}{t_0} + \text{const}\, \frac{\ln S}{t_0^{\epsilon}} \ge 0 \tag{38}$$

Вместо (34) имеем теперь

$$\max \ln |f(S,t)| \ge -\text{const}\, t_0^{1-\epsilon} \ln S \ . \tag{39}$$

В случае монотонного убывания это неравенство сводится к

$$\ln |f(S,t)| \ge -\text{const}\, |t|^{1-\epsilon} \ln S \ . \tag{40}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\beta(t)$ удовлетворяет не условию (18), а более слабому условию

$$\beta(t) \leq \text{const}\ t^{m(1-\epsilon)} \tag{41}$$

для некоторого достаточно малого ϵ и любого $m \geq 1$. Введем новую переменную

$$t' = -(4m_\pi^2 - t)^m + (4m_\pi^2)^m \tag{42}$$

и положим $f(S,t) \equiv g(S,t')$, $\beta(t) \equiv \gamma(t')$. Из аналитичности $f(S,t)$ в некотором угле (см. рис. 1) вытекает аналитичность $g(S,t')$ в плоскости t' с разрезами на вещественной оси. Функция $\gamma(t')$ удовлетворяет условию вида (18). Применяя все приведенные рассуждения, нетрудно получить соотношения (27) и (29). Вместо (39) и (40) имеем теперь

$$\max \ln|f(S,t)| \geq -\text{const}\ t_0^{m(1-\epsilon)} \ln S, \tag{43}$$

или, в случае монотонного убывания,

$$\ln|f(S,t)| \geq -\text{const}\ |t|^{m(1-\epsilon)} \ln S. \tag{44}$$

Автор выражает глубокую благодарность профессору Нгуен Ван Хьеу за постановку задачи и руководство.

Литература

1. F.Cerulus and A.Martin. Phys. Lett., 8, 80 (1963).
2. A.A.Logunov and M.A.Mestvirishvili, Phys. Lett., 24B, 583.
3. A.Martin, Nuovo Cim., 32, 671 (1965).
4. Chiu and Chung I Tan, Phys. Rev., 162, 5, 1701 (1967).
5. Nguyen Van Hieu, Preprint JINR E2-3728, 1968.
   Нгуен Ван Хьеу, Письма в ЖЭТФ, 7, вып. 10, 1968.
6. Varoujan Baluni, Nguyen Van Hieu, Preprint JINR Dubna E2-3933, (1968).
   Письма в ЖЭТФ, 7, В.Балуни, Нгуен Ван Хьеу, Письма в ЖЭТФ, 8, вып. 4, 1968.
7. S,Mandelstam, Phys. Rev., 166, No.5, 1539 (1968).
8. E.C.Tichmarch, The Theory of Functions, Oxford University, Press 1939.
9. A.A.Logunov, L.D.Soloviev and A.N.Tavkhelidze, Phys. Lett., 24B, 181 (1967).
10. В.А.Матвеев, Л.Д.Соловьев, Б.В.Струминский и др. Препринт ОИЯИ Р2-3118, Дубна 1968.
11. В.И.Журавлев, В.А.Мещеряков, К.В.Рерих. Препринт ОИЯИ Р2-2383, Дубна 1967.
12. В.Н.Грибов, ЖЭТФ, 41, стр. 1963 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
31 января 1969 года.