

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4292



В.С.Барашенков, В.Д.Тонеев

УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ
НА ЯДРАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1969

P2 - 4292

В.С.Барашенков, В.Д.Тонеев

**УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ
ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ
НА ЯДРАХ**

Направлено в УФН

**Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ**

1. Оптическая модель

До недавнего времени основой всех расчетов упругого рассеяния быстрых частиц на ядрах являлась полуфеноменологическая оптическая модель (см., например, /1-3/). После того, как из решения волнового уравнения с подобранным из опыта потенциалом фазы определены, сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ получается путем простого суммирования. Например, для рассеяния бесспиновых частиц

$$\sigma(\theta) = |\alpha(\theta)|^2, \quad (1)$$

$$\alpha(\theta) = \frac{\kappa}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)(1-e^{2i\eta_{\ell}}) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (2)$$

При высоких энергиях, когда длина дебройлевской волны λ становится во много раз меньше размеров ядра-мишени и в сумму по ℓ существенный вклад дает очень большое число членов, сумму в формуле (2) удобно заменить интегралом и использовать асимптотическое соотношение

$$P_{\ell}(\cos \theta) \approx J_0((2\ell+1) \sin \theta / 2) = J_0(\ell\theta), \quad (3)$$

где J_0 - хорошо известная функция Бесселя.

В области высоких энергий можно использовать также и другое приближение: выразить фазы рассеяния через комплексный коэффициент преломления $K(T, r) = n(T, r) + ik(T, r)$, т.е. положить

$$\eta_{\ell}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r K(T, r) dr}{\chi_{\ell} \sqrt{r^2 + (\chi_{\ell})^2}}, \quad (4)$$

где

$$n(T, r) = -\frac{1}{2} a(T) k(T, r), \quad k(T, r) = A \sigma_{\ell}(T) d(r), \quad (5)$$

σ_{ℓ} - полное сечение взаимодействия рассеиваемой частицы с нуклоном ядра, a - отношение реальной и мнимой частей амплитуды упругого рассеяния этой частицы на внутриядерном нуклоне, $d(r)$ - подбираемая из сравнения с экспериментом плотность нуклонов в ядре-мишени с атомным номером A . Здесь и везде далее T - кинетическая энергия рассеиваемой частицы в лабораторной системе координат.

Так как характеристики взаимодействия частицы со связанным внутриядерным нуклоном несколько отличаются от соответствующих характеристик взаимодействия свободных частиц, то в формулы (5) приходится вводить поправочные множители, подбираемые из сравнения с экспериментом, и зависящие, вообще говоря, от энергии.

Большое число подгоночных параметров, которые приходится вводить в формулы, не может не вызывать чувства неудовлетворенности: оптическая модель оказывается слишком "привязанной" к эксперименту.

Степень согласия оптических кривых с опытом видна из рис. 1-3.

Особенно трудно подогнать теоретические кривые под эксперимент в области больших углов рассеяния, где дают вклад высшие дифракционные минимумы и максимумы. Как правило, если экспериментальные данные достаточно точны, то удается получить лишь качественное согласие, иначе приходится использовать слишком сложные оптические потенциалы с большим числом параметров, которые весьма нерегулярно изменяются при изменении энергии рассеиваемых частиц и типа ядра-мишени.

Это очень заметно для легких ядер: дейтрона, гелия и т.д. Чтобы получить согласие с опытом, приходится выбирать оптические потенциалы с радиальной зависимостью, которую трудно согласовать с тем, что мы знаем из опытов с рассеянием электронов. Например, для того, что-

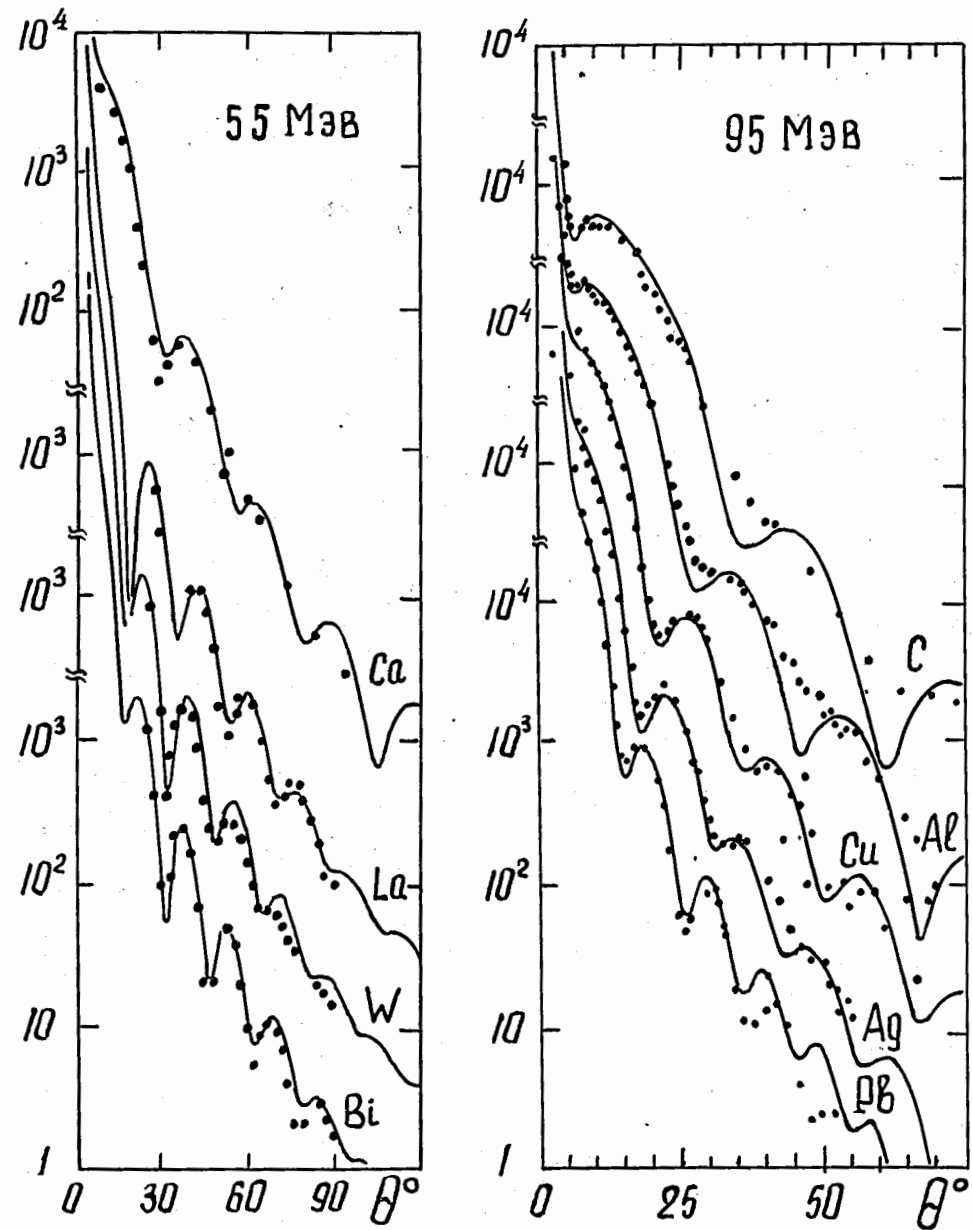


Рис.1. Дифференциальное сечение упругого рассеяния протонов на различных ядрах (мб/стер., система центра масс). Точки - экспериментальные данные [4-8], кривые - расчет по оптической модели [7].

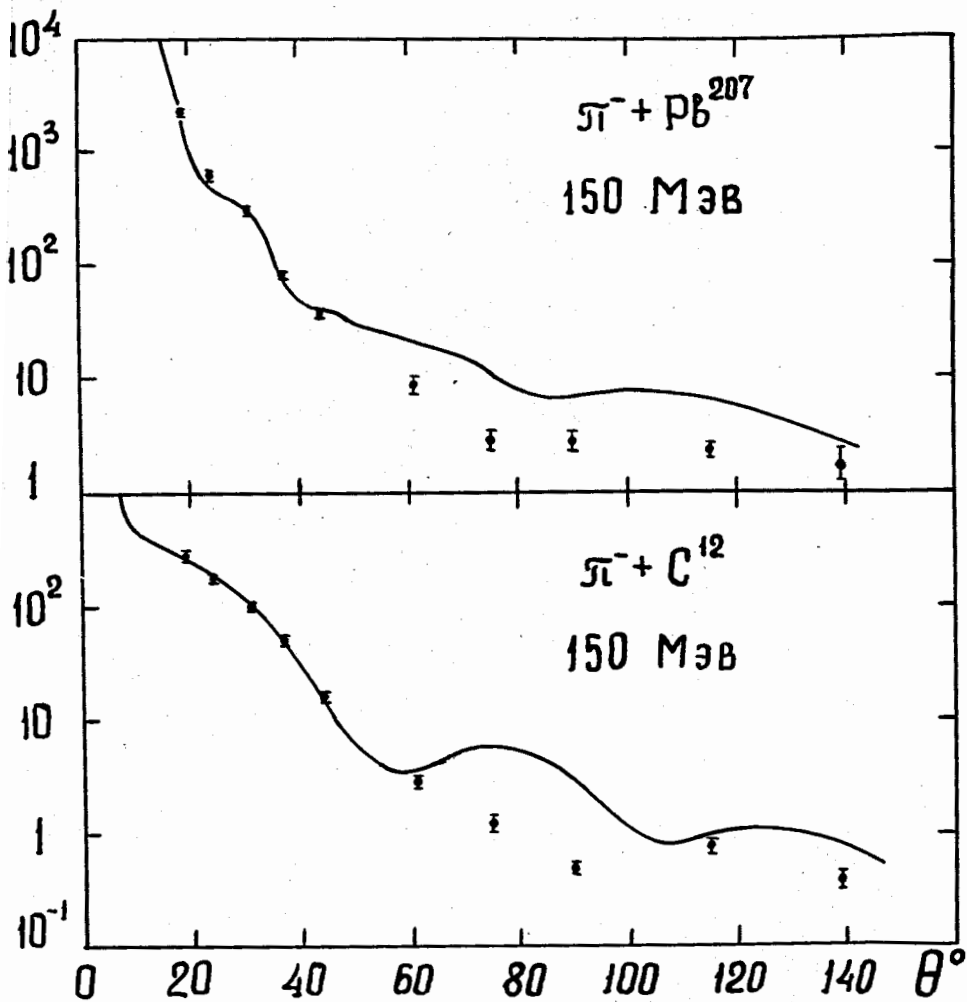


Рис. 2. Дифференциальное сечение упругого рассеяния π^- -мезонов (мб/стер, система центра масс) ^{18/}. Кривые - результат расчета по оптической модели.

бы оптическая кривая совпала с экспериментальными данными Брукхэйвенской лаборатории по упругому рассеянию $P + {}^4\text{He}$ при энергии $T=1\text{Гэв}$ ^{19/}, требуется потенциал с резкой границей, в то время как опыты с рассеянием электронов указывают на большую диффузность границы ядра ${}^4\text{He}$. Учет размеров рассеивающегося протона лишь увеличивает эффективный параметр диффузности.

Использование в оптических расчетах гауссовского потенциала, взятого из опытов с рассеянием электронов, не воспроизводит острый минимум в угловом распределении при $\theta \approx 24^\circ$, а при больших углах рассеяния дает сечения, на два-три порядка заниженные по сравнению с экспериментом (см. рис. 3).

Физически это связано с тем очевидным фактом, что дифракционные эффекты и преломление дебройлевской волны рассеивающегося протона становятся тем более заметными, чем более неоднородной является рассеивающая и преломляющая среда.

Таким образом мы видим, что оптическая модель не учитывает каких-то весьма важных физических деталей. Чтобы выяснить, в чем здесь дело, рассмотрим более подробно картину прохождения частицы через среду, состоящую из отдельных рассеивающих и поглощающих центров (нуклонов).

2. Теория многократного дифракционного рассеяния

В обычной оптической модели микроструктура среды не рассматривается, и вещество представляется как некоторая непрерывная среда. Мы можем надеяться, что более точное рассмотрение позволит установить поправки, которые следует внести в такую приближенную оптическую картину.

Пренебрежем пока зависимостью взаимодействий от спинов (это вполне оправдано в области высоких энергий).

Рассеяние налетающей частицы на отдельном нуклоне будем характеризовать амплитудой рассеяния f , однако, поскольку нуклоны теперь не обязательно располагаются в начале координат ($r_1 \neq 0$, см.

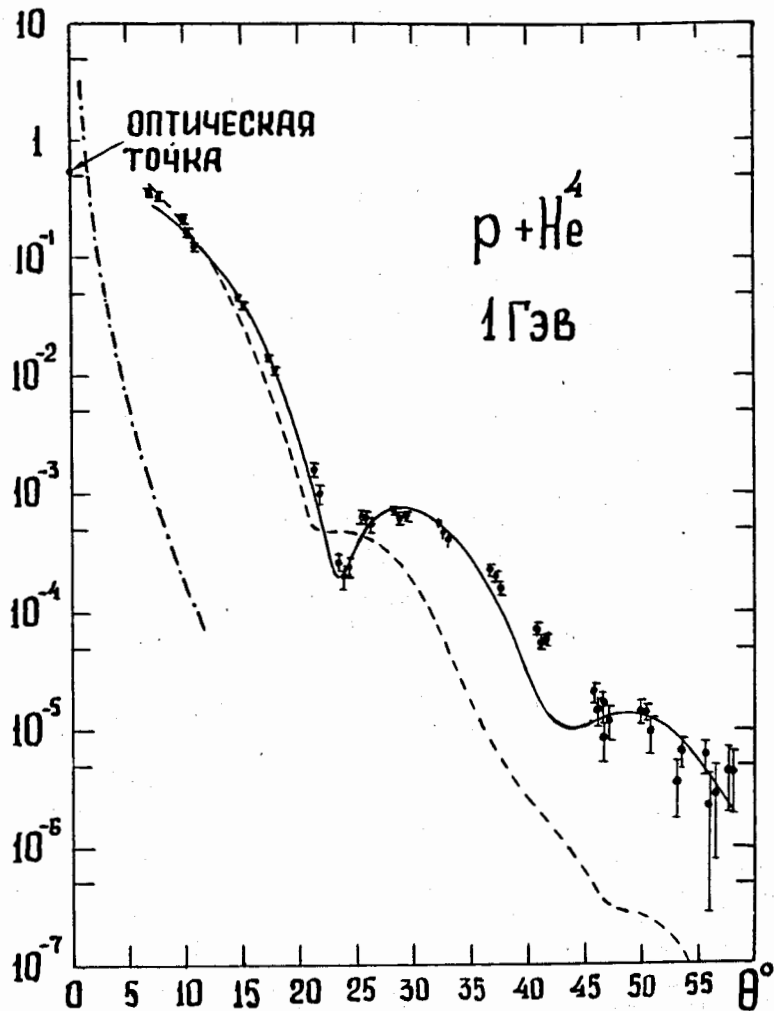


Рис.3. Сечение упругого рассеяния протонов на гелии (бари/стер; система центра масс). θ Пунктиром нанесена оптическая кривая, рассчитанная с гауссовским потенциалом, полученным из опытов с рассеянием электронов на ядре ${}^4\text{He}$. Приближительное согласие с экспериментом в этом случае возможно получить лишь для первого дифракционного пика. Сплошная кривая - оптический расчет в случае, когда потенциал выбран в виде быстро спадающей на границе функции Вудса-Саксона с радиусом $c = 1,8 \cdot 10^{-13}$ см и параметром диффузности $a = 3,1 \cdot 10^{-14}$ см. Штрих-пунктиром нанесено сечение кулоновского рассеяния на ядре ${}^4\text{He}$, рассчитанное по формуле Мотта с гауссовским формфактором, полученным из опытов с рассеянием электронов. При углах $\theta > 2-3^\circ$ это сечение становится пренебрежимо малым.

рис. 4), то азимутально симметричное выражение (2) для этой амплитуды уже не пригодно.

Чтобы получить правильное выражение, вспомним, что асимптотическая волновая функция после упругого рассеяния в общем случае представляет собой сумму плоской падающей волны e^{ikz} и рассеянной сферической волны с амплитудой $\alpha(\theta, \phi)$:

$$\Psi(\vec{x}) \approx e^{ikz} + \alpha(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6)$$

где

$$\alpha(\theta, \phi) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) (\delta_{0m} - S_{\ell m}) e^{im\phi} \mathcal{P}_{\ell}^m(\cos \theta), \quad (7)$$

$\lambda = \hbar/k$ - длина дебройлевской волны в системе центра масс, δ_{0m} - известный символ Кронекера, \mathcal{P}_{ℓ}^m - присоединенный полином Лежандра m -го порядка. Частный случай азимутальной симметрии (2) получается в предположении

$$S_{\ell m} = e^{2i\eta_{\ell}} \delta_{0m}. \quad (8)$$

Если ограничиться достаточно высокими энергиями, где рассеяние на нуклоне происходит, в основном, в области малых углов θ и существенные ℓ очень велики, то можно воспользоваться асимптотическим соотношением, связывающим полином \mathcal{P}_{ℓ}^m с функцией Бесселя J_m

$$\mathcal{P}_{\ell}^m(\cos \theta) \approx (-1)^m \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^m J_m\left(\left(2\ell + 1\right) \sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (9)$$

(Частным случаем этого соотношения является формула (3)).

Учитывая далее интегральное представление функции Бесселя

$$J_m(x) = \frac{(-i)^{-m} 2\pi}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{ix \cos \xi + im\xi} d\xi$$

и заменяя суммирование по ℓ интегралом, запишем амплитуду (7) в виде

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, \phi) &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2}\right) e^{i(2\ell+1)\sin\frac{\theta}{2}\cos\xi} \times \\ &\times \left\{ 1 - \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{-m} \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^m S_{\ell m} e^{im(\phi + \xi)} \right\} = \\ &= \frac{i}{2\pi\kappa} \int_0^{2\pi} d\xi \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell + \frac{1}{2}\right) e^{i(2\ell+1)\sin\frac{\theta}{2}\cos\xi} \left\{ 1 - e^{i\eta(\rho, \psi)} \right\} \rho d\rho, \end{aligned}$$

где $\rho = \lambda \ell$ - параметр удара, $\psi = \xi + \phi$ и обозначено

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{-m} \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^m S_{\ell m} e^{im\psi} = e^{i\eta(\rho, \psi)}$$

Введенную таким образом функцию $\eta(\rho, \psi)$ мы будем далее называть "фазой".

Если переменной ξ придать теперь физический смысл угла между направлением вектора $\vec{\rho}$ и осью x , то в области небольших углов θ можно приближенно положить

$$\rho(\vec{k} - \vec{k}') = 2k\rho \cos(\alpha - \phi + \pi) \sin\theta/2,$$

где \vec{k} и \vec{k}' - соответственно импульсы налетающей и рассеянной частиц; после этого амплитуда рассеяния запишется в компактном виде

$$\begin{aligned} \alpha(\theta, \phi) &\equiv \alpha(q) = \frac{i}{2\pi\kappa} \int e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{\rho}} (1 - e^{i\eta(\vec{\rho})}) d^2\rho = \\ &= \frac{i}{2\pi\kappa} \int e^{iq\vec{\rho}} \Gamma(\vec{\rho}) d^2\rho, \end{aligned} \quad (10)$$

где $q = \vec{k} - \vec{k}'$ - переданный импульс,

$$\Gamma(\vec{\rho}) = 1 - e^{i\eta(\vec{\rho})} \quad (11)$$

- так называемая "профилирующая функция", и интегрирование производится по всей плоскости параметра удара $\vec{\rho}$.

Заметим, что выражение (11) можно рассматривать как фурье-преобразование функции $\Gamma(\rho)$: если известна амплитуда $\alpha(q)$, эту функцию можно получить обратным преобразованием

$$\Gamma(\vec{\rho}) = \frac{\kappa}{2\pi i} \int e^{-iq\vec{\rho}} \hat{\alpha}(q) d^2q, \quad (12)$$

где интегрирование выполняется по всей плоскости, перпендикулярной начальному импульсу \vec{k} .

Выражения (10) и (11) мы и положим в основу дальнейших вычислений рассеяния быстрой частицы на ядре x). Полную амплитуду такого рассеяния мы постараемся выразить через амплитуды рассеяния на отдельных нуклонах. (Впервые такой подход был рассмотрен Глаубером /12-14/).

Высокоэнергетическая налетающая частица может столкнуться с каким-то одним нуклоном внутри ядра-мишени или испытать последовательные столкновения с несколькими такими нуклонами. В тех случаях, когда рассеяние произошло на угол $\theta > \pi/2$, возможно также повторное рассеяние на одном из этих нуклонов. Кроме того, поскольку радиус взаимодействия налетающей частицы с нуклоном может быть больше расстояния между отдельными нуклонами в ядре, то может случиться, что частица будет одновременно взаимодействовать сразу с несколькими внутриядерными нуклонами.

Математический анализ такой картины в общем случае представляет собой весьма сложную задачу, однако можно получить существенные упрощения, если воспользоваться "дифракционным приближением".

Будем считать, что рассеяние на любом внутриядерном нуклоне происходит так, как если бы этот нуклон представлял собой небольшой кусочек поглощающей и преломляющей среды (см. рис. 4). Тогда, подобно тому, как это имеет место в оптике, для определения амплитуды рассеяния необходимо найти лишь сдвиг фаз.

^{x)} В частном случае азимутальной симметрии, когда верно (8) и, следовательно, фаза $\eta(\rho, \psi)$ не зависит от ψ , в выражении (10) может быть выполнено интегрирование по угловой переменной, после чего получим хорошо известное выражение

$$\alpha(q) = ik \int_0^{\infty} J_0(2k\rho \sin\theta/2) (1 - e^{i\eta(\rho)}) \rho d\rho, \quad (14)$$

совпадающее с (2), если в последнем сделать асимптотическую замену (3) и учесть, что фаза $\eta(\rho)$ теперь вдвое больше фазы, использованной в выражении (2).

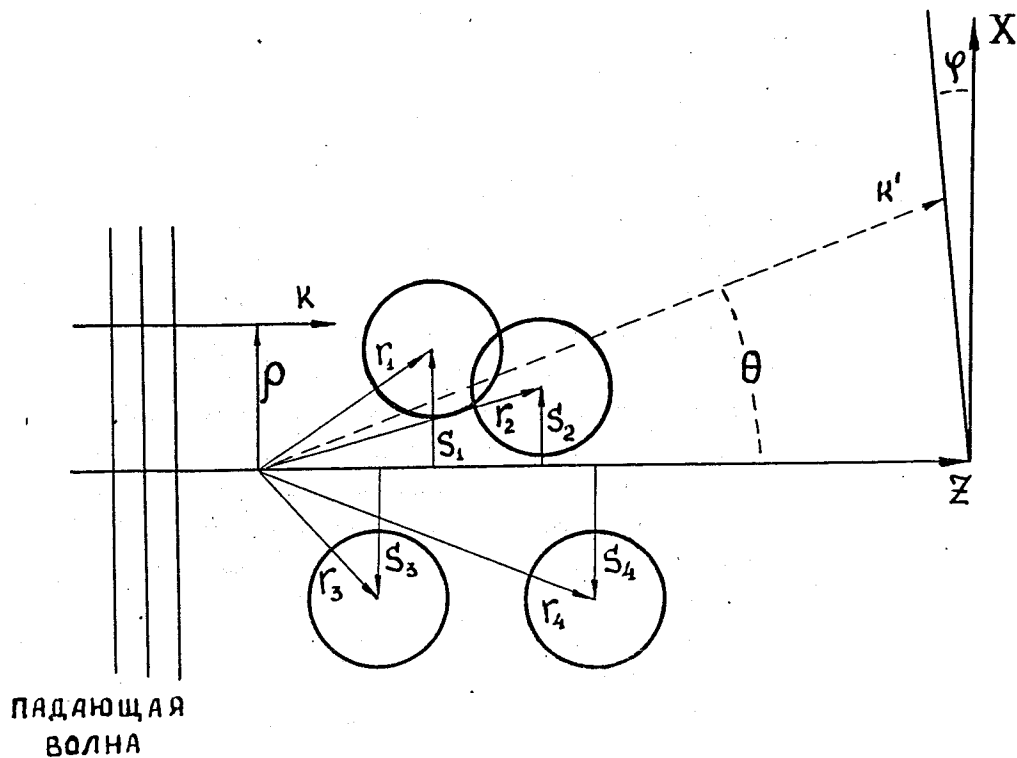


Рис.4. Рассеяние частицы с импульсом \vec{k} на системе из нескольких нуклонов. Положение отдельных нуклонов определяется трехмерными векторами \vec{r}_i ; \vec{s}_i - двумерные векторы, характеризующие положение нуклонов в плоскости, перпендикулярной импульсу \vec{k} (ось z параллельна \vec{k}), $\vec{\rho}$ - двумерный вектор параметра удара в этой же плоскости; \vec{k} - импульс рассеянной частицы; θ - полярный угол рассеяния; азимутальный угол рассеяния ϕ , характеризующий вращение плоскости $(\vec{k}' \vec{z})$ вокруг оси z , отсчитывается от плоскости $(\vec{x} \vec{z})$.

Фаза, обусловленная рассеянием на одном нуклоне,

$$\chi(\vec{\rho}) = \int K(r) d\vec{r}, \quad (13)$$

где $K(r)$ - локальный показатель преломления, а интегрирование производится вдоль траектории частицы. Основным моментом теории Глаубера является предположение, что траектория частицы незначительно отличается от прямолинейной и, следовательно, интегрирование в формуле (13) по криволинейному пути можно заменить интегрированием вдоль первоначального движения частицы z . Таким образом, фазовый сдвиг от рассеяния на каком-то одном нуклоне оказывается не зависящим от присутствия других нуклонов.

При движении частицы внутри ядра с A -нуклонами суммарный коэффициент преломления

$$K(\vec{r}, r_1, \dots, r_A) = \sum_{i=1}^A K(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

и, соответственно, полный сдвиг фаз равен сумме сдвигов фаз, обусловленных рассеянием на отдельных нуклонах:

$$\chi(\vec{\rho}, s_1, \dots, s_A) = \sum_{i=1}^A \chi_i(\vec{\rho} - \vec{s}_i). \quad (15)$$

При этом совершенно не требуется знать деталей индивидуальных взаимодействий налетающей частицы с нуклонами ядра: сдвиг фазы $\chi_i(\vec{\rho} - \vec{s}_i)$ определяется фурье-компонентой (12) амплитуды рассеяния падающей частицы на соответствующем нуклоне. Все парциальные амплитуды рассеяния на отдельных нуклонах при этом следует, конечно, преобразовать в какую-то одну общую систему координат, например, в лабораторную.

В соответствии с выражением (10) полное изменение амплитуды падающей волны

$$\delta \alpha_{\text{пад.}} = \frac{i}{2\pi\lambda} \int e^{i\vec{q}\vec{\rho}} \Phi_k^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \Gamma(\vec{\rho}, \vec{s}_1, \dots, \vec{s}_A) \Phi_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \prod_{i=1}^A d^3 r_i d^2 \rho, \quad (16)$$

где

$$\Gamma(\bar{\rho}, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_A) = 1 - \prod_{i=1}^A \{1 - \Gamma_i(\bar{\rho} - \bar{s}_i)\} =$$

$$= \sum_{i=1}^A \Gamma_i(\bar{\rho} - \bar{s}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^A \Gamma_i(\bar{\rho} - \bar{s}_i) \Gamma_j(\bar{\rho} - \bar{s}_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^A \Gamma_i(\bar{\rho} - \bar{s}_i) \Gamma_j(\bar{\rho} - \bar{s}_j) \Gamma_k(\bar{\rho} - \bar{s}_k) + \dots \quad (17)$$

- профилирующая функция ядра, Φ_N и Φ_k - волновые функции, описывающие основное состояние и движение ядра до и после рассеяния. Физический смысл введения волновых функций ядра в амплитуду (16) заключается в том, что произведение $\Phi_k^* \Phi_N$ определяет распределение рассеивающих центров внутри мишени.

Мы видим, что рассеянная на ядре волна представляет собой сумму членов, соответствующих рассеяниям на одиночных внутриядерных нуклонах, на двух нуклонах (последовательных или одновременных - в нашем приближении они не различаются), рассеяниям на трех нуклонах и т.д.

Одним из основных условий законности такого разложения является требование, чтобы распространяющаяся внутри ядра волна слабо искажалась дифракционными эффектами; только в этом случае можно говорить о суммировании фаз и к каждому взаимодействию волны внутри ядра применить формулы (10), (11).

При рассеянии на нуклоне с размерами r_N дифракционные эффекты начинают существенно сказываться лишь на расстояниях

$$d \approx r_N^2 / \lambda_L$$

(λ_L - длина дебройлевской волны в лабораторной системе координат), поэтому условиям применимости разложения (17) является требование, чтобы "область тени" d значительно превосходила размеры ядра R :

$$r_N^2 / \lambda_L \gg R,$$

а так как $R / r_N \approx A^{1/3}$, то это эквивалентно требованию

$$\lambda_L \ll r_N A^{1/3} \approx A^{1/3} 10^{-13} \text{ см}, \quad (18)$$

что выполняется уже при энергиях в несколько сотен Мэв.

Другим ограничением теории является необходимость рассматривать лишь область не слишком больших углов рассеяния, поскольку соотношения (10)-(12) выведены именно в таком приближении. Следствием этого является исключение повторных рассеяний на одном и том же нуклоне (в суммах формулы (17) нет одинаковых сомножителей).

Приведем теперь выражение (16) к виду, более удобному для численных расчетов. Для этого прежде всего учтем, что ядерные волновые функции

$$\Phi_N(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) = e^{i\bar{P}\bar{R}} \phi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A),$$

$$\Phi_k(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) = e^{i\bar{P}'\bar{R}} \phi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A),$$

где \bar{P} и \bar{P}' - импульсы ядра-мишени до и после рассеяния,

$$\bar{R} = \frac{1}{2} \sum \bar{r}_i$$

- вектор, определяющий положение центра масс этого ядра, ϕ - волновая функция, описывающая внутреннее состояние ядра. Введем, далее, относительные координаты нуклонов в системе центра масс $\bar{r}'_i = \bar{r}_i - \bar{R}$ и обозначим $\bar{s}'_i = \bar{s}_i - \bar{s}$, $\bar{\rho}' = \bar{\rho} - \bar{s}$, где \bar{s} - проекция вектора \bar{R} на плоскость, перпендикулярную импульсу первичной частицы \bar{k} . Формула (16) запишется тогда в виде

$$\delta \alpha_{\text{пад.}} = \frac{i}{2\pi\lambda} \int e^{i\bar{q}\bar{\rho}} d^3\rho \int e^{i(\bar{P}-\bar{P}')\bar{R}} \phi^*(\bar{r}'_1, \dots, \bar{r}'_A) \Gamma(\bar{\rho}, \bar{s}'_1, \dots, \bar{s}'_A) \phi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) \times$$

$$\times \delta(\bar{R} - \sum_{i=1}^A \bar{r}_i / A) d^3R \prod_{i=1}^A d^3r_i =$$

$$= \alpha(q) \int e^{i\bar{q}\bar{s} + i(\bar{P}-\bar{P}')\bar{R}} d^3R,$$

где

$$\alpha(q) = \frac{i}{2\pi\chi} \int e^{i\bar{q}\bar{\rho}'} d^2\rho' \int \phi^*(\bar{r}'_1, \dots, \bar{r}'_A) \Gamma(\bar{\rho}', \bar{s}'_1, \dots, \bar{s}'_A) \phi(\bar{r}'_1, \dots, \bar{r}'_A) \times \\ \times \delta\left(\sum_{k=1}^A \bar{r}'_k / A\right) \prod_{k=1}^A d^3r'_k$$

(функция Γ , как это видно из формулы (17), зависит только от разностей $\bar{\rho} - \bar{s}_i = \bar{\rho}' - \bar{s}'_i$).

Выполнив в этом выражении интегрирование по координатам центра масс, получим

$$\delta\alpha_{\text{пад.}} = (2\pi)^3 \delta_{\perp}(\bar{k} - \bar{k}' + \bar{P} - \bar{P}') \delta[\bar{k}(\bar{P} - \bar{P}') / k] \alpha(q). \quad (19)$$

Здесь δ -функции выражают закон сохранения импульса, а функция $\alpha(q)$ представляет собой амплитуду рассеяния частицы на ядре в общепринятой нормировке.

С помощью соотношений (12) и (17) профилирующую функцию Γ мы можем выразить через амплитуды упругого рассеяния частицы на внутриядерных нуклонах с относительными импульсами в системе центра масс $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_A$:

$$\alpha(q) = \frac{i}{2\pi\chi} \int e^{i\bar{q}\bar{\rho}} d^2\rho \int \phi^*(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) \times \\ \times \left[1 - \prod_{k=1}^A \left[1 - \frac{\chi}{2\pi i} \int e^{-i\bar{q}_k(\bar{\rho} - \bar{s}_k)} \alpha_k(q) d^2q_k \right] \right] \times \\ \times \phi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) \delta\left(\sum_{k=1}^A \bar{r}_k / A\right) \prod_{k=1}^A d^3r_k. \quad (20)$$

В этом выражении мы опустили штрихи у пространственных векторов, т.к. далее всегда будет подразумеваться, что все пространственные координаты в формулах для ядерных амплитуд рассеяния относятся к системе центра масс ядра.

В соответствии с нашим выводом, все нуклонные амплитуды в (20) относятся к лабораторной системе координат. На практике это не совсем

удобно, т.к. в большинстве экспериментальных и теоретических работ амплитуды рассеяния на нуклоне принято задавать в системе центра масс налетающей частицы и нуклона. В применении к нашему случаю это означает, что для каждой амплитуды α_i должна выбираться своя система центра масс (так как импульсы всех внутриядерных нуклонов, вообще говоря, различны). Нетрудно, однако, показать, что для области не слишком больших углов рассеяния, когда эффекты отдачи несущественны, амплитуда рассеяния в лабораторной системе координат и амплитуда рассеяния в системе центра масс налетающей частицы и нуклона различаются лишь тем, что передаваемый импульс q_i следует выбирать соответственно в лабораторной системе или в системе центра масс /13/:

$$\alpha_i^{(L)}(q_i^{(L)}) = \alpha_i^{(C)}(q_i^{(C)}). \quad (23)$$

(При всех преобразованиях, однако, должно сохраняться выполняющееся в системе центра масс соотношение между квадратом трехмерного передаваемого импульса q^2 и соответствующей величиной четырехмерного передаваемого импульса $t: q^2 = -t$; поэтому во всех окончательных формулах величина q^2 должна интерпретироваться как $|t|$).

Нуклонную амплитуду в системе центра масс удобно, далее, представить в виде

$$\alpha_i(q) = \frac{Z}{A} \alpha_{p1}(q) + \left(1 - \frac{Z}{A}\right) \alpha_{n1}(q), \quad (22)$$

где

$$\alpha_{N1}(q) = \{ \text{Re } \alpha_{N1}(0) + i \text{Im } \alpha_{N1}(0) \} e^{-\beta_N q^2/4} = \\ = \frac{\sigma_{N1}}{4\pi\chi} (i + a_N) e^{-\beta_N q^2/4}. \quad (23)$$

Здесь i - мнимая единица, a_N - не зависящее от выбора системы координат отношение реальной и мнимой частей амплитуды для рассеяния на

угол $\theta = 0$, β_N - известная из опыта постоянная. Это выражение является вполне хорошим приближением во всей рассматриваемой нами области не слишком больших углов рассеяния.

Подход к расчету ядерных сечений, в основе которого лежат формулы (20)-(23), принято называть сейчас теорией многократного дифракционного рассеяния или, проще, теорией Глаубера.

3. Нуклон-дейтронное рассеяние

Для того, чтобы по формулам (20)-(23) вычислить ядерное сечение, необходимо предварительно с помощью какой-то модели определить плотность распределения нуклонов в ядре

$$\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \phi^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) \phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A). \quad (24)$$

Это сравнительно легко сделать для ядра дейтерия, где существует достаточно разработанная теория. Рассчитанные по теории Глаубера сечения оказываются в этом случае весьма чувствительными как к выбору дейтронной волновой функции, так и к величине реальной части нуклонной амплитуды $\text{Re } a_N \approx a_N$ (рис. 5-7). Это обстоятельство можно использовать для экспериментального определения всех таких величин. В частности, в последнее время большое число экспериментов с дейтерием было посвящено измерению a_N - параметра, играющего очень важную роль в физике элементарных частиц /15/; теория Глаубера дает достаточно надежную основу для анализа этих экспериментов.

В применении к дейтерию теория Глаубера заслуживает особого внимания еще и с другой точки зрения. Как известно, основным источником наших сведений о величине сечений взаимодействий элементарных частиц с нейтроном являются "разностные опыты" с водородом и дейтерием; при этом очень важно уметь достаточно точно вычислять поправку, связанную с эффектами экранировки нуклонов в ядре дейтерия /16/. Неточность вычисления этой поправки часто значительно превосходит величину непосредственных ошибок измерения сечений. Теория Глаубера позволяет достаточно корректно учесть эффекты экранировки /13/.

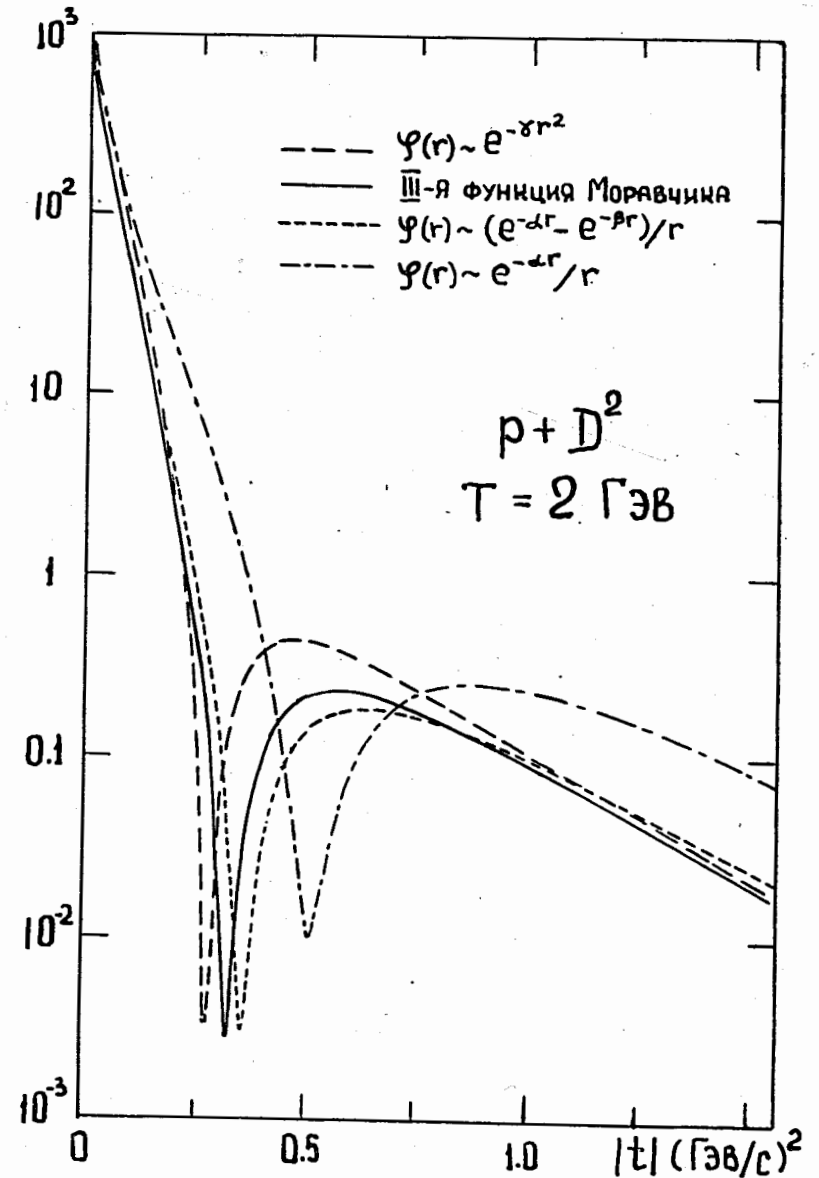


Рис.5. Изменение сечения упругого рассеяния протона на ядре дейтерия в зависимости от различного выбора волновой функции дейтрона $\phi(r)$ (в единицах мб/стер; лабораторная система координат) /20/.

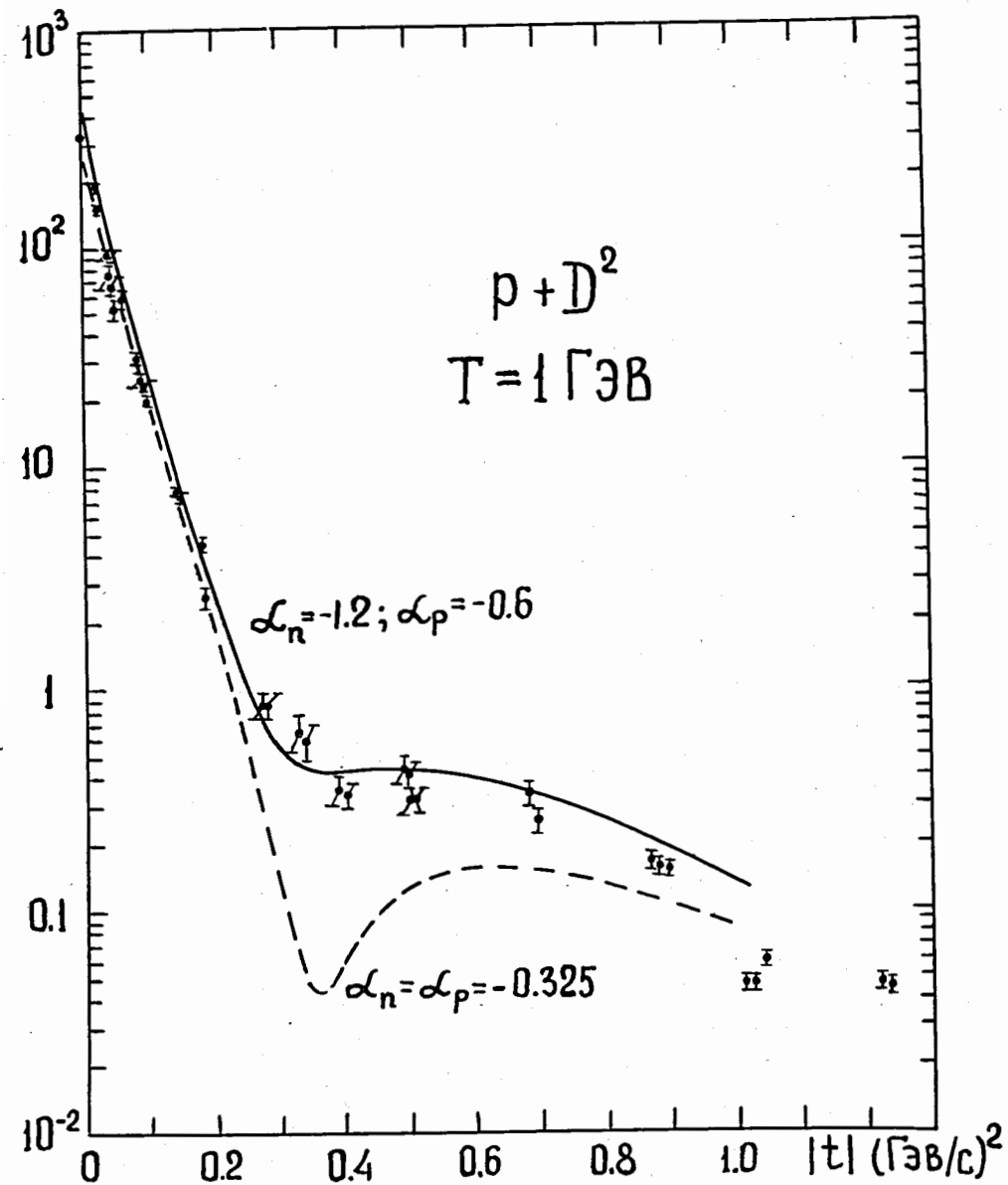


Рис. 6. Сечение упругого рассеяния протона на дейтроне при различных значениях параметра α (в единицах мб/стер; лабораторная система координат). Энергия протонов 1 ГэВ [8,21].

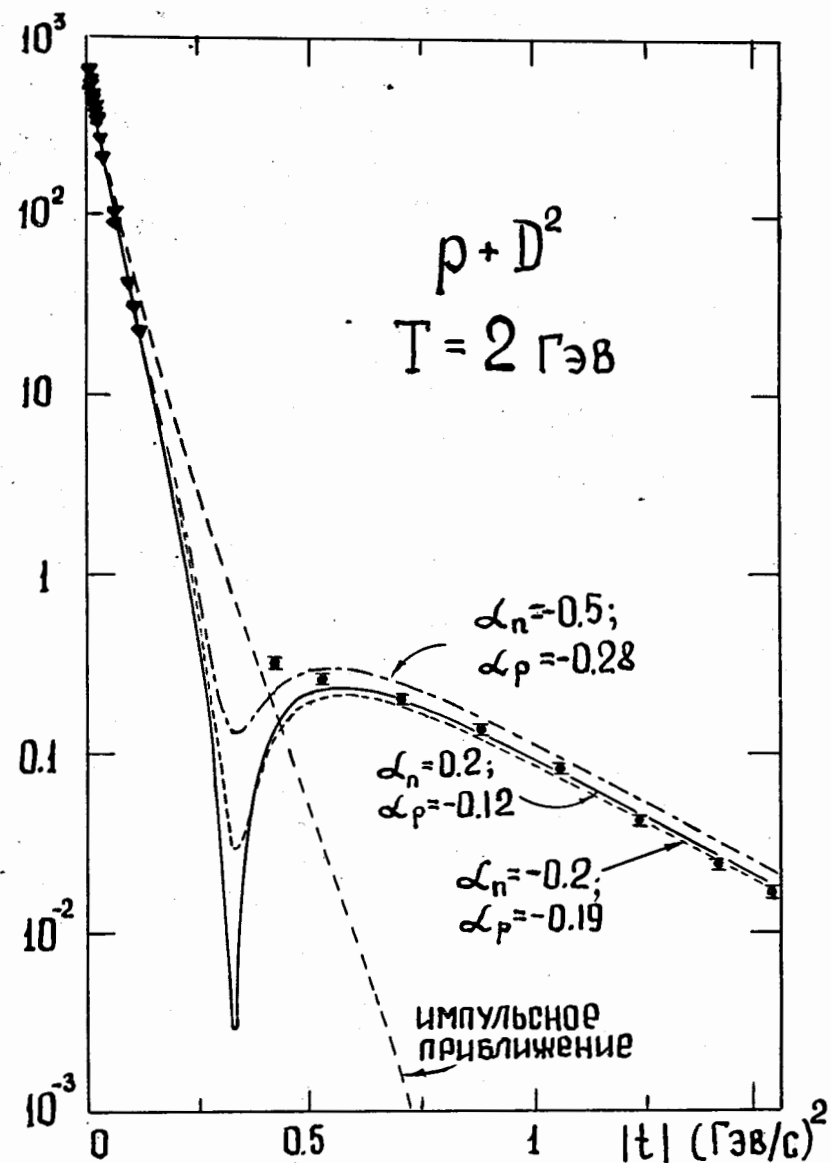


Рис. 7. То же, что и на рис. 6. Энергия протонов 2 ГэВ/20/. Отдельно показано сечение, вычисленное в импульсном приближении (в произведении $\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \dots]$, в формуле (20) удержан лишь член с $k=1$).

Из данных, приведенных на рис. 6 и 7, видно, что теория многократного дифракционного рассеяния неплохо согласуется с известными экспериментальными данными в области первого и второго максимумов, но для $q^2 \approx 0,35 (\text{ГэВ}/c)^2$ она предсказывает острый минимум, тогда как на опыте наблюдается лишь изменение наклона кривой. Это расхождение сохраняется, если использовать различные волновые функции для дейтрона или точнее расписать амплитуду нуклон-нуклонного рассеяния, учтя член с q^4 в показателе экспоненты формулы (23) или, наконец, варьировать σ_n и σ_p , оставляя неизменным значение σ_{pd} . В отсутствии спиновой зависимости $\alpha_{N_1}(q)$ слабо сказывается и примесь D-состояния к волновой функции дейтрона.

Глубина минимума оказывается весьма чувствительной функцией α_N . Так, например, хорошее согласие с опытом достигается при $\alpha_n = -1,2$, $\alpha_p = -0,6$ (см. рис. 6). Это обстоятельство послужило аргументом для обсуждения возможной зависимости α_N от передаваемого импульса q /19/. Альтернативным решением является учет спиновой зависимости нуклон-нуклонной амплитуды при больших энергиях /19/. Это особенно важно для дейтрона, который, в отличие от обсуждаемых ниже ядер, является системой со спином, равным единице.

Хуже обстоит дело с рассеянием π -мезонов (см. рис. 8 и 9). В этом случае экспериментальные данные не имеют резкого дифракционного минимума и к тому же заметно превышают теоретические значения. Причина расхождения остается пока не очень ясной. Возможно, кроме причин, которые обсуждались в связи с p-d рассеянием, важную роль играет учет внутриядерного движения нуклонов, что аргументируется наличием близко расположенных резонансов в сечении π -N-взаимодействий /32/.

4. Рассеяние нуклонов на ядре гелия

Для более сложных ядер мы сейчас не располагаем хорошей теорией, поэтому приходится использовать различные, часто весьма грубые, модельные представления.

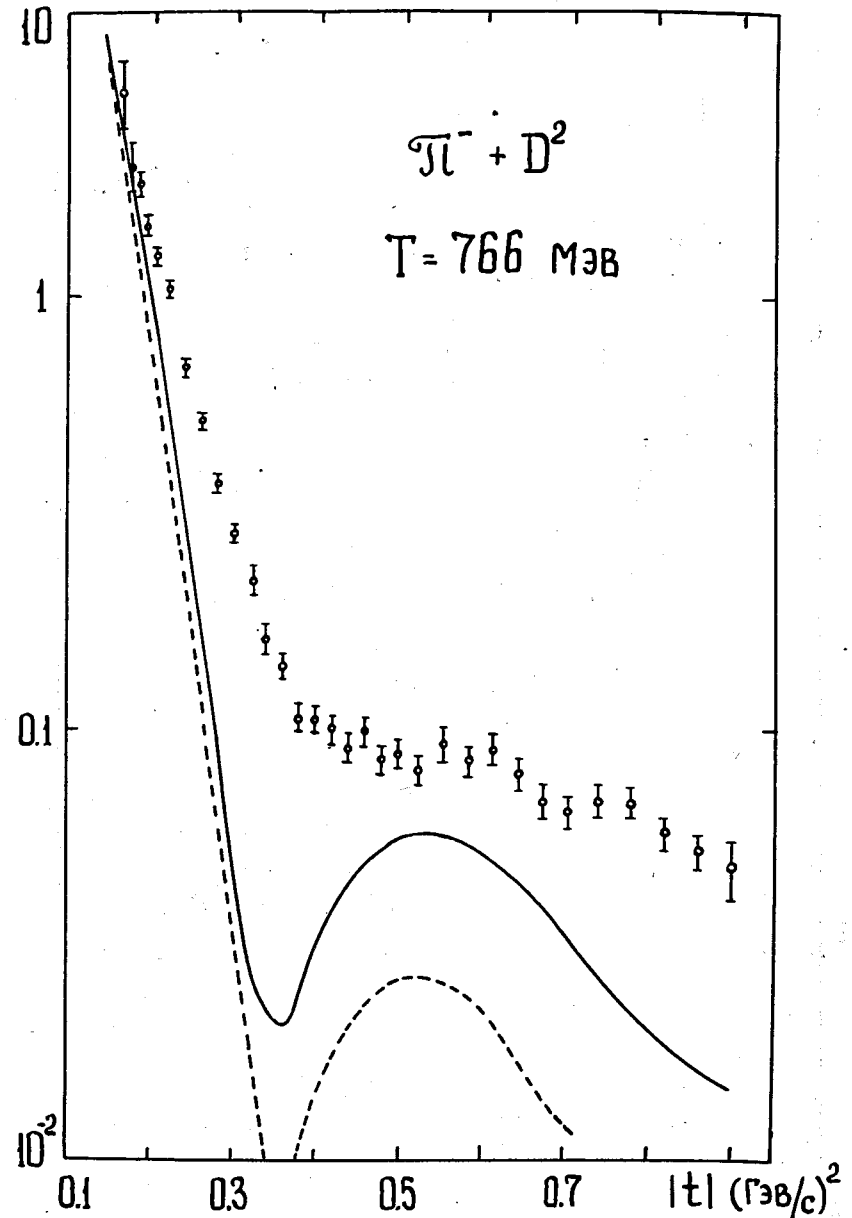


Рис.8. Сечение рассеяния π^- -мезонов на ядре дейтерия при $T=766 \text{ МэВ}$ в единицах $\text{мб}/(\text{ГэВ}/c)^2$ /27,28/. Пунктир - сечение без учета переверота спинов; сплошной кривой показано суммарное сечение, учитывающее и спиновые эффекты. Расчеты выполнены с использованием "ковариантного обобщения теории Глаубера" /29,30/.

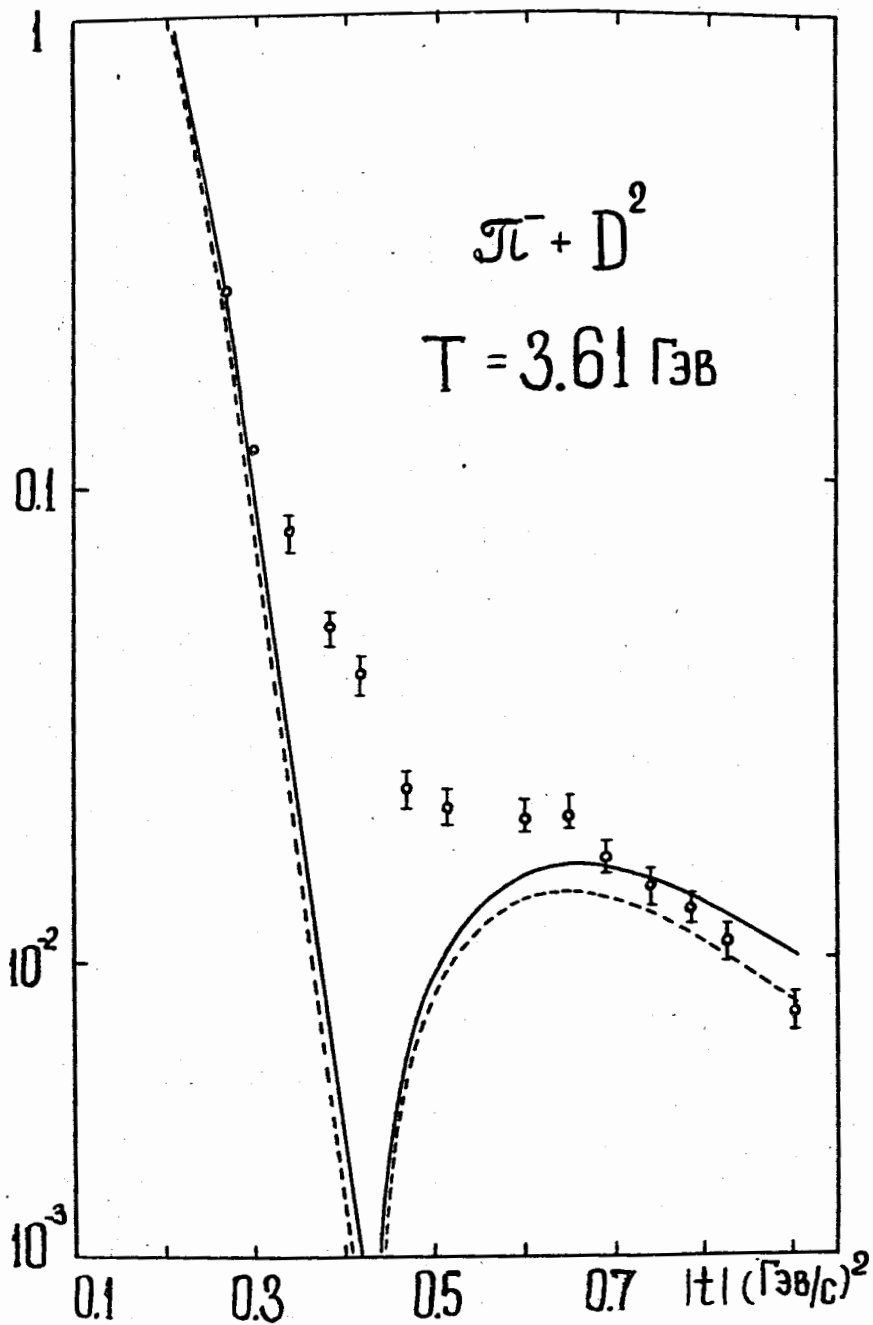


Рис.9. То же, что и на рис. 8. $T = 3,61$ Гэв ^{/27,31/}.

Если приближенно допустить, что нуклоны в ядре можно рассматривать независимо друг от друга (а далее мы увидим, что в ряде случаев это не такое уж плохое приближение), то плотность ρ факторизуется:

$$\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \prod_{k=1}^A \rho(\vec{r}_k). \quad (25)$$

При этом амплитуда (20) также имела бы вид произведения не связанных друг с другом интегралов по нуклонным координатам \vec{r}_i , если бы не содержащаяся в ней δ -функция. Эту функцию можно устранить с помощью трансформации Гартенхауза-Шварца ^{/17/}. К сожалению, получающееся выражение имеет сложный вид, поэтому более предпочтительно работать непосредственно с выражением, содержащим δ -функцию. Однако, если предположить, что на нуклоны внутри ядра действует гармонический потенциал, то преобразованное выражение оказывается весьма простым. В частности, если все A нуклонов ядра с радиусом R находятся в $1S$ -состоянии, то

$$\rho(\vec{r}) = \phi^*(r) \phi(r) = \left(\frac{1}{\pi R^2}\right)^{3/2} e^{-r^2/R^2} \quad (26)$$

и амплитуда рассеяния на ядре

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3\rho \left\{ 1 - \prod_{k=1}^A \left[1 - \frac{\chi}{2\pi i} \int d^2\delta e^{-i\vec{r}\vec{\delta} - (R\delta/2)^2} \alpha_{N_k}(\delta) \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} d^3\rho \left\{ 1 - \prod_{k=1}^A \left[1 - \frac{\sigma_i(1-i\alpha)}{2\pi(R^2 + \beta^2)} e^{-\rho^2/(R^2 + \beta^2)} \right] \right\}, \quad (27) \end{aligned}$$

где σ_i , α , β - величины, усредненные по числу протонов и нейтронов (см. (22)).

Так как выражение в квадратных скобках не зависит от k , мы можем переписать произведение в виде суммы

$$\prod_{k=1}^A [1 - \chi] = [1 - \chi]^A = \sum_{k=0}^A \frac{(-1)^k A!}{k!(A-k)!} \chi^k,$$

после чего все интегралы в формуле (27) берутся аналитически, и амплитуда рассеяния приобретает вид /18/:

$$\alpha(q) = \frac{i}{2\lambda} (R^2 + \beta^2) e^{-q^2 R^2 / 4\lambda} \sum_{k=1}^A \frac{(-1)^{k+1} A!}{k \cdot k! (A-k)!} \left(\frac{\sigma_k (1 - i\alpha)}{2\pi (R^2 + \beta^2 / R^2)} \right)^k e^{-q^2 (R^2 + \beta^2) / 4k} \quad (28)$$

N-ый член в этом выражении соответствует рассеянию с N-кратным столкновением внутри ядра (см. формулу (17)). Из опытов с рассеянием электронов известно, что функции (25) и (26) являются хорошим приближением для ядра ${}^4\text{He}$. В этом случае все четыре нуклона ($A=4$) действительно находятся в $1S$ -состоянии, образуя замкнутую оболочку.

На рис. 10 результаты расчетов по формуле (28) сравниваются с экспериментальными данными. Хорошее согласие имеет место лишь в области основного дифракционного пика, при больших значениях q теоретическая кривая проходит заметно ниже экспериментальных точек. Подбором параметров расхождение устранить не удается, хотя глубина первого минимума весьма чувствительна к величине α .

Попытаемся улучшить согласие расчетов с опытом, выбрав более сложное выражение для плотности ρ .

Можно думать, что, подобно тому, как четыре притягивающихся друг к другу шара в своем устойчивом состоянии располагаются так, что в центре образуется дырка, так и нуклоны в ядре ${}^4\text{He}$ располагаются таким образом, что в центре ядра плотность ρ минимальна. Феноменологически это можно рассматривать как результат совместного действия рассматривавшегося выше гармонического потенциала и некоторого отталкивающего потенциала в центре ядра. Соответствующее выражение для плотности нуклонов выберем в виде

$$\rho(r_1, r_2, r_3, r_4) = \prod_{k=1}^4 e^{-r_k^2 / R^2} [1 - C e^{-\gamma r_k^2 / R^2}], \quad (29)$$

где постоянные C и γ подбираются из условия, чтобы теоретическое сечение наилучшим образом согласовалось с экспериментальным (см. таблицу 1); выражение для амплитуды $\alpha(q)$ в этом случае, как нетрудно сообразить, получается простым видоизменением формулы (28)).

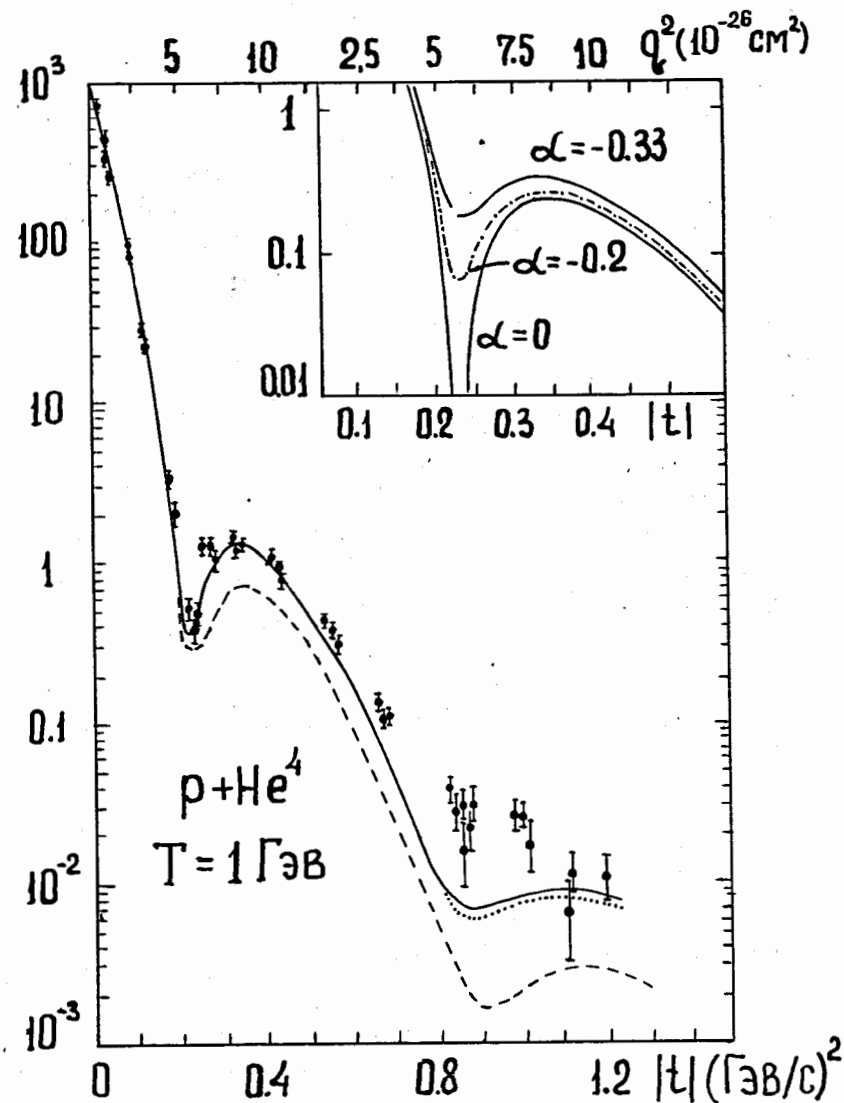


Рис. 10. Сечение упругого рассеяния протонов на ядре гелия (в единицах мб/стер; система центра масс) /9,19/. Сплошной кривой указаны результаты расчета для плотности (29), учитывающей отталкивание в центре ядра. Пунктир - расчет по более простой формуле (26). Точками нанесены результаты расчета для плотности (30), учитывающей отталкивание в центре ядра и корреляцию нуклонов. Отдельно показано влияние изменения величины параметра α на глубину первого дифракционного минимума (при этом для простоты предполагалось $\alpha = \alpha_n = \alpha_p$; эта часть расчетов выполнена с плотностью (26) /18/).

Таблица 1

Значения параметров, определяющих плотность $\rho(r_1, r_2, r_3, r_4)$, полученные из условия наилучшего согласия экспериментальных и теоретических сечений $\sigma(\theta)$ /19/

Выражение для плотности	$R, 10^{-13}$ см	γ	$s, 10^{-13}$ см	C	D
(26)	1,37				
(29)	1,32	0,555		0,858	
(30)	1,25	0,436	0,41	1	1

Из рис. 10 видно, что при $T = 1$ Гэв таким путем удается получить достаточно хорошее согласие с экспериментальными точками; заметные различия наблюдаются лишь в области второго минимума. Чем это обусловлено, сейчас пока неясно; может быть, это происходит из-за того, что теория Глаубера неприменима в области больших значений q , или это связано с неучтенными в теории спиновыми эффектами.

Некоторые авторы пытались объяснить расхождение при больших q внутриядерными корреляциями нуклонов. Плотность ρ в этом случае может быть записана в виде

$$\rho(r_1, r_2, r_3, r_4) = \prod_{k=1}^4 e^{-r_k^2/R^2} [1 - C e^{-\gamma^2 r_k^2/R^2}] \prod_{n < m}^4 [1 - D e^{-r_{nm}^2/s^2}], \quad (30)$$

где r_{nm} - расстояние между двумя нуклонами, а значения параметров снова подбираются из условия согласия теоретического сечения с экспериментальным.

Выражение для амплитуды $\mathcal{A}(q)$ теперь становится значительно более сложным. В частности, преобразование Гартенхауза-Шварца /17/ теперь мало件лезно, проще иметь дело с выражением, содержащим δ -функцию $\delta(\sum_{i=1}^4 \bar{r}_i/A)$.

Подставив плотность (30) в амплитуду (20) и вычислив интегралы по всем переменным, кроме координат четырех внутриядерных нуклонов, получим:

$$\mathcal{A}(q) = \int \rho(r_1, r_2, r_3, r_4) (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \delta(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3 + \bar{r}_4) d^3(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4), \quad (31)$$

где функции C_1, C_2, C_3 и C_4 относятся, соответственно, к однократным, двух-, трех- и четырехкратным столкновениям внутри ядра. Эти функции имеют вид /19/:

$$C_1 = \frac{i}{2\pi\lambda} (f_p + f_n) e^{i\bar{q}\bar{s}_1} e^{-\beta^2 q^2/4}; \quad (32a)$$

$$C_2 = -\frac{3i}{8\pi^2\beta^2\lambda} f_p f_n e^{i\bar{q}(\bar{s}_1 + \bar{s}_2)/2} e^{-\beta^2 q^2/8} e^{-(s_1 - s_2)^2/2\beta^2}; \quad (32b)$$

$$C_3 = \frac{i}{48\pi^3\beta^4\lambda} f_p f_n (4f_p f_n - f_p^2 - f_n^2) e^{i\bar{q}(\bar{s}_1 + \bar{s}_2 + \bar{s}_3)/3} e^{-\beta^2 q^2/12} \times e^{-[(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) - (s_1 + s_2 + s_3)^2/3]/\beta^2}; \quad (32b)$$

$$C_4 = -\frac{i}{128\pi^4\beta^4\lambda} [f_p^2 f_n^2 - f_p f_n (f_p - f_n)^2] e^{-\beta^2 q^2/16} \times e^{-[(s_1 + s_2 + s_3)^2 + (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)]/\beta^2}. \quad (32r)$$

Здесь обозначено

$$\sigma_{pt}(1 - ia_p) = f_p, \quad \sigma_{nt}(1 - ia_n) = f_n$$

и положено

$$\beta^2 = (\beta_p^2 + \beta_n^2)/2.$$

Интегрирование δ -функции в (31) исключает координату \bar{r}_4 (это уже учтено в выражении для C_4), после чего оставшееся подинтегральное выражение приобретает вид суммы членов, пропорциональных экспонентам $\exp(-\sum_{n,m}^3 a_{nm} r_n r_m)$. Такой интеграл может быть вычислен аналитически (см. /19/) или численно.

Мы привели формулы (31) и (32), чтобы показать, каким образом следует выполнять расчеты, когда плотность ρ имеет вид более сложный, чем (26).

Результат численных расчетов с плотностью (30) указан на рис.10. Учет внутриядерных корреляций лишь на немного сдвигает теоретическую кривую, и в пределах неточностей экспериментальных данных совершенно не существен. Однако, если учесть только корреляции и не принять во внимание спада плотности в центре ядра (т.е. положить в формуле (30) $C = 1$), то теоретическая кривая оказывается значительно ниже экспериментальных точек (подробнее см. /19/).

Следует иметь в виду, что, поскольку подгонка выражения для плотности ρ производилась всего лишь по одному эксперименту при фиксированной энергии T , к значениям параметров, приведенным в таблице 1, а также и к самому выводу о согласии теории с опытом, следует пока относиться с осторожностью. Для более надежных заключений необходимо прежде всего сравнить полученные значения параметров с экспериментальными данными при нескольких энергиях T . Таких данных в настоящее время, к сожалению, еще не имеется.

Дополнительным соображением о корректности проведенного анализа является то, что формфактор, определенный из опытов с рассеянием протонов на ядре ${}^4\text{He}$, хорошо объясняет также и опыты с рассеянием электронов на гелии (см. рис. 11).

Тот факт, что для описания рассеяния электронов и протонов в теории Глаубера используется практически один и тот же формфактор, представляет собой важную отличительную черту этой теории по сравнению с оптической моделью. Вообще говоря, можно ожидать некоторых различий "электронного" и "протонного" формфакторов вследствие того, что плотности протонов и нейтронов в ядре несколько отличаются друг от друга; однако эти различия невелики, особенно, если явно учесть распределение плотности внутри самого рассеивающегося протона (размерами и структурой электрона можно пренебречь. ^{x)}

^{x)} Ядерный формфактор, проявляющийся в опытах с рассеянием протяженных протонов, (см. продолжение на стр. 32).

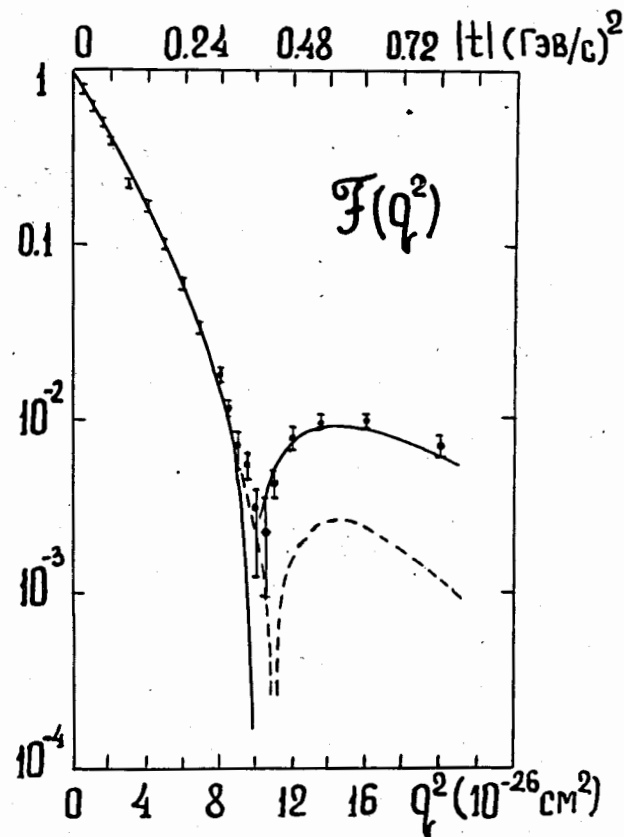


Рис.11. Сравнение "электронного" формфактора ядра ${}^4\text{He}$
 $F(q^2) = [\sigma(\theta)_{\text{эксп.}} / \sigma(\theta)_{\text{Мотт}}]^{1/2}$,

определенного из опытов с рассеянием электронов (экспериментальные точки взяты из работы /26/), с "протонным" формфактором, определенным из опытов с рассеянием протонов. Сплошной кривой нанесены значения "протонного" формфактора, вычисленные для плотности (30) и значений параметров из таблицы 1. Внутренняя структура рассеивающегося протона учтена с помощью формул (33)-(36). Пунктиром нанесены соответствующие значения "протонного" формфактора, вычисленные в предположении, что распределение нуклонов в ядре гелия определяется формулой (30) с параметром $C = 1$ (т.е. без учета спада плотности в центре ядра). Как видно, в этом случае "электронный" и "протонный" формфакторы весьма заметно различаются /19/.

5. Рассеяние на ядрах углерода и кислорода

В легких ядрах с атомными номерами $A > 4$, как это показывают опыты с рассеянием электронов, распределение плотности нуклонов так же хорошо описывается выражением, соответствующим гармоническому потенциалу. Если учесть, что в S -состоянии могут находиться только четыре нуклона, а остальные занимают состояния с большим значением l , то

$$\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \prod_{k=1}^4 \rho_S(\vec{r}_k) \prod_{k=5}^A \rho_P(\vec{r}_k). \quad (37)$$

Здесь первое произведение описывает S -оболочку, и плотности $\rho_S(\vec{r}_k)$ следует выбирать в виде (26), второе произведение относится к остальным $A-4$ нуклонам ($A < 16$) в P -состоянии с плотностями

$$\rho_P(\vec{r}_k) = \left(\frac{2}{3\pi^{3/2} R^3} \right) r_k^2 e^{-r_k^2/R^2}. \quad (38)$$

После подстановки этих выражений в формулу (20) и исключения δ -функции с помощью преобразования Гартенхауза-Шварца, ядерная амплитуда рассеяния запишется в виде

$$F(q) = \int \rho(r) e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3r = F_Y(q) F_P(q), \quad (33)$$

где

$$\rho(r) = \int \rho_Y(\vec{r}+\vec{r}') \rho_P(\vec{r}') d^3r', \quad (34)$$

$$\rho_Y(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4) d^3(r_2, r_3, r_4) \quad (35)$$

(ядерная плотность $\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4)$ симметрична по отношению к перестановкам \vec{r}_i). Для описания формфактора протона можно использовать полюсное выражение

$$F_P(q) = \frac{1}{(1+q^2/a^2)^2} \quad (36)$$

с параметром $a=0,71$ Гэв/с. К вопросу о рассеянии протяженных частиц мы еще вернемся в связи с рассеянием ядер на ядрах (см. формулы (51)-(53)).

$$Q(q) = \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho \times$$

$$\times \int \prod_{k=1}^4 \rho_S(\vec{r}_k) \prod_{k=5}^A \rho_P(\vec{r}_k) \left\{ 1 - \prod_{j=1}^A \left[1 - \frac{\sigma_t(1-ia)}{2\pi\beta} e^{-(\vec{\rho}-\vec{s}_j)^2/\beta^2} \right] \right\} \prod_{n=1}^A d^3r_n =$$

$$= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2/4A} \int e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho \left\{ 1 - \right.$$

(39)

$$\left. - \left[1 - \frac{\sigma_t(1-ia)}{2\pi(R^2+\beta^2)} e^{-\rho^2/(R^2+\beta^2)} \right]^4 \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \frac{\sigma_t(1-ia)}{2\pi} \left(\frac{1}{R^2+\beta^2} - \frac{2R^2}{3(R^2+\beta^2)^2} + \frac{2R^2\beta^2}{3(1+\beta^2)^3} \right) e^{-\rho^2/(R^2+\beta^2)} \right]^{A-4} \right\}.$$

(для простоты нуклонная амплитуда (23) в этом выражении предложена усредненной по p - p и p - n -взаимодействиям).

Подинтегральное выражение в (39) может быть разложено в степенной ряд (по формуле для бинома Ньютона), после чего все интегралы вычисляются аналитически ^{19/}. Однако получающееся при этом выражение оказывается довольно сложным.

Расчеты существенно упрощаются, если предположить, что ядро сферически симметрично; в этом случае (ср. формулы (10) и (14))

$$Q(q) = \frac{i}{\lambda} \int_0^\infty J_0(q\rho) \{ \dots \} \rho d\rho, \quad (40)$$

где $q = \frac{2}{\lambda} \sin\theta/2$, а символом $\{ \dots \}$ обозначено выражение в фигурных скобках в формуле (39).

Интегрирование в (40) может быть легко выполнено численными методами.

Можно получить более точное выражение для амплитуды $\Omega(q)$, если при определении плотности $\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ антисимметризовать координаты нуклонов в соответствии с принципом Паули. Например, в случае рассеяния на ядрах ^{12}C и ^{16}O конфигурация протонов и, соответственно, нейтронов - имеет вид $(1S_{1/2})^2(1P_{3/2})^4$ для ^{12}C и $(1S_{1/2})^2(1P_{3/2})^4(1P_{1/2})^2$ для ^{16}O . Гармонические волновые функции нуклонов в S- и P-состояниях

$$\begin{aligned} \phi_S(\vec{r}; j=1/2, j_z=\pm 1/2) &= \phi_S(r) \cdot \chi_{\pm}, \\ \phi_P(\vec{r}; j=1/2, j_z=1/2) &= \phi_P(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (-Y_{10} \chi_+ + \sqrt{2} Y_{11} \chi_-), \\ \phi_P(\vec{r}; j=1/2, j_z=-1/2) &= \phi_P(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (-\sqrt{2} Y_{1-1} \chi_+ + Y_{10} \chi_-), \\ \phi_P(\vec{r}; j=3/2, j_z=1/2) &= \phi_P(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} Y_{10} \chi_+ + Y_{11} \chi_-), \\ \phi_P(\vec{r}; j=3/2, j_z=-1/2) &= \phi_P(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (-Y_{1-1} \chi_+ - \sqrt{2} Y_{10} \chi_-), \\ \phi_P(\vec{r}; j=3/2, j_z=\pm 3/2) &= \phi_P(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} Y_{11} \chi_{\pm}. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi_S(r) &= \left(\frac{1}{\pi^{1/2} R} \right)^{3/2} e^{-r^2/2R^2} \\ \phi_P(r) &= \left(\frac{2}{3\pi^{1/2}} \right)^{3/2} \frac{r}{R} e^{-r^2/2R^2} \end{aligned} \quad (42)$$

- соответствующие радиальные волновые функции, $Y_{\ell m}$ - сферические функции, χ_{\pm} - спиновые функции нуклона (со спином, направленным вверх или вниз; направление движения первичной частицы выбрано за ось z). Полные антисимметричные волновые функции, описывающие основное состояние ядра-мишени, выражаются через определитель Слэтера:

$$\phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = (A!)^{-1/2} \|\phi_n(\vec{r}_k)\|, \quad (43)$$

где $\phi_n(\vec{r}_k)$ - одночастичные волновые функции (41).

Если не учитывать процесса перезарядки, влияние которого в области высоких энергий невелико, то протоны и нейтроны можно симметризовать отдельно:

$$\phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A) = \phi^{(p)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_Z) \phi^{(n)}(\vec{r}_{Z+1}, \dots, \vec{r}_A), \quad (44)$$

$$\phi^{(p)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_Z) = (Z!)^{-1/2} \|\phi_n(\vec{r}_k)\|_{k=1, \dots, Z} \quad (45)$$

$$\phi^{(n)}(\vec{r}_{Z+1}, \dots, \vec{r}_A) = [(A-Z)!]^{-1/2} \|\phi_n(\vec{r}_k)\|_{k=Z+1, \dots, A}$$

Это упрощает вычисления.

На рис. 12 приведены результаты расчетов для случая рассеяния протонов на кислороде ($R = 1,71 \cdot 10^{-13}$ см, с учетом формфактора протона). Как видно, теория и эксперимент хорошо согласуются, при этом антисимметризация волновых функций оказывается сравнительно неважной. Вычисления выполнены для $|\alpha| = 0,3$ (знак α не существен); изменение α более чем на 0,1 заметно ухудшает согласие расчетов с опытом.

Эксперимент и теория заметно хуже согласуются в случае рассеяния на углероде (рис. 13). Если для ядерного радиуса использовать значение $R = 1,58 \cdot 10^{-13}$ см, полученное из опытов с рассеянием электронов, то минимум в сечении приходится на слишком малые значения передаваемого импульса, а расчетная величина сечения в области второго максимума оказывается завышенной примерно на 50% по сравнению с экспериментом. Попытка уменьшить радиус R с тем, чтобы добиться совпадения положений экспериментального и теоретического минимумов, приводит к ухудшению согласия как в области малых, так и в области больших значений t .

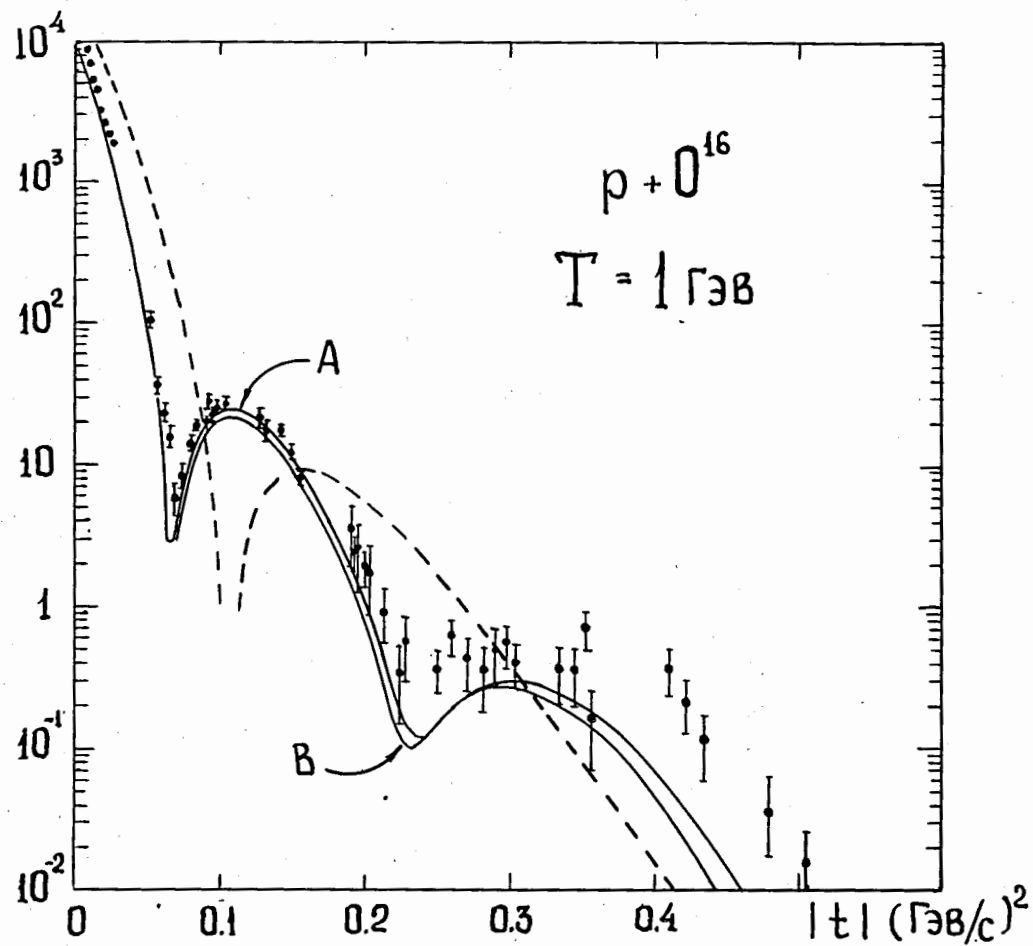


Рис.12. Сечение упругого рассеяния протонов на ядре кислорода (в единицах мб/стер.) /9,19/. Кривая А - расчет по теории Глаубера с антисимметризованной волновой функцией (43). В - соответствующая кривая для случая, когда плотность ρ выбирается в виде (37). Пунктиром показано сечение, вычисленное в импульсном приближении. t - четырехмерный передаваемый импульс.

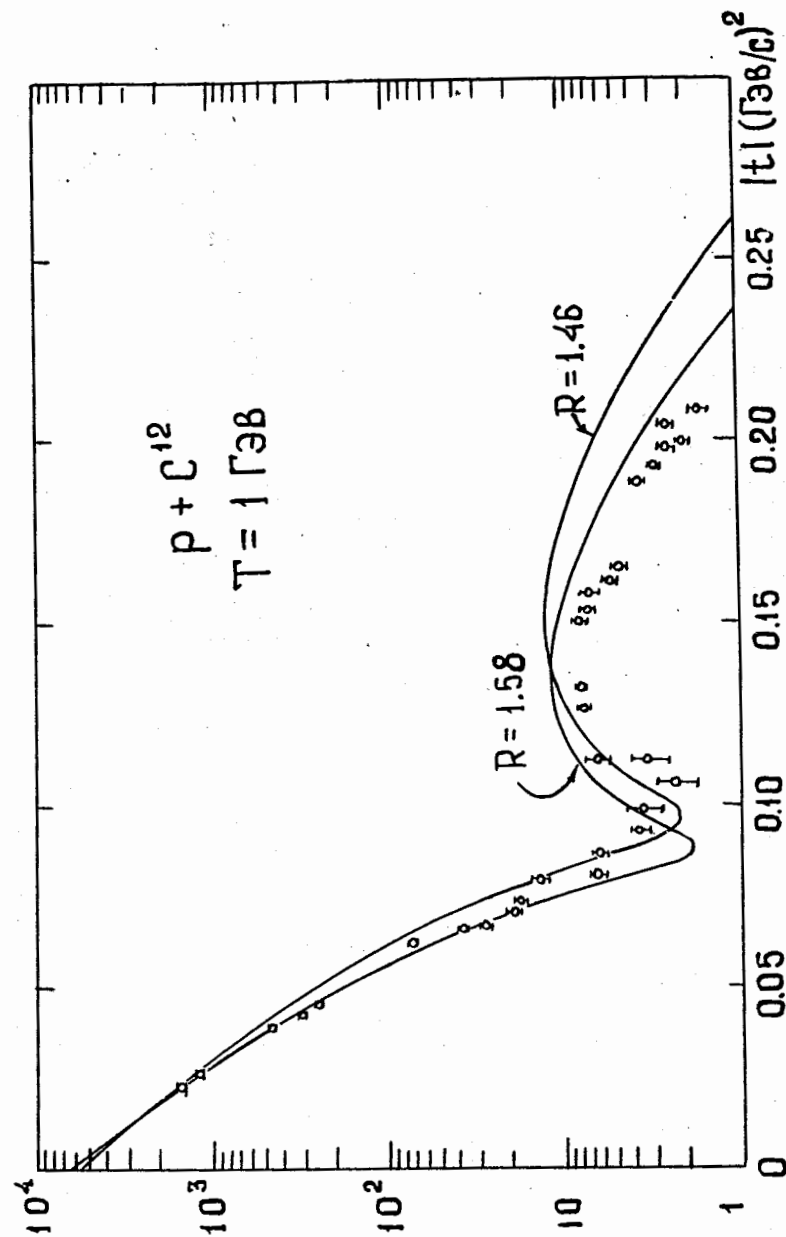


Рис.13. Сечение упругого рассеяния протонов на ядре углерода (в единицах мб/стер.) /9,19/. Кривые - расчет по теории Глаубера для двух значений ядерного радиуса R (с учетом антисимметризации нуклонов (43)).

По-видимому, расхождения обусловлены тем, что ядро ^{12}C сильно деформировано, поэтому использованные при расчетах выражения для плотности $\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ являются слишком грубыми.

В случае рассеяния электронов основной вклад дает импульсное приближение, когда сечение рассеяния выражается через плотности отдельных ядерных нуклонов. Эти плотности сферически симметричны, поэтому результаты расчетов слабо зависят от степени деформации ядра. При рассеянии нуклонов существенный вклад дает двукратное рассеяние, например, с переходом ядра в первое возбужденное состояние и последующим рассеянием в основное состояние; отклонения от сферичности в этом случае становятся весьма существенными и должны сильнее проявляться в области второго дифракционного максимума, где, как мы увидим ниже, основную роль играет двукратное рассеяние.

Расчеты, выполненные С.И. Дроздовым на основе приближенной модели черного эллипсоида /22/, показали, что увеличение деформации действительно сдвигает теоретическую кривую в нужную сторону.

Исследование упругого рассеяния в области второго дифракционного максимума может служить важным источником сведений о степени деформации ядер (подробнее см. об этом работу /19/).

6. Взаимодействие с тяжелыми ядрами

Что касается рассеяния на тяжелых ядрах, то амплитуду (39) в этом случае удобно представить в несколько ином виде.

Для простоты мы будем снова предполагать, что плотность $\rho(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_A)$ имеет вид (25), то есть факторизуется, и, кроме того, выражается через гауссовские экспоненты. Тогда с помощью преобразования Гартенхауза-Шварца соотношение (20) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2 / 4A} \int e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho \left\{ 1 - \prod_{k=1}^A \left[1 - \frac{\lambda}{2\pi i} \int e^{-i\vec{q}_k\vec{\rho}} \alpha(q_k) F(q_k) d^2q_k \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2 / 4A} \int e^{i\vec{q}\vec{\rho}} d^2\rho \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\lambda}{2\pi i} \int e^{-i\vec{\delta}\vec{\rho}} \alpha(\delta) F(\delta) d^2\delta \right]^A \right\}, \quad (46) \end{aligned}$$

где формфактор $F(\delta) = \int e^{i\vec{r}_k\vec{\delta}} \rho(\vec{r}_k) d^3r_k$,

а функции плотности $\rho(\vec{r}_k)$ удовлетворяют условию нормировки $\int \rho(\vec{r}_k) d^3r_k = 1$.

Заметим далее, что в ядрах с большим значением A функция плотности с ростом A изменяется приблизительно как $1/A$, что хорошо известно из опытов с рассеянием электронов. Определив функцию

$$\eta(\rho) = \frac{\lambda A}{2\pi} \int e^{-i\vec{\delta}\vec{\rho}} \alpha(\delta) F(\delta) d^2\delta, \quad (47)$$

выражение в квадратных скобках формулы (46)

$$\left[1 + \frac{i\eta}{A} \right]^A = \sum_{k=0}^A \left(\frac{A-k+1}{A} \frac{A-k+2}{A} \dots \frac{A-1}{A} \right) \frac{(i\eta)^k}{k!} \quad (48)$$

можно приближенно заменить бесконечным рядом - разложением экспоненты

$$e^{i\eta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\eta)^k}{k!} \quad (49)$$

Выражение для ядерной амплитуды рассеяния при этом принимает удобный для вычислений вид:

$$\alpha(q) = \frac{i}{2\pi\lambda} e^{q^2 R^2 / 4A} \int e^{i\vec{q}\vec{\rho}} \{ 1 - e^{i\eta(\rho)} \} d^2\rho. \quad (50)$$

7. Применение теории Глаубера к взаимодействию двух ядер

Теорию Глаубера можно обобщить и на случай взаимодействий двух ядер. Исходные соотношения теории (16) и (17) будут иметь в этом случае вид

$$\delta Q_{\text{пад.}} = \frac{i}{2\pi\lambda} \int e^{i\bar{q}\bar{\rho}} \Phi_k^{(A)}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) \Phi_k^{(B)}(\bar{r}_{A+1}, \dots, \bar{r}_{A+B}) \times$$

$$\times \Gamma(\bar{\rho}, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{A+B}) \Phi_N^{(A)}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A) \Phi_N^{(B)}(\bar{r}_{A+1}, \dots, \bar{r}_{A+B}) \prod_{i=1}^{A+B} d^3 r_i d^2 \rho, \quad (51)$$

$$\Gamma(\bar{\rho}, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_{A+B}) = 1 - \prod_{i=1}^A \prod_{j=1}^B \{1 - \Gamma_{ij}(\bar{\rho} - \bar{s}_i^{(A)} - \bar{s}_j^{(B)})\}, \quad (52)$$

где функция Γ_{ij} с помощью соотношения (12) выражается через амплитуду N-N рассеяния $A_N(q)$.

Очевидным образом обобщаются и все последующие соотношения. В частности, если для ядерных плотностей $\rho^{(A)}(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_A)$ и $\rho^{(B)}(\bar{r}_{A+1}, \dots, \bar{r}_B)$ использовать факторизующиеся выражения, зависящие от гауссовских экспонент, то ядерная амплитуда освобождается от δ -функций, и перед интегралом появляется фактор

$$e^{-\frac{q^2 R_A^2}{4A}} e^{-\frac{q^2 R_B^2}{4B}}, \quad (53)$$

где A и B - массовые числа сталкивающихся ядер.

Применение теории Глаубера к простейшему случаю взаимодействия двух ядер - к взаимодействию дейтон+ядро - рассматривалось в работах /23-25/.

Если теперь снова перейти к случаю рассеяния N + ядро, то одна из экспонент в (53) исчезает, а в выражении для ядерной амплитуды автоматически появляется формфактор нуклона.

8. Переход к оптическому приближению

В заключение этого раздела полезно более подробно рассмотреть, каким образом в теории Глаубера возникает обычная оптическая дифракционная картина.

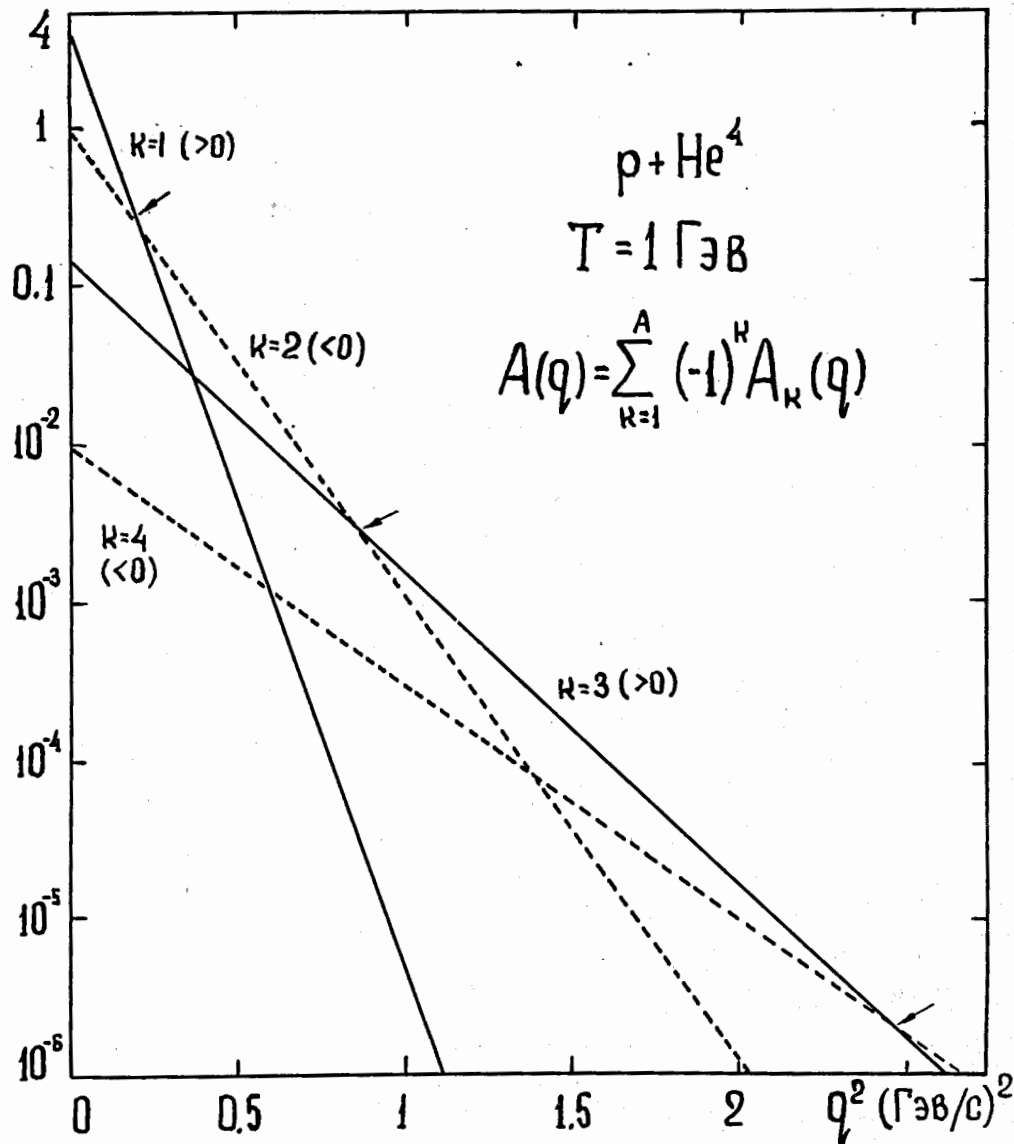


Рис.14. Вклад в амплитуду упругого рассеяния протонов на гелии при $T=1$ Гэв членов, обусловленных k -внутриядерными столкновениями (в относительных единицах) /14/. Расчеты выполнены по формуле (28), где для простоты положено $a=0$. Стрелки отмечают точки, в которых ядерная амплитуда имеет минимумы вследствие того, что два члена, дающие наибольший вклад, компенсируют друг друга.

На рис. 14, на примере ядра ${}^4\text{He}$, показан вклад в амплитуду рассеяния от членов, обусловленных одним, двумя, тремя и т.д. внутриядерными столкновениями. В полулогарифмическом масштабе кривые, соответствующие гауссовским экспонентам, приобретают вид наклонных прямых. Суммируя эти кривые, мы видим, что первый, основной пик в угловом распределении рассеянных частиц практически целиком обусловлен однократными взаимодействиями внутри ядра. Взаимное гашение амплитуд, происходящих от одно- и двукратных столкновений, приводит к минимуму в сечении вблизи $q^2 = 0,2$ (Гэв/с) 2 . Для несколько больших значений q^2 , в области второго дифракционного максимума, угловое распределение почти целиком определяется процессами двукратного рассеяния. Взаимная компенсация амплитуд A_2 и A_3 дает минимум вблизи $q^2 = 0,8$ (Гэв/с) 2 и т.д.

Таким образом, дифракционная картина в теории Глаубера возникает в результате интерференции амплитуд, обусловленных различным числом внутриядерных столкновений. Это хорошо видно также из рис. 15.

При переходе к тяжелым ядрам мы получим обычное оптическое выражение для ядерной амплитуды, если в формуле (50) отбросим фактор $e^{-q^2 R^2/4A}$ (напомним, что A достаточно велико), а амплитуду $\bar{a}(\delta)$ будем рассматривать не зависящей от δ . (Последнее вполне оправдано, т.к. в тяжелых ядрах, радиус которых существенно превосходит радиус $N-N$ - взаимодействий, формфактор $F(\delta)$ имеет намного больший пик при $\delta = 0$, чем амплитуда $\bar{a}(\delta)$, значение которой при $\delta = 0$ можно вынести за знак интеграла в формуле (47)).

Так как формула (50) получена в предположении, что конечный ряд (48) можно заменить бесконечным разложением (49), то отклонение величины отношения соответствующих коэффициентов в (48) и (49)

$$\Delta(A, k) = \frac{A - k + 1}{A} \frac{A - k + 2}{A} \dots \frac{A - 1}{A}$$

от единицы является характеристикой того, насколько различаются теория многократного дифракционного рассеяния Глаубера и оптическая теория.

Из рис. 16 видно, что отношение $\Delta(A, k)$ при $k = 1, 2$ для всех ядер близко к единице. Это объясняет, почему первый дифракционный

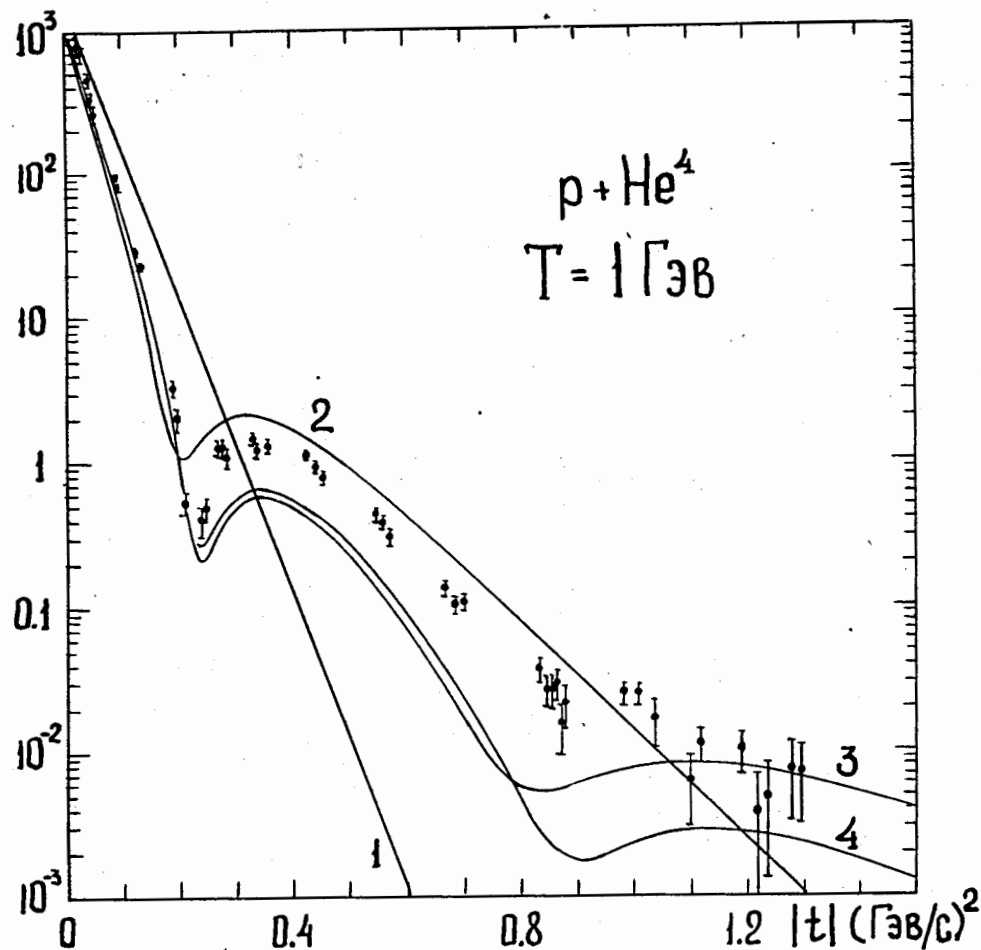


Рис.15. Цифрами 1,2,3,4 отмечены сечения рассеяния, вычисленные с учетом соответственно одного, двух, трех и четырех членов в амплитуде рассеяния:

$$\bar{a} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \bar{a}_k, \quad n=1,2,3,4.$$

Расчеты выполнены с учетом реальной части амплитуды $N-N$ рассеяния a /19/.

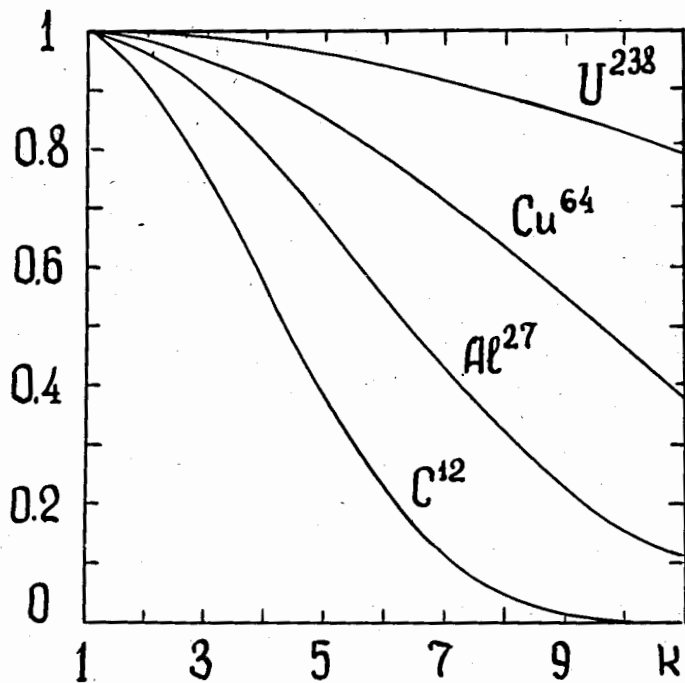


Рис.16. Относительная величина коэффициентов в разложениях (48) и (49) в зависимости от массового числа ядра-мишени и номера члена разложения k .

максимум при небольших углах рассеяния во всех случаях хорошо аппроксимируется оптической теорией. При больших значениях k отношение $\Delta(A, k)$ близко к единице лишь для тяжелых ядер; только в этом случае оптическое приближение оказывается достаточно хорошим.

Л и т е р а т у р а

1. Л. Элтон. Размеры ядер, ИЛ, М., 1962.
2. П.Е. Ходгсон. Оптическая модель упругого рассеяния, Атомиздат, М., 1968.
3. Р.Е. Hodgson. *Ann. Rev. of Nucl. Sci.*, **17**, 1 (1967).
4. Н. Kamitsubo, Н. Ohnuma, К. Ano, А. Uchida, М. Shinohara, М. Imaizumi, S. Kobayashi, М. Sekiguchi. *Phys. Letters* **9**, 332 (1964).
5. К. Yagi, Н. Ejiri, М. Furukawa, Y. Ishizaki, М. Koike, К. Matsuda, Y. Nakajima, I. Ninaka, Y. Saji, E. Tanaka, G.R. Satchler. *Phys. Letters*, **10**, 186 (1964).
6. G. Gerstein, J. Niederer, К. Strauch. *Phys. Rev.*, **108**, 427 (1957).
7. И.К. Аверьянов, З.З. Пурцеладзе. *ЯФ*, **5**, 293 (1967).
8. Т.А. Fujii. *Phys. Rev.*, **113**, 695 (1959).
9. Н. Palevsky, J.L. Friedes, R.J. Sutter, G.W. Bennett, G.J. Igo, W.D. Simpson, G.C. Phillips, D.M. Corley, N.S. Wall, R.L. Stearns, B. Gottschalk. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 1200 (1967); **19**, 387 (1967).
10. Н.М. Macdonald. *Proc. London Math. Soc.*, **23**, Ser. **2**, 220 (1914).
11. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1948, том.1, стр. 171.
12. R.J. Glauber. Статья в сборнике *Lectures in Theoretical Physics*, Int. Publ. Inc, 1959, **1**, p. 315.
13. V. Franco, R.J. Glauber. *Phys. Rev.*, **142**, 1195 (1966).
14. R.J. Glauber. Multiple diffraction theory of high energy collisions, CERN report TH. 786 (1967).
15. V.S. Barashenkov. *Fortschritte d. Phys.*, **14**, 741 (1966).
16. В.С. Барашенков. Сечения взаимодействия элементарных частиц, Изд-во "Наука", М., 1966.

17. S. Gartenhaus, C. Schwartz. Phys. Rev., 108, 482 (1957).
18. W. Czyż, L. Leśniak. Phys. Rev., Lett., 24B, 227 (1967).
19. R.H. Bassel, C. Wilkin. High Energy proton scattering and the structure of light nuclei, Brookhaven National Laboratory report BNL 12430 (1967); Phys. Rev., 174, 1179 (1968).
20. V. Franco, E. Coleman. Phys. Rev. Lett., 17, 827 (1966).
21. J.L. Friedes. Proton-nuclei reactions at 1 GeV incident energy. Brookhaven National Laboratory report BNL 11890 (1967).
22. С.И. Дроздов. ЖЭТФ, 28, 732 (1955).
23. L. Zamick. Ann. of Phys., 21, 550 (1963).
24. M.L. Rustgi. Nucl. Phys., 59, 460 (1964).
25. M.L. Rustgi. Phys. Lett., 24B, 229 (1967).
26. R.F. Frosch, J.S. McCarthy, R.E. Rand, M.R. Yearian. Phys. Rev., 160, 874 (1967).
27. G. Alberi, L. Bertocchi, Glauber theory and π -N scattering in the CeV region". Intern. Centre for Theor. Phys. in Trieste, report 1C/68/98 (1968).
28. F. Bradamante, S. Conetti, G. Fidecaro, M. Fidecaro, M. Giorgi, A. Penzo, L. Piemontese, F. Sauli, P. Schiavon. " π -d coherent scattering at 895 MeV/c".
29. E.S. Abers, H. Burkhardt, V.L. Teplitz, C. Wilkin. Nuovo Cim., 42, 365 (1966).
30. L. Bertocchi, A. Capella. Nuovo Cim., 51A, 33 (1967).
31. R.C. Chase, E. Coleman, T.G. Rhoades, M. Fellingner, E. Gutman, R.C. Lamb, L.S. Schroeder. Proc. of the 14-th Intern. Conf. on High Energy Phys., Vienna, 1968.
32. G. Faldt, T.E.O. Ericson. Nucl. Phys., B8, 1 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел

31 января 1969 года.