

3-366

7/IV-69

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 4262



Л. Г. Заставенко

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ
В СТАЦИОНАРНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

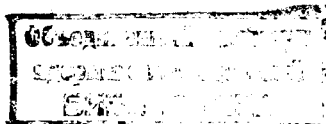
1969

P2 - 4262

Л.Г.Заставенко

ИЗМЕРЕНИЕ ВРЕМЕНИ
В СТАЦИОНАРНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

7766/2 чр.



§1. Введение

Целью настоящей работы является, имея стационарное решение некоторой квантовомеханической задачи, дать полную, насколько это возможно в квантовой механике, информацию о временном протекании определенного этим решением процесса.

Информацию о временном протекании процесса получают, сравнивая этот процесс с параллельно и независимо идущим эталонным процессом (часы); мы для достижения своей цели явно вводим "часы" в квантовомеханическое рассмотрение. Такое введение приборов, служащих для получения определенной информации, при желании извлечь эту информацию из решения квантовомеханической задачи — естественно для квантовой механики (как науки об измеримых величинах): оно использовано, в частности, в данном Гайзенбергом объяснении образования частицей прямолинейного трека в камере Вильсона (см., например ^{1/}, стр. 242), которое явилось отправной точкой нашего рассмотрения.

В §2 мы построим некий (тривиальный) математический аппарат для извлечения интересующей нас информации (то есть для измерения времени). В §3 построенный аппарат в качестве примера применен к анализу процесса упругого рассеяния через долгоживущее квазистабильное состояние: он позволяет "выделить" из общего потока рассеянных частиц частицы, задержавшиеся на квазистабильном уровне.

С более общей точки зрения можно сказать, что §3 содержит квантовомеханическое описание нестабильной частицы. В наше рассмотрение нестабильная частица входит так, как она проявляет себя в одном из опытов по ее обнаружению; неопределенные величины типа "волновой функ-

ции нестабильной частицы" не входят в наше рассмотрение, в отличие от нестационарных рассмотрений типа /2/ §16 или /3/.

§2. Измерение времени

2.1. В качестве процесса, в котором мы будем мерить время, возьмем процесс возбуждения двух атомов, расположенных в точках \vec{A}_1 и \vec{A}_2 , частицей с импульсом \vec{p} .

После исключения внутренних степеней свободы соответствующая задача сводится к отысканию решения уравнения Шредингера

$$[\hat{p}^2/(2m) - E_{n_1 n_2}] \Psi_{n_1 n_2} + \sum [V_{n_1 n_1}(\vec{x} - \vec{A}_1) \Psi_{n_1 n_2} + V_{n_2 n_2}(\vec{x} - \vec{A}_2) \Psi_{n_1 n_2}] = 0,$$

удовлетворяющего должным асимптотическим условиям (все функции $\Psi_{n_1 n_2}$, кроме Ψ_{00} , на большом расстоянии имеют вид расходящейся волны, асимптотика функции Ψ_{00} есть сумма плоской и расходящейся волн).

$$E_{n_1 n_2} = p^2/(2m) - \epsilon_{n_1} - \epsilon_{n_2},$$

ϵ_n - энергия n -го возбужденного состояния атома. Для наших целей можно считать потенциал V сколь угодно слабым, тогда искомое решение есть:

$$\Psi_{n_1 n_2}(\vec{x}) = \int K(\vec{x} - \vec{x}_1, E_{n_1 n_2}) [V_{n_1 0}(\vec{x}_1 - \vec{A}_1) K(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, E_{0 n_2}) V_{n_2 0}(\vec{x}_2 - \vec{A}_2) + V_{n_2 0}(\vec{x}_1 - \vec{A}_2) K(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, E_{n_1 0}) V_{n_1 0}(\vec{x}_2 - \vec{A}_1)] e^{i\vec{p}\vec{x}_2} dx_1 dx_2,$$

где

$$K(\vec{x}, E) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{a}\vec{x}} d^3a}{E - \frac{a^2}{2m} + i\epsilon}.$$

Везде далее мы, чтобы упростить формулы, будем опускать энергии связи ϵ_n . Число переходов в одну секунду с возбуждением n_1 и n_2 состояний атомов A_1 и A_2 определяется формулой

$$\frac{dN}{dt} = 2\pi \int |H'|^2 \delta\left(\frac{p'^2}{2m} + \epsilon_{n_1} + \epsilon_{n_2} - \frac{p^2}{2m}\right) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3}, \quad (2)$$

где матричный элемент H' получается из (1) заменой крайнего слева ядра K на $e^{-i\vec{p}'\vec{x}_1}$; соответственно порядку следования потенциалов $V(\vec{A}_1)$ и $V(\vec{A}_2)$ мы будем писать $H'(A_2 A_1)$ и $H'(A_1 A_2)$, так что

$$H' = H'(A_2 A_1) + H'(A_1 A_2), \quad (3)$$

точно так же

$$\Psi' = \Psi'(A_2 A_1) + \Psi'(A_1 A_2). \quad (3')$$

Известно, что при $p |\vec{A}_2 - \vec{A}_1| \rightarrow \infty$ относительный вклад интерференции двух членов из (1) в число переходов, определяемое функцией (1), стремится к нулю, так что в этом предельном случае два члена из (1) становятся ортогональными, то есть описывают взаимно исключающие процессы. Физически это соответствует тому, что в указанном предельном случае первый (второй) член в (1) описывает процесс, в котором сначала возбуждается атом A_1 (A_2), а потом A_2 (A_1 соответственно). Такая интерпретация разбиения (1) является точной при $p A_{21} = \infty$; для конечных значений $p A_{21}$ степень ее достоверности определяется упомянутым выше относительным вкладом интерференции двух членов (1) в число переходов $\frac{x/}{x/}$.

$x/$ На привычном языке: утверждение, что сначала возбуждается первый атом, а потом - второй, теряет смысл, когда расстояние между атомами становится того же порядка, что длина волны $1/p$ или размер атома.

Понятия "раньше" и "позже" в квантовой механике точного смысла не имеют.

Дальнейшее развитие этой хорошо известной интерпретации разбиения (1) и является предметом нашей работы: достигнутый прогресс состоит в том, что получены выражения, имеющие смысл матричных элементов процесса, например, возбуждения атомов A_1 и A_2 , при дополнительном условии, что между возбуждением атомов A_1 и A_2 прошло время, не меньшее данного.

2.2. Чтобы узнать, сколько времени проходит от возбуждения атома A_1 до возбуждения атома A_2 , мы введем в рассмотрение совершенно независимый от прежнего процесс возбуждения атомов, расположенных в точках \vec{B}_1 и \vec{B}_2 , частицей с импульсом \vec{k} . Соответствующую волновую функцию (см. (1)) обозначим ϕ ; подобно (3) будет

$$\phi' = \phi'(\vec{B}_1, \vec{B}_2) + \phi'(\vec{B}_2, \vec{B}_1).$$

Импульс \vec{k} мы возьмем настолько большим, чтобы присущая процессу B неопределенность времени была существенно меньше, чем для процесса A , массу частицы сорта B мы будем считать также большой, так чтобы $\vec{k} \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, $v_B = \frac{\vec{k}}{M} = \text{const}$.

Совокупность процессов, приводящих к возбуждению атомов A_1, A_2, B_1, B_2 , можно описать единым уравнением Шредингера

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\hat{k}^2}{2M} + V(\vec{x} - \vec{A}_1) + V(\vec{x} - \vec{A}_2) + U(\vec{y} - \vec{B}_1) + U(\vec{y} - \vec{B}_2) - E \right] \kappa(\vec{x}, \vec{y}) = 0,$$

в котором переменные двух процессов, естественно, разделяются, так что интересующая нас добавка к κ просто равна $\kappa' = \Psi' \phi'$. С другой стороны, можно получить представление κ' , пользуясь двухчастичной функцией Грина

$$K(\vec{x}, \vec{y}, E) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{e^{i(\vec{\alpha}\vec{x} + \vec{\beta}\vec{y})}}{E - \frac{\alpha^2}{2m} - \frac{\beta^2}{2M} + i\epsilon} d^3\alpha d^3\beta.$$

^{x/} Чтобы различать частицы, возбуждающие атомы A_1, A_2 и атомы B_1, B_2 (мы считаем эти частицы совершенно разными), мы будем называть их частицами сорта A или B соответственно.

Таким путем κ' представляется в виде суммы двадцати четырех членов вида

$$\int K(\vec{x} - \vec{x}_1, \vec{y} - \vec{y}_1) U(\vec{y}_1 - \vec{B}_2) K(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{y}_1 - \vec{y}_2) U(\vec{y}_2 - \vec{B}_1) K(\vec{x}_2 - \vec{x}_3, \vec{y}_2 - \vec{y}_3) \\ V(\vec{x}_3 - \vec{A}_2) K(\vec{x}_3 - \vec{x}_4, \vec{y}_3 - \vec{y}_4) V(\vec{x}_4 - \vec{A}_1) e^{i(\vec{\alpha}\vec{x}_4 + \vec{\beta}\vec{y}_4)} d^3x_1 d^3y_1 \dots d^3y_4$$

(см. (1)); сумма берется по всем перестановкам атомов A_1, A_2, B_1, B_2 .

2.3. Мы утверждаем, что каждому члену этого разложения соответствует такой временной порядок возбуждения атомов, в каком они записаны. Как и приведенная выше интерпретация разбиения (1), наше утверждение является точным только в пределе больших величин ρA_{21} и κB_{21} . Оно основано на том, что (в этом пределе) 1) относительный вклад интерференции между членами полученного разложения равен нулю, 2) число переходов, определяемое каждым членом разложения, совпадает с величинами, соответствующими нашей интерпретации.

2.4. Чтобы подсчитать эти величины, заметим, прежде всего, что матричный элемент $H'(A_2, A_1)$ дает $V_A (d\sigma_A / d\Omega) \sigma_A / A_{12}^2$ переходов в секунду; здесь σ_A / A_{12}^2 — телесный угол, под которым "виден" второй атом из первого.

От матричных элементов $A_2 B_2, B_1 A_1$ и $B_2 A_2, A_1 B_1$ при нашей интерпретации следует ожидать ^{x/}

$$V_A \frac{d\sigma_A}{d\Omega} \frac{\sigma_A}{A_{12}^2} V_B \frac{d\sigma_B}{d\Omega} \frac{\sigma_B}{B_{12}^2} \max [0, \pm(\tau_A - \tau_B)]$$

переходов в секунду соответственно; здесь $\tau_A = \frac{A_{21}}{V_A}$, $\tau_B = \frac{B_{21}}{V_B}$.

^{x/} Дадим вывод этой формулы. Исходной волне соответствует ансамбль, состоящий из пар частиц. Этот ансамбль можно мыслить как поток частиц сорта A с импульсом \vec{p} и поток частиц сорта B с импульсом \vec{k} в том же пространстве, причём каждая частица сорта A "скреплена ниточкой" с одной из частиц сорта B . Количественно поток характеризуется тем, что за время Δt через данную площадку 1 см^2 , нормальную к \vec{p} , проходят $V_A V_B \Delta t \Delta t$ частиц сорта A , таких, что их "партнеры" проходят другую заданную площадку той же площади, нормальную к \vec{k} , в течение времени от t до $t + dt$ с момента начала отсчёта интервала Δt (t — любое фиксированное число). Тогда за одну секунду произойдет $V_A V_B \frac{d\sigma_A}{d\Omega} \frac{\sigma_A}{A_{12}^2}$ случаев воз-

(см. продолжение сноски на следующей странице)

Для матричных элементов $A_2 V_2 A_1 V_1$ и $V_2 A_2 V_1 A_1$ аналогичная формула получается заменой фактора $\max[0, \pm(r_A - r_B)]$ на $\min[r_A, r_B]$. В приложении показано, что подсчёт числа переходов по формуле вида (2) действительно приводит к таким результатам. Матричные элементы $V_2 V_1 A_2 A_1$ дают бесконечное число переходов (ибо время между возбуждением атомов V_1 и A_2 может быть любым, и по этому времени следует просуммировать). Интерференция бесконечных матричных элементов между собой и с конечными оказывается конечной. В частности, для отношения вкладов в число переходов от интерференции матричных элементов $A_2 V_2 V_1 A_1$ (при $r_A > r_B$) и $A_2 V_2 A_1 V_1$ к вкладу от $A_2 V_2 V_1 A_1$ получается величина порядка

$$0(r / \min(A_{21}, B_{21})),$$

где r - размер атома (ср. с замечанием в сноске на стр. 5).

2.5. Только в случае малости этой величины предлагаемая нами интерпретация разбиения (3) имеет смысл.

Очевидно, в еще большей степени необходимым для пригодности нашей интерпретации условием является малость (при $r_A > r_B$) числа переходов от $V_2 A_2 A_1 V_1$ по сравнению с числом переходов от $A_2 V_2 V_1 A_1$.

Для конечных значений $r A_{21}$ число переходов от $V_2 A_2 A_1 V_1$ при $r_A > r_B$ отлично от нуля. Этот результат является бессмысленным с точки зрения нашей интерпретации и лишь свидетельствует об ее ограниченной пригодности.

буждения атомов A_1 и A_2 , таких, что частицы-партнеры пролетят через площадку 1 см^2 (которую мы выберем около атома V_1) за время T , начиная с момента возбуждения A_1 , т.е.

$$V_A V_B \frac{d\sigma_A}{d\Omega} \frac{\sigma_A}{A_{12}} \frac{d\sigma_B}{d\Omega} \frac{\sigma_B}{B_{12}} T$$

случаев возбуждения атомов A_1, A_2 , таких, что частицы-партнеры возбуждают оба атома V_1 и V_2 , причём V_1 - в течение времени T после A_1 . Теперь, если $r_A > r_B$ и $T > r_A - r_B$, то в части случаев V_2 будет возбуждаться после A_2 , что не соответствует нашей интерпретации матричного элемента $A_2 V_2 V_1 A_1$: отсюда получается фактор $\max[0, r_A - r_B]$.

§3. Рассеяние через квазистационарный уровень

Пусть теперь частицы сорта A рассеиваются на потенциале $W(\vec{x})$. Заменяем в формуле §2 двухчастичную свободную функцию распространения функцией

$$K_W(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}_1, \vec{y}_1, E) = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{\Psi_a^+(\vec{x}) \Psi_a^+(\vec{x}_1)^* e^{i\vec{\beta}(\vec{y}-\vec{y}_1)} d^3\alpha d^3\beta}{E - \frac{\alpha^2}{2m} - \frac{\beta^2}{2M} + i\epsilon}$$

а исходную плоскую волну решением $\Psi_p^+(\vec{x})$ задачи рассеяния на потенциале $W(\vec{x})$, который мы будем предполагать локализованным около точки $\vec{x} = 0$ и имеющим долгоживущий квазистационарный уровень.

После таких изменений формализм "измерения времени", построенный в §2, непосредственно переносится на рассматриваемый случай: и на этот раз различные матричные элементы вида (3) ортогональны друг другу (в том же смысле, что в §2) и дают число переходов, соответствующее нашей интерпретации. Мы не будем здесь проводить всех громоздких выкладок и ограничимся лишь подсчётом числа переходов от матричного элемента $A_2 V_2 V_1 A_1$ в наиболее интересном случае, когда

$\Psi_p^+(\vec{x})$ в дальнейшем понадобятся следующие свойства функции $\Psi_p^+(\vec{x})$:

$$\Psi_p^+(\vec{x}) = e^{i\vec{p}\vec{x}} + f(\theta) e^{i\vec{p}\vec{r}} / r,$$

$$f(\theta) = \sum_{\ell} \frac{e^{2i\delta_{\ell}(p)} - 1}{2ip} (2\ell + 1) P_{\ell}(\cos \theta),$$

$$e^{2i\delta_{\ell}(p)} = e^{-2i\delta_{\ell}(-p)}$$

энергия налетающих частиц близка к резонансной и время, затрачиваемое частицей A с импульсом p на прохождение расстояния от A_1 до рассеивающего центра и от рассеивающего центра до A_2 , меньше, чем время, необходимое частице B с импульсом k , чтобы пройти расстояние B_{21}

$$\frac{A_1 + A_2}{U_A} < \frac{B_{21}}{U_B} \quad (5)$$

При таком соотношении параметров число переходов, определяемое рассматриваемым матричным элементом, с точностью до величины, оговоренной в конце §2, определяется частицами, задержавшимися на метастабильном уровне. Имеем

$$A_2 B_2 B_1 A_1 = \frac{2M}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 y_1 d^3 y_2 2\pi^2}{y_{21}} \Psi_a^+(\vec{x}_2)^* \int d^3 \alpha$$

$$V(\vec{x}_2 - \vec{A}_2) \Psi_a^+(\vec{x}_2) \Psi_a^+(\vec{x}_1)^* V(\vec{x}_1 - \vec{A}_1) \Psi_p^+(\vec{x}_1)$$

$$\times \frac{e^{-i\vec{h}\vec{y}_2} U(\vec{y}_2 - \vec{B}_2) e^{i\beta y_{21}} U(\vec{y}_1 - \vec{B}_1) e^{i\vec{k}\vec{y}_1}}{\left(\frac{\alpha^2 - p^2}{2m} + \frac{\hbar^2 - k^2}{2M} - i\epsilon\right) \left(\frac{\alpha^2 - p^2}{2m} - i\epsilon\right)}$$

Здесь

$$\beta = k + \frac{p^2 - \alpha^2}{2m V_B}$$

Подставив сюда

$$\int d\Omega(\alpha) \Psi_a^+(\vec{x}_2) \Psi_a^+(\vec{x}_1)^* = -\pi \sum_{\ell} \frac{(2\ell+1) P_{\ell} \left(-\frac{\vec{x}_1 \vec{x}_2}{x_1 x_2}\right)}{\alpha^2 A_2 A_1} \left[e^{i\alpha(x_1 + x_2) + 2i\delta_{\ell}(\alpha)} + k.c. - (-)^{\ell} \left(e^{i\alpha(x_1 - x_2)} + k.c. \right) \right]$$

и заменив $\Psi_p^+(\vec{x}_1)$, $\Psi_q^+(\vec{x}_2)$ плоскими волнами (поскольку расстояние от рассеивающего центра до атомов A_1 и A_2 считается большим), представим матричный элемент в виде:

$$A_2 B_2 B_1 A_1 \approx -\frac{M}{16\pi^3} \int \frac{d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 y_1 d^3 y_2}{B_{21} A_2 A_1} (2\ell+1) P_{\ell} \left(-\frac{\vec{A}_1 \vec{A}_2}{A_1 A_2}\right) \int d\alpha \left\{ e^{i\alpha(x_1 + x_2) + 2i\delta_{\ell}(\alpha)} - e^{i\alpha(x_1 - x_2)} \right\} Z e^{i y_{21} \beta} \frac{1}{\left(\frac{\alpha^2 - q^2}{2m} - i\epsilon\right) \left(\frac{\alpha^2 - p^2}{2m} - i\epsilon\right)}$$

Здесь

$$Z = e^{-i\vec{h}\vec{y}_2} U(\vec{y}_2 - \vec{B}_2) U(\vec{y}_1 - \vec{B}_1) e^{i\vec{k}\vec{y}_1}$$

$$e^{-i\vec{q}\vec{x}_2} V(\vec{x}_2 - \vec{A}_2) V(\vec{x}_1 - \vec{A}_1) e^{i\vec{p}\vec{x}_1}$$

Из всей суммы по ℓ мы оставили только один член - тот, для которого функция $\exp[2i\delta_{\ell}(\alpha)]$ имеет близкий к вещественной ось полюс, ибо только этот член существенен для дальнейшего. Для перво-

го члена в фигурных скобках седловая точка (ср. аналогичные выкладки в приложении) есть $a_0 = m v_B \frac{x_1 + x_2}{y_{21}}$.

Согласно (5) $a_0 < p$, так что (при $h = k$), чтобы деформировать контур интеграции по a в кривую стационарной фазы, надо пересечь полюс $a = p_\ell$ функции $\exp[2i\delta_\ell(a)]$. (напомним, что он лежит в нижней полуплоскости и $p = p_\ell$). Второй член в фигурных скобках не имеет полюса при $a = p_\ell$, а его седловая точка - еще ближе к началу, он целиком определяется вкладом кривой стационарной фазы. Итак, вклад полюса $a = p_\ell$ в наш матричный элемент равен:

$$-\frac{M^2}{16\pi^3} \int dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 Z \frac{2\ell+1}{B_{21} A_1 A_2} p_\ell \left(-\frac{x_1 x_2}{x_1 x_2}\right) (-2\pi i) C \quad (6)$$

$$\exp\{i(x_1 + x_2)p_\ell + iy_{21}(k + \frac{p^2 - p_\ell^2}{2mv_B})\} \frac{2m}{p_\ell^2 - q^2} \frac{2m}{p_\ell^2 - p^2}.$$

Здесь C - вычет функции $\exp[2i\delta_\ell(a)]$ при $a = p_\ell$. Нетрудно заметить, что $|\exp\{\dots\}|$ может быть представлен в виде:

$$|\exp\{\dots\}| = e^{-\lambda t/2},$$

где

$$\lambda = -\text{Im} \frac{p_\ell^2}{2m} - \text{константа распада, а}$$

$$t = \frac{B_{12}}{v_B} - \frac{A_1 + A_2}{v_A}$$

наименьшее время, проведенное частицей на метастабильном уровне.

Полученный матричный элемент дает следующее число переходов в единицу времени:

$$v_A \frac{d\sigma_{A_1}}{d\Omega} \frac{\sigma}{A_1^2} \frac{\sigma_{A_2}}{A_2^2} \frac{2\ell+1}{4\pi} p_\ell^2 \left(-\frac{x_1 x_2}{x_1 x_2}\right) \quad (7)$$

$$\lambda^{-1} e^{-\lambda t} v_B \frac{d\sigma_{B_1}}{d\Omega} \frac{\sigma_{B_2}}{B^2}.$$

Здесь введено обозначение

$$\sigma_{\text{неупр.}} = 4\pi(2\ell+1) \frac{|c|^2}{(p^2 - \text{Re} p_\ell^2)^2 + (\text{Im} p_\ell^2)^2}.$$

Сравним (7) с формулой для числа переходов, которое следует ожидать при нашей интерпретации (она находится методом, описанным в §2). Оказывается, что обе формулы совпадают, если считать, что величина $\sigma_{\text{неупр.}}$ имеет смысл полного сечения рождения нестабильной частицы $^{1/2}$.

Отметим также, что (6) дает обычный $^{1/2}$ спектр запоздавшего излучения

$$= (\cdot q^2 - p_\ell^2)^{-2}.$$

Мы не учли вклада и числа переходов от седловых точек. Однако этот вклад имеет тот же порядок величины (и то же происхождение), что и второй член формулы (3.П) в приложении; учитывать его - значит выйти за пределы точности, которую дает ваш метод $^{x/}$ (см. также конец §2).

З а к л ю ч е н и е

Итак, стационарной квантовой механики достаточно для описания процессов, существенно зависящих от времени. Поскольку стационарная кван-

$^{x/}$ Формальный учёт вклада седловых точек дает "неэкспоненциальный распад" $^{1/4}$.

товая механика тесно связана с нестационарной, естественно ожидать, что результаты описания зависящих от времени процессов методами стационарной и нестационарной квантовой механики не могут быть взаимно противоречивы. Поскольку, однако, эти методы весьма различны, возможно, представляет интерес дать доказательство этого утверждения.

В заключение автор хотел бы поблагодарить проф. Я.А.Сморodinского, совместно с которым выработана основная идея настоящей статьи, и проф. М.А.Маркова за постоянный интерес к работе; он благодарен также Б.Н.Валуеву и М.И.Широкову за обсуждение.

Приложение

Мы ограничимся подсчётом числа переходов от матричных элементов $A_2 B_2 B_1 A_1$ и $B_2 A_2 B_1 A_1$ и их интерференции. Тривиальными преобразованиями получаем

$$A_2 B_2 B_1 A_1 = \frac{M}{16 \pi^3 i} \int \frac{d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 y_1 d^3 y_2}{x_{21} y_{21}} e^{-i \vec{q} \cdot \vec{x}_2} V(\vec{x}_2 - \vec{A}_2) V(\vec{x}_1 - \vec{A}_1) e^{i \vec{p} \cdot \vec{x}_1} \quad (1.П)$$

$$e^{-i \vec{l} \cdot \vec{y}_1} U(\vec{y}_2 - \vec{B}_2) U(\vec{y}_1 - \vec{B}_1) e^{i \vec{k} \cdot \vec{y}_1} J.$$

Здесь

$$J = \int \frac{a da \exp [i a x_{21} + i y_{21} \sqrt{k^2 + \frac{M}{m} (p^2 - a^2 + i \epsilon)}]}{(\frac{a^2 - p^2}{2m} + \frac{l^2 - k^2}{2M} - i \epsilon) (\frac{a^2 - p^2}{2m} - i \epsilon)}$$

В пределе $k \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty, V_B = \text{const}$

$$J = \int \frac{a da \exp [i p x_{21} + i k y_{21} + i \Psi(a)]}{(\frac{a^2 - q^2}{2m} - i \epsilon) (\frac{a^2 - p^2}{2m} - i \epsilon)}$$

Функция $\Psi(a)$ есть

$$\Psi(a) = (a-p)x_{21} - y_{21} \frac{a^2 - p^2}{2m v_B}, \quad (2.П)$$

она имеет седловую точку при $a = a_0 = m v_B x_{21} / y_{21}$. Величина интеграла J существенным образом зависит от расположения a_0 относительно полюсов $a_p = p$ и $a_q = q$. Если $r_A > r_B$, то $a_0 > a_p$; в зависимости от величины q при этом может быть либо $a_q < a_0$, либо $a_q > a_0$. В первом случае, чтобы деформировать контур интегрирования в контур стационарной фазы функции $\exp[i\Psi(a)]$, который проходит через точку a_0 , надо пересечь два полюса, a_q и a_p , это дает

$$J = \pi i (2m)^3 \left\{ \frac{\exp[i\Psi(q)] - \exp[i\Psi(p)]}{q^2 - p^2} + \sqrt{\frac{2\pi}{i\Psi''(a_0)}} \frac{a_0 \exp[i\Psi(a_0)]}{(a_0^2 - p^2)(a_0^2 - q^2)} \right\} e^{i(p x_{21} + k y_{21})} = J_1 + J_2. \quad (3.П)$$

Первый член правой части (3.П), J_1 , как функция q , имеет при $q = p$ максимум, ширина которого определяется условием

$$\frac{p^2 - q^2}{2m} (r_A - r_B) = 1$$

(соотношение неопределенности для энергии и времени). Если расстояния x_{21} и y_{21} и времена r_A, r_B пропорционально и неограниченно возрастают, то ширина максимума стремится к нулю; можно показать, что при этом

$$|J_1|^2 \approx (2m)^4 2\pi^3 \delta(\ell^2 - k^2) \frac{r_A - r_B}{m} \quad (4.П)$$

Теперь рассмотрим второй член правой части (3.П) - вклад от точки перевала. Так как

$$\frac{x_{21}^m}{\alpha_0} = \frac{y_{21}}{v_B},$$

то этот член обязан своим происхождением парам частиц А и В, пролетающих расстояния A_{12} и B_{21} соответственно, за одинаковое время (такие частицы возникают в связи с перераспределением энергии при измерении времени; перераспределение энергии не изменяет скорости частицы В, так как энергия ее $Mv_B^2/2$ очень велика).

Вклад второго члена (3.П) в (4.П) в рассматриваемом предельном случае исчезает; для конечных значений $r_A - r_B$ отношение J_2/J_1 имеет при $q = p$ порядок величины

$$\frac{1}{(px_{21})^{3/2} v_A} \left(\frac{r_A}{r_B} \right)^{3/2} (1 - (r_A/r_B)^2)^2 / (1 - r_B/r_A).$$

С ростом q от значения $q = p$ величина $|J_2/J_1|$ возрастает, но не неограниченно (при $q \rightarrow \alpha_0$), как это показывает (3.П), а до величины порядка единицы (формулу (3.П) при $q \approx \alpha_0$ следует заменить более точной). С дальнейшим ростом q ($q > \alpha_0$) полюс α_q в (1.П) оказывается правее кривой стационарной фазы С и не пересекается кривой интеграции в процессе ее совмещения с С.

В связи с этим отношение J_2/J_1 с ростом q от $q = \alpha_0$ быстро становится очень малым. Вернемся к матричному элементу (1.П). Подставим в J

$$\begin{aligned} x_{21} &= A_{21} + \{ \vec{x}_2 - \vec{A}_2 - (\vec{x}_1 - \vec{A}_1) \} \vec{A}_{21} / A_{21}, \\ y_{21} &= B_{21} + \{ \vec{y}_2 - \vec{B}_2 - (\vec{y}_1 - \vec{B}_1) \} \vec{B}_{21} / B_{21} \end{aligned}$$

$$\text{и в } \Psi(\alpha) \rightarrow x_{21} = A_{21}, y_{21} = B_{21},$$

тогда

$$\begin{aligned} A_2 B_2 B_1 A_1 &= \frac{M}{16\pi^3 i A_{12} B_{12}} \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 y_1 d^3 y_2 \\ & e^{-i\vec{q}(\vec{x}_2 - \vec{A}_2)} e^{i\vec{p}(\vec{x}_2 - \vec{A}_2)} e^{i\vec{p}'(\vec{x}_2 - \vec{A}_2)} \\ & e^{-i\vec{p}'(\vec{x}_1 - \vec{A}_1)} e^{i\vec{p}(\vec{x}_1 - \vec{A}_1)} e^{i\vec{p}\vec{A}_1 - i\vec{q}\vec{A}_2} \\ & e^{-i\vec{\ell}(\vec{y}_2 - \vec{B}_2)} e^{i\vec{k}(\vec{y}_2 - \vec{B}_2)} \\ & e^{-i\vec{k}(\vec{y}_1 - \vec{B}_1)} e^{i\vec{k}(\vec{y}_1 - \vec{B}_1)} e^{i\vec{k}\vec{B}_1 - i\vec{\ell}\vec{B}_2} \end{aligned} J'$$

Здесь J' отличается от J заменой $x_{21} \rightarrow A_{21}, y_{21} \rightarrow B_{21}$ и не зависит от переменных $\vec{x}_2, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_1$, по которым производится интеграция; $\vec{p}' = p \vec{A}_{21} / A_{21}, \vec{k}' = k \vec{B}_{21} / B_{21}$. Подставив полученное выражение матричного элемента в формулу числа переходов

$$\frac{dN}{dt} = 2\pi \int |H'|^2 \delta \left(\frac{p^2 - q^2}{2m} + \frac{k^2 - \ell^2}{2M} \right) \frac{d^3 q d^3 \ell}{(2\pi)^6},$$

с учётом (4.П) получаем (4). Формула для $A_2 B_2 A_1 B_1$ выводится аналогично. Остановимся подробнее на интерференции АВВА и АВАВ. Последний матричный элемент получается из АВВА, в частности, заменой J_1 в формулах (1.П), (5.П) на

$$J_1' = e^{i(px + ky)} \frac{1 - e^{iy \frac{p^2 - k^2}{2m\nu B}}}{q^2 - p^2}$$

(при $r_B < r_A$). Далее следует вычислить интеграл

$$K = \int d^3 q d^3 \ell \delta\left(\frac{p^2 - q^2}{2m} + \frac{k^2 - \ell^2}{2M}\right) J_1'^* J_1 =$$

$$= \int_0^\infty f(q) dq \frac{(1 - e^{iy \frac{q^2 - p^2}{2m\nu B}})}{q^2 - p^2} \frac{e^{ix(q-p) - iy \frac{q^2 - p^2}{2m\nu B}}}{q^2 - p^2} - 1$$

В интересующем нас случае $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ величина этого интеграла определяется малой окрестностью точки $q = p$; в этой окрестности $q^2 - p^2 \approx 2p(q-p)$, так что

$$K = f(p) \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{1 - e^{iys \frac{\nu_A}{\nu_B}}}{2\nu s} \frac{e^{i(x-y) \frac{\nu_A}{\nu_B} s}}{2\nu s} - 1 + Q$$

Так как интеграл исчезает, то величина K определяется фактором Q более высокого порядка малости.

Л и т е р а т у р а

1. Л.Шифф. Квантовая механика. ИЛ, Москва, 1957.
2. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ, Москва, 1956.
3. Н.С.Крылов, В.А.Фок. ЖЭТФ, 17, 93 (1947).
4. Л.А.Халфин. ЖЭТФ, 33, 1371 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел

9 января 1969 года.