Nucl. Phys, 1969, v. B11, 11/II-69
N1, p. 127-130

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4209

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Нгуен Тхи Хонг

# О ДИСПЕРСИОННОМ СООТНОШЕНИИ И ДИСПЕРСИОННЫХ ПРАВИЛАХ СУММ ДЛЯ ФОРМФАКТОРА $\pi$ - МЕЗОНА

1968

Нгуен Тхи Хонг

# О ДИСПЕРСИОННОМ СООТНОШЕНИИ И ДИСПЕРСИОННЫХ ПРАВИЛАХ СУММ ДЛЯ ФОРМФАКТОРА $\pi$ - МЕЗОНА

Направлено в Nuclear Physics

В последнее время весьма широко обсуждается возможность применения дисперсионных правил сумм к анализу экспериментальных данных о сечениях процессов сильных взаимодействий /1-3/. Для формфактора $\pi$ -мезона в работе /4/ впервые было получено правило сумм:

$$\int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln|F(t)|}{t\sqrt{t-4m_\pi^2}}\,dt \geq 0\,, \qquad (1)$$

которое содержит только модуль формфактора в физической области процесса:

$$e^+ + e^- \to \pi^+ + \pi^- \qquad (\mathrm{I})\,,$$

и поэтому может быть проверено опытом. В настоящей работе мы установим некоторые новые правила сумм для $F(t)$, содержащие только значения его модуля в физических областях процесса (I) и процесса рассеяния

$$e^- + \pi^\pm \to e^- + \pi^\pm\,. \qquad (\mathrm{II})$$

Обсудим также возможность экспериментальной проверки дисперсионного соотношения для формфактора.

Предположим, что $F(t)$ аналитичен в комплексной плоскости $t$ с разрезом от $t=4m_\pi^2$ до $+\infty$, и обозначим $t_0$ некоторое положительное число. Посредством отображения

$$\zeta = \frac{\sqrt{1+t/t_0} - \sqrt{1-t/4m_\pi^2}}{\sqrt{1+t/t_0} + \sqrt{1-t/4m_\pi^2}} \qquad (2)$$

мы преобразуем плоскость в единичный круг и положим $F(t) = f(\xi)$.
Так как функция $f(\xi)$ аналитична в круге $|\xi| \le 1$, и $f(0)=F(0)=1$, то из теоремы Иесена [5] следует, что

$$\int_0^{2\pi} \ln |f(e^{i\phi})| \, d\phi \ge 0 .$$

Возвращаясь к старой переменной $t$, мы получим правило сумм

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\ln |F(-t)| \, dt}{t\sqrt{(t+4m_\pi^2)(t-t_0)}} + \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln |F(t)| \, dt}{t\sqrt{(t-4m_\pi^2)(t+t_0)}} \ge 0. \quad (3)$$

Если в области $t \le 0$ формфактор $F(t)$ меньше единицы, как это имеет место для протона, то первый интеграл в (3) заведомо отрицателен. Поэтому по сравнению с правилом сумм (1) соотношение (3) накладывает более жесткие ограничения на поведение $|F(t)|$ при $t \ge 4m_\pi^2$. Отметим, что мы не делаем никаких предположений относительно поведения $F(t)$ при $t \to \infty$. В локальной теории поля интегралы в (3) абсолютно сходятся [6,7].

Другое правило сумм получается как следствие теоремы Карлемана [5]. Посредством отображений

$$\eta(t, t_0) = \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{t+t_0}{4m_\pi^2 + t_0}}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{t+t_0}{4m_\pi^2 + t_0}}}, \quad w = \sqrt{\eta(t, t_0)} . \quad (4)$$

с некоторым $t_0 \ge 0$ мы преобразуем плоскость $t$ в правый единичный полукруг, причем разрез $t \ge 4m_\pi^2$ превращается в правую единичную полуокружность, а интервал $t < -t_0$ превращается в сегмент $[-i, i]$ на мнимой оси. Положим $F(t) = g(w)$. В силу теоремы Карлемана

$$\int_0^{\pi/2} \ln |g(e^{i\phi})| \cos\phi \, d\phi + \int_0^1 \ln |g(ix)| \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx \geqslant 0 .$$

Возвращаясь к старой переменной $t$, мы получим

$$\frac{4m_\pi^2 + t_0}{2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\ln|F(t)|\,dt}{(t-4m_\pi^2)^{1/2}(t+t_0)^{3/2}} + \int_{t_0}^{\infty} \ln|F(-t)|\,\phi(t,t_0)\,dt \geq 0, \qquad (5)$$

где

$$\phi(t,t_0) = \left[\frac{1}{\eta(t,t_0)} - 1\right] \frac{1}{2\sqrt{\eta(t,t_0)}} \frac{d\eta(t,t_0)}{dt}. \qquad (6)$$

Теорема Карлемана была применена в работе /8/. Однако соответствующее правило сумм в этой работе содержит вклад от ненаблюдаемой области $0 \leq t \leq 4m_\pi^2$, и поэтому его нельзя проверить опытом.

Рассмотрим теперь возможность экспериментальной проверки дисперсионного соотношения для $F(t)$. Ради простоты предположим, что $F(t)$ ограничен и поэтому удовлетворяет дисперсионному соотношению с одним вычитанием:

$$F(t) = 1 + \frac{t}{\pi} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} F(t')}{t'(t'-t)}\,dt'. \qquad (7)$$

Наши рассуждения легко обобщить на случай дисперсионного соотношения с произвольным числом вычитаний

При $t \leq 0$ положим:

$$x = -t/4m_\pi^2, \qquad \frac{F(t)-1}{t} = G(x), \qquad (8)$$

а при $t' \geq 0$

$$y = t'/4m_\pi^2, \quad \frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{Im} F(t')}{t'} = H(y). \qquad (9)$$

Тогда дисперсионное соотношение (7) может быть написано в виде интегрального уравнения Стильтеса:

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{H(y)}{x+y}\, dy, \tag{10}$$

причем искомая функция должна удовлетворять условию

$$H(y) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \le y \le 1. \tag{11}$$

Так как $F(t)$ ограничен, согласно предположению, то $H(y)$ квадратично интегрируема в интервале $[0, \infty]$ и для уравнения (10) существует решение /9/

$$H(x) = \frac{1}{\pi} \sin \pi \left(-x \frac{d}{dx}\right) G(x) =$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\pi x \frac{d}{dx}\right)^{2n}}{2n!} [\sqrt{x}\, G(x)]. \tag{12}$$

Таким образом, имеет место правило сумм

$$\sin \pi \left(-t \frac{d}{dt}\right) \left(\frac{F(t)-1}{t}\right) = 0, \quad -4m_\pi^2 \le t \le 0, \tag{13}$$

а при $t \ge 4m_\pi^2$ мы можем определить $\mathrm{Im}\, F(t)$ посредством формулы

$$\mathrm{Im}\, F(t) = t \sin \pi \left(-t \frac{d}{dt}\right) \left[\frac{1-F(-t)}{t}\right]. \tag{14}$$

Зная $\mathrm{Im}\, F(t)$, мы можем найти $\mathrm{Re}\, F(t)$ при $t \ge 4m_\pi^2$, и, следовательно, $|F(t)|$. С другой стороны, $|F(t)|$ при $t \ge 4m_\pi^2$ можно определить непосредственно из данных по полным сечениям процесса (I). Сравнение этих результатов позволяет проверить дисперсионное соотношение для $F(t)$.

Соотношения (13) и (14) содержат производные всех порядков от $F(t)$ при $t \leq 0$. Поэтому применение этих соотношений затруднительно. Вместо решения в виде (12) можно пользоваться другим решением. Для этой цели рассмотрим преобразование Лапласа функции $H(y)$

$$K(u) = \int_0^\infty e^{-uy} H(y)\,dy. \tag{15}$$

Оказывается, что преобразование Лапласа функции $K(u)$ совпадает с $G(x)$:

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-xu} K(u)\,du. \tag{16}$$

Поэтому можно определить сначала $K(u)$ через $G(x)$ путем решения уравнения Лапласа /9/, а затем выразить $H(y)$ через $K(u)$ посредством аналогичной формулы. В результате получаем:

$$\operatorname{Im} F(t) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2} \int_0^\infty L\left(\frac{4m_\pi^2 z}{t}\right) \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_{-A}^{A} \frac{z^{i\xi}}{\Gamma(i\xi + \frac{1}{2})}\,d\xi, \tag{17}$$

где

$$L(u) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[1 - F\left(-\frac{4m_\pi^2 z}{u}\right)\right] \frac{dz}{z^{3/2}} \int_{-A}^{A} \frac{z^{i\xi}}{\Gamma(i\xi + \frac{1}{2})}\,d\xi. \tag{18}$$

Вместо значений производных всех порядков от формфактора при каждом $t \leq 0$ применение соотношений (17) и (18) требует только знания значений этого формфактора при всех $t < 0$. Отметим, что интеграл в правой части (17) должен обращаться в нуль при $0 \leq t \leq 4m_\pi^2$:

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^\infty L(\alpha z) \frac{dz}{\sqrt{z}} \int_{-A}^{A} \frac{z^{i\xi}}{\Gamma(i\xi + \frac{1}{2})}\,d\xi = 0 \tag{19}$$

для всех $\alpha \geq 1$.

В заключение автор выражает благодарность профессору А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе.


## *Литература*

1. *Л.Д. Соловьев. ЯФ, 3, 188 (1966).*
2. *A.A. Logunov, L.D. Soloviev and A.N. Tavkhelidze. Phys.Lett. 24B, 181 (1967).*
3. *C.H. Chan. Rapporteur Talk at the International Conference on High Energy Physics, Vienna, 1968.*
4. *Б.В. Гешкенбейн и Б.Л. Иоффе. ЖЭТФ, 46, 902 (1964).*
5. *Е. Титчмарш. Теория функций, ГИТГЛ, 1951 г.*
6. *A. Martin. Nuovo Cim. 37, 671 (1965).*
7. *A.M. Jaffe. Phys.Rev.Lett. 17, 661 (1966).*
8. *Л.А. Халфин. ЯФ, 7, 876 (1968).*
9. *Н. Винер и Я. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, Наука, 1964 г.*



Рукопись поступила в издательский отдел

19 декабря 1968 года.