ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4208

В.Балуни

О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ШИРИНЫ ДИФРАКЦИОННОГО ПИКА РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД И НАЗАД

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 4208

В.Балуни

О ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ ШИРИНЫ ДИФРАКЦИОННОГО ПИКА РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД И НАЗАД

Направлено в Physics Letters

Ограничения на ширину дифракционного пика снизу и сверху обсуждались в работах /1-5/. В частности, Бессис /5/ установил связь между радиусом круга с центром в точке $t = 0$, внутри которого мнимая часть $A(s,t)$ амплитуды рассеяния не обращается в нуль, и ростом последней в круге $|t| \leq 4m_\pi^2$. Он получил неравенство

$$\frac{1}{2}\Delta^I(s) = \frac{d}{dt}\lg A(s,t)\Big|_{t=0} < e\left(\frac{15}{\pi m_\pi}\right)^2 \lg^2(s/s_0). \qquad (1)$$

Если амплитуда при больших энергиях чисто мнимая, то указанная величина совпадает с шириной дифракционного пика.

В настоящей работе мы получим соотношение (1) гораздо более простым способом и слегка улучшим его. Мы покажем также, что при некоторых предположениях соотношение типа (1) справедливо и для рассеяния назад.

Мы исходим из следующих строго доказанных результатов (более подробно см. /5/).

1) Функция $\psi_s(t) = \dfrac{A(s,t)}{A(s,0)}$ голоморфна в эллипсе E_t /6/ с фокусом и правой вершиной в точках $t = 0$ и $t = 4m_\pi^2$ соответственно. В частности, она голоморфна в круге $|t| < 4m_\pi^2$).

2) Из результатов работ /7/ следует, что в эллипсе E_t, а также в круге $|t| \leq 4m_\pi^2$

$$|\psi_s(t)| < C s^7 (\lg s)^3 < (s/s_0)^{7(1+\epsilon)} = M. \qquad (2)$$

3) С помощью условия унитарности и свойств полиномов Лежандра легко показать, что в физической области

$$|\psi_s(t)| < 1 . \tag{3}$$

Теперь введем новую переменную $z = t/4m_\pi^2$. и произведем конформное отображение $w = \sqrt{z}$ круга $|z| \le 1$ в правый полукруг D_w. Положим $\psi_s(t) = \phi_s(z) = g_s(w)$ и применим теорему двух констант [8] к функции $g_s(w)$. Учитывая оценки (2) и (3), имеем

$$|g_s(w)| \le M^{\omega(w)} , \tag{4}$$

где $\omega(w)$ - гармоническая мера правой полуокружности в точке $w = u + iv$ относительно области D_w,

$$\omega(w) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2v}{1-|w|^2} < \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2|w|}{1-|w|^2} . \tag{5}$$

Возвращаясь к переменной z и подставляя значение M , определенное в условии 2), получим

$$|\phi_s(z)|_{|z|=\rho} \le \exp\left[\frac{15}{\pi} \lg(s/s_0) \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right]. \tag{6}$$

Для оценки $\phi'(0)$ заметим, что $\mathrm{Re}\,\phi(z)$ - гармоническая функция в круге $|z| \le 1$, следовательно, к ней можно применить формулу Пуассона [8]

$$\mathrm{Re}\,\phi(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,\phi(\rho e^{i\phi}) \frac{(\rho^2 - r^2)\, d\phi}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi)} . \tag{7}$$

Отсюда, учитывая неравенство (6), имеем

$$\frac{d}{dz} \phi(z)\Big|_{z=0} < \frac{4}{\pi} \frac{1}{\rho} \exp\left[\frac{15}{\pi} \lg(s/s_0) \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\right]. \tag{8}$$

Минимум выражения справа по ρ даст требуемое соотношение при $s \to \infty$:

$$\frac{1}{2} \Delta^1(s) = \frac{1}{4m_\pi^2} \frac{d}{dz} \phi(z)\Big|_{z=0} < \frac{e}{\pi} e\left(\frac{15}{\pi m_\pi}\right)^2 \lg^2(s/s_0) . \tag{9}$$

Теперь посмотрим, насколько уменьшится константа при $\lg^2(s/s_0)$, если учесть, что все три условия - 1), 2) и 3) - выполняются также в эллипсе E_t.

С помощью конформного отображения [9]

$$w = \frac{\theta_3(\omega|\tau) - \theta_4(\omega|\tau)}{\theta_3(\omega|\tau) + \theta_4(\omega|\tau)} , \tag{10}$$

где $\omega = \frac{1}{2} \arccos z$, $z = 1 + \frac{2t}{s - 4m_\pi^2}$, $\tau = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{m_\pi^2}{s - 4m_\pi^2}}\, i$, а θ_k - тэта-функция, преобразуем эллипс E_t в единичный круг C_w . Затем круг C_w отобразим в себя так, чтобы точка $w(t=1) = w_0$ перешла в точку $\eta = 0$:

$$\eta = \frac{w - w_0}{1 - w w_0} . \tag{11}$$

Далее таким же образом, как и выше, оценим производную функции $g_s(\eta) = \psi_s(t)$ в точке $\eta = 0$ $(t = 0)$. С другой стороны, вычисляя производные $\eta'|_{w=w_0}$, $w'|_{z=1}$ окончательно получим

$$\frac{1}{2} \Delta^1(s) < \frac{e\pi}{16} e\left(\frac{15}{\pi m_\pi}\right)^2 \lg^2(s/s_0) . \tag{12}$$

Теперь о ширине дифракционного пика назад. В работах [10,11] было показано, что отношение амплитуды рассеяния почти назад к амплитуде рассеяния почти вперед в аннигиляционном канале по модулю стремится к единице при $s \to \infty$, если оно имеет предел и мнимая часть $A(s,u,t)$

амплитуды при малых $|u|$ и больших s знакоопределенна. Мы предположим, кроме этого, что эти амплитуды чисто мнимы. Тогда соотношения (9) и (12) справедливы также для ширины Δ^{I}_{π} дифракционного пика назад. Легко видеть, что при рассеянии частиц с неравными массами верхняя граница величины Δ^{I}_{π} меньше верхней границы величины Δ^{I}. Например, для $\pi^{+}p$ рассеяния имеем

$$\frac{1}{2}\Delta^{I}_{\pi}(s) < \frac{e^2}{\pi}\left[\frac{15}{\pi(M_p+m_\pi)}\right]^2 \lg^2(s/s_0). \qquad (13)$$

При этом предполагается, что мнимая часть $A(s,t)$ аннигиляционной амплитуды аналитична в круге $|t| \le (M_p + m_\pi)^2$.

В заключение отметим, что с помощью изложенного метода можно усилить ограничения на радиус элементарных частиц, полученные в работе /12/.

Автор выражает глубокую благодарность Нгуену Ван Хьеу за постоянное внимание, а также А.А. Логунову, М.К. Поливанову и А.Н. Тавхелидзе за интерес к работе.

Литература

1. A.Martin. Phys. Rev, 129, 1432 (1963). S.W.MacDowell, A.Martin. Phys.Rev., 135, B960 (1964);
2. K.L.Kowalski. Phys.Rev., 134, B135 (1965).
3. T. Kinoshita. Lectures in theoretical Physics, vol. 7B (1964).
4. A.A.Logunov, M.A.Mestvirishvili, N.V. Hieu. Phys. Lett., 25 B, 611 (1967).
5. J.D. Bessis. Nuovo Cim., 45, 974 (1966).
6. A. Martin. Nuovo Cim., 42A, 974 (1966); G. Sommer. Nuovo Cim., 52 A, 373 (1967); J.D. Bessis, V.G. Glaser. Nuovo Cim., 50A, 568 (1967).
7. Y.S. Jin, A. Martin. Phys. Rev., 135, B1369 (1964); 135, B1375 (1964).

8. С. Стоилов. Теория функций комплексных переменных, т.2, ИЛ, 1962.
9. В. Коппенфельс, Ф. Штальман. Практика конформных отображений, ИЛ, 1963.
10. A. Białas, O. Czyzewsky. Phys. Lett., 13, 1337 (1964); Y.S.Jin. Phys. Rev., 151, 1259 (1966).
11. A. Martin. Nuovo Cim., 39, 704 (1965).
12. V. Baluni, N.V. Hieu. Report at the XIY International Conference on High Energy Physics, Vienna, 1968; Preprint, E2-3986, Dubna, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 декабря 1968 года.