ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4203

Н.Ф.Трускова

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФУНКЦИИ СО СПИНОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

Р2 - 4203

Н.Ф.Трускова

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ФУНКЦИИ СО СПИНОМ

§1. В в е д е н и е

Конформная инвариантность уравнений Максвелла, уравнения Дирака с массой $m=0$ и вообще всех уравнений, описывающих свободные частицы с массой $m=0$ и спином s, установлена давно[1,2,3,4]. С тех пор конформная группа постоянно привлекает к себе внимание многих авторов. Это простая группа ранга 3. Она изоморфна[5,6] группе вращений шестимерного пространства $O(4,2)$ с инвариантной квадратичной формой:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 - x_6^2 = -L^2 . \tag{1}$$

Алгебра группы $O(4,2)$ относится к типу $A3 \equiv D3$, и число коммутирующих операторов, определяющих ее базисные функции, равно 9[6]. Из них три являются операторами Казимира $O(4,2)$ и выражаются через генераторы вращений шестимерного пространства $J_{\alpha\beta}$ следующим образом[7]:

$$\begin{aligned} C_I &= \frac{1}{2} J_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} \\ C_{II} &= \frac{1}{48} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\omega\xi} J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta} J_{\omega\xi} \\ C_{III} &= \Sigma_{i_1<i_2<i_3<i_4} J^2 (i_1, i_2, i_3, i_4), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta, \dots i_1 = 1,2,\dots 6.$

$$J(1,2,3,4) = J_{12}J_{34} - J_{13}J_{24} + J_{23}J_{14}.$$

Собственные значения C_I, C_{II}, C_{III} для каждого неприводимого представления группы $O(4,2)$, как и для накрывающей ее группы $SU(2,2)$, можно определить подобно собственным значениям инвариантов группы $O(6)$ и ее накрывающей $SU(4)$ набором трех чисел m_1, m_2, m_3 /7/:

$$C_I = m_1(m_1+4) + m_2(m_2+2) + m_3^2$$

$$C_{II} = (m_1+2)(m_2+1)m_3 \tag{3}$$

$$C_{III} = (m_1+2)^2(m_2+1)^2 + (m_1+2)^2 m_3^2 + (m_2+1)^2 m_3^2 - C_I - 4$$

$$m_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Числа $m_1, m_3 = 0, 1/2, 1\dots$ для конечномерных представлений; они могут быть мнимыми и иметь непрерывный спектр в случае бесконечномерных.

Остальные 6 операторов можно выбрать следующим образом: $P^2 = m^2$, $W = m^2 s(s+1)$ – два инварианта группы Пуанкаре $P(3,1)$, $\vec{M}^2 - \vec{L}^2$, $(\vec{M}\vec{L})$ –два инварианта однородной группы Лоренца $L(3,1)$, $\vec{M}^2$ – один инвариант группы вращений $O(3)$ и M_3 – один инвариант группы вращений на плоскости $O(2)$.

Нас интересует, каким представлениям группы $O(4,2)$ соответствуют неприводимые представления группы Пуанкаре, описывающие частицы с массой $m=0$ и со спином s. Для случая фотона это означает, что мы интересуемся, какие именно представления группы $O(4,2)$ реализуются решениями уравнений Максвелла.

В §2 получены инфинитезимальные генераторы конформной группы в координатном (y) пространстве, вычислены операторы Казимира C_I, C_{II}, C_{III}, найдены числа m_2, m_3, соответствующие определенному выбору значения спина s.

В §3 построены базисные функции группы O(4,2) в представлении, диагональном по группе Пуанкаре и по однородной группе Лоренца. При этом рассмотрен вопрос о связи представлений этих групп и получены функции, являющиеся представлением группы Пуанкаре для частицы с массой $m = 0$ и спином s и в то же время являющиеся представлением однородной группы Лоренца, в которой нет понятия спина. Эти базисные функции реализуются в пространстве, которое представляет собой прямое произведение конуса на конечномерное спиновое пространство, и удовлетворяют безмассовым уравнениям Вейнберга/8,9/.

В приложении в качестве примера рассмотрены уравнения Вейнберга и функции, являющиеся их решением, для случая фотона $s = 1$.

§2. Генераторы и инварианты конформной группы

Перейдем от координат x_i формулы (1) к координатам y_μ, y_5 :

$$y_\mu = \frac{x_\mu}{(x_5 + x_6)}, \quad y_5 = \frac{1}{(x_5 + x_6)}, \quad -\frac{1}{y_5}(y^2 + L^2 y_5^2) = x_5 - x_6. \tag{4}$$

Так как мы строим представление конформной группы, диагональное по группе Пуанкаре, выберем генераторы сдвига P_μ и 4-х вращений $M_{\mu\nu}$ в пространстве Минковского в обычном для этой группы виде:

$$P_\mu = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y_\mu}$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{i}\left(g_{\mu\mu'}\, y_{\mu'} \frac{\partial}{\partial y_\nu} - g_{\nu\nu'} y_{\nu'} \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right) + S_{\mu\nu}. \tag{5}$$

$S_{\mu\nu}$ - спиновая часть момента количества движения; $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1$.

Далее примем/4/, что спинор $\Psi(y)$, описывающий частицу с массой $m = 0$ и спином S, при преобразованиях подобия

$$D[y] = ay$$

переходит в

$$D[\Psi(y)] = a^{-s-1}\,\Psi(a^{-1}y) \tag{6}$$

и при инверсии

$$T[y] = \frac{y}{y^2 + y_5^2 L^2}$$

переходит в

$$T[\Psi(y)] = A(y)\Psi(T^{-1}[y]). \tag{7}$$

Здесь

$$A(y) = \frac{1}{(y^2 + y_5^2 L^2)^{2s+1}} \underbrace{y_\mu \gamma^\mu \otimes \ldots \otimes y_a \gamma^a}_{2s \text{ членов}}.$$

При собственно-конформных преобразованиях

$$K[y_\mu] \equiv TPT[y_\mu] = \frac{y_\mu + a_\mu (y^2 + y_5^2 L^2)}{(1 + 2ay + a^2 (y^2 + L^2 y_5^2))} \tag{8}$$

спинор $\Psi(y)$ преобразуется в (9)

$$K[\Psi(y)] = (1 - 2ay + a^2 (y^2 + y_5^2 L^2)) \underbrace{(1 - \hat{y}\hat{a}) \otimes (1 - \hat{a}\hat{y}) \otimes \ldots}_{2s \text{ -членов}} \Psi\left(\frac{y_\mu - a_\mu (y^2 + L^2 y_5^2)}{1 - 2ay + a^2 (y^2 + L^2 y_5^2)}\right).$$

При этом мы воспользовались тем, что

$$K[y_\mu] \equiv TPT[y_\mu],$$

где T – инверсия, P – сдвиг:

$$P[y_\mu] = y_\mu + a_\mu .$$

15 генераторов конформной группы в координатном представлении будут иметь вид:

$$P_\mu = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_\mu}$$

$$M_{\mu\nu} = \frac{1}{i} \left(g_{\mu\mu'} y_{\mu'} \frac{\partial}{\partial y_\nu} - g_{\nu\nu'} y_{\nu'} \frac{\partial}{\partial y_\mu}\right) + S_{\mu\nu}$$

$$D = \frac{1}{i}\left(y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\mu} + y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + s + 1\right)$$

$$K_\mu = \frac{1}{i}\Big(2 g_{\mu'}^{\prime} y'_{\mu\mu'} \; y_\rho \frac{\partial}{\partial y_\rho} + 2 g_{\mu'} y_{\mu\mu'} y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + 2 g'_{\mu'} y'_{\mu\mu''} -$$
$$- (y^2 + L^2 y^2) \frac{\partial}{\partial y_\mu} + 2 i S_{\mu\nu} y_\nu + 2 g_{\mu\mu'} y_{\mu'} S \Big). \qquad (10)$$

Обозначим временную часть генератора 4-х вращений $M_{0i} \equiv L_i$, а пространственную часть – через $M_{nm} \equiv M_i$. Операторы Казимира, выраженные через генераторы P_μ, M_i, L_i, D, K_μ, суть:

$$C_I = \vec{M}^2 - \vec{L}^2 + \frac{g_{\mu\mu'}}{2}\left(P_\mu K_{\mu'} + K_\mu P_{\mu'}\right) - D^2$$

$$C_{II} = -(\vec{L}\vec{M})D + \frac{\vec{M}}{2}(\vec{P} \cdot K_0 - \vec{K} P_0) + \frac{\vec{L}\{[\vec{K}\times\vec{P}]\}}{4} \qquad (11)$$

$$C_{III} = -(\vec{L}\vec{M})^2 + \frac{1}{2}\{(\vec{P}\vec{M})(\vec{K}\vec{M})\} - \frac{1}{2}\{(\vec{M}P_0 - [\vec{P}\times\vec{L}])(\vec{M}K_0 - [\vec{K}\times\vec{L}])\} +$$
$$+ (\vec{L}D + \frac{1}{2}\{(P_0\vec{K} - K_0\vec{P})\})^2 - (\vec{M}D - \frac{1}{2}\{[\vec{K}\times\vec{P}]\})^2 .$$

Здесь $\{A B\} \equiv AB + BA$.

Подставляя выражения (10) в (11) и учитывая, что $P_0^2 - \vec{P}^2 = 0$, получаем:

$$C_I = y_5^2 \frac{\partial^2}{\partial y_5^2} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + 2 s y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + 3 s^2 - 3$$

$$C_{II} = -\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\partial\rho} S_{\mu\nu} S_{\partial\rho}\left(s - 1 + y_5 \frac{\partial}{\partial y_5}\right) \qquad (12)$$

$$C_{III} = 2s(s+1)\left(y_5^2 \frac{\partial^2}{\partial y_5^2} - y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + 2 s y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + s^2 - 2s\right) + s^2 (s+1)^2 .$$

Мы видим, что из трех операторов C_I, C_{II}, C_{III} независимым является один, например, C_{II}, а C_I и C_{III} выражаются через него:

$$C_I = \frac{C_{II}^2}{s^2(s+1)^2} + 2s(s+1) - 4$$
$$C_{III} = 2s(s+1)\left(\frac{C_{II}^2}{s^2(s+1)^2} - 1\right) + s^2(s+1)^2. \tag{12}$$

Тогда из трех чисел m_1, m_2, m_3, определяющих собственные значения C_I, C_{II}, C_{III} посредством формул (3), независимым можно считать только одно число, например, m_1, а m_2 и m_3 фиксировать. При заданной величине спина s они равны:

$$m_2 = s$$
$$m_3 = \pm s \quad . \tag{13}$$

Представим число m_1 в виде:

$$m_1 = iq - 2$$
$$m_1(m_1 + 4) = -q^2 + 4 \tag{14}$$

и введем оператор

$$Q_s = \left(y_5 \frac{\partial}{\partial y_5} + s - 1\right). \tag{15}$$

Так как

$$C_{II} = -\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} S_{\mu\nu} S_{\lambda\rho} Q_s \tag{16}$$

и собственное значение $C_{II} = iq\, m_3(m_2 + 1) = -\frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} S_{\mu\nu} S_{\lambda\rho}\, iq$, то собственное значения оператора $Q_s = iq$.

Собственные значения операторов C_I и C_{III}, выраженные через s и q, равны:

$$
\begin{aligned}
&C_{.\,\text{зн.}}\; C_I = -q^2 - 4 + 2s(s+1) \\
&C_{.\,\text{зн.}}\; C_{III} = \pm 2s(s+1)(-q^2-1) + s^2(s+1)^2.
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Это фактически означает, что выбранное нами представление реализуется движением точки на шестимерной сфере (1).

Посмотрим теперь, чему равны остающиеся 6 базисных операторов. Два инварианта группы Пуанкаре равны нулю, так как масса равна нулю:

$$
P^2 = m^2 = 0, \qquad W = m^2 s(s+1) = 0. \qquad (18)
$$

Однако, как известно, в таком случае возникает дополнительный инвариант, равный спиральности частицы:

$$
\lambda = \frac{(\vec{M}\,\vec{P})}{P_0}. \qquad (19)
$$

Два оператора Казимира однородной группы Лоренца имеют собственные значения:

$$
\begin{aligned}
&(\vec{M}^2 - \vec{L}^2)\, f = \left(\frac{\mu^2}{4} - \rho^2 - 1\right) f \\
&2i\,(\vec{M}\,\vec{L})\, f = i\,\mu\,\rho\,.
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

Если представление принадлежит основной серии, унитарно и неприводимо, то μ -целое, ρ - вещественное. В общем случае ρ -комплексно, и представление неунитарно.

Собственные значения инвариантов групп $O(3)$ и $O(2)$ равны:

$$\vec{M}^2 f = j(j+1) f \tag{21}$$

$$M_3 f = M f .$$

Итак, из девяти базисных операторов группы $O(4,2)$ осталось шесть. Это

$$Q_s,\ \lambda,\ \vec{M}^2-\vec{L}^2,\ 2i(\vec{M}\vec{L}),\ \vec{M}^2,\ M_3 . \tag{22}$$

Найдем теперь базисные функции, являющиеся собственными функциями одновременно всех этих операторов, и посмотрим при этом, какие условия налагаются на величины их собственных значений.

§2. Базисные функции

Представим y_5 в виде:

$$y_5 = \text{const}\ e^{\beta} . \tag{23}$$

Решая уравнение на собственные значения оператора Q_s

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta} + s - 1\right) f = iq f , \tag{24}$$

видим, что базисные функции f можно представить следующим образом:

$$f = e^{(1-s+iq)\beta}\ \Psi^{j(\rho)}_{\lambda=\pm s,\ M\left(\frac{\mu}{2}\right)} . \tag{25}$$

Функция $\Psi^{j(\rho)}_{\lambda=\pm s, M\left(\frac{\mu}{2}\right)}$ уже не зависит от β и ее вид предстоит определить.

Так как функция f должна быть также базисной функцией группы Пуанкаре, описывающей частицу с массой $m=0$ и спином s, попытаемся построить эту функцию аналогично тому, как это делалось в работе[10] для массы $m \neq 0$. Будем рассматривать функции в пространстве, являющемся прямым произведением конуса (а не гиперболоида, как в[10]), на конечномерное спиновое пространство. Сферическую систему координат в данном случае вводим на конусе:

$$P_1 = e^{a} \sin\theta \cos\phi$$

$$P_2 = e^{a} \sin\theta \sin\phi \tag{26}$$

$$P_3 = - e^{a} \cos\theta .$$

Генераторы 4-х вращений $M_{\mu\nu}$ в этой системе имеют вид:

$$M_1 = -i\left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right) + M_1^*$$

$$M_2 = -i\left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right) + M_2^*$$

$$M_3 = -i\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + M_3^* \tag{27}$$

$$L_1 = -i\left(\sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial a} + \cos\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi}\right) + L_1^*$$

$$L_2 = -i\left(\sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial a} + \sin\phi \cos\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi}\right) + L_2^*$$

$$L_3 = i\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial a} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + L_3^* .$$

Функцию f в этой системе будем строить в виде:

$$f \equiv F^{j(\rho)}_{q,\lambda,M(\frac{\mu}{2})} = \phi_{q,s}(\beta) \sum_{i=1}^{2s+1} \sum_{\nu=-s}^{s} B_i(\lambda, j, \frac{\mu}{2}, \rho) C^{jM}_{\ell_i m_\ell s \nu} f^{\ell_i}_{m_\ell}(\alpha,\theta,\phi) \chi^s_\nu . \tag{28}$$

$$\ell_i = j + s - i + 1$$

$f^{\ell_i}_{m_\ell}(\alpha,\theta,\phi)$ – базисные функции бесконечномерного представления на конусе, χ^s_ν – безисные функции конечномерного представления, соответствующего частице со спином s. Их можно положить равными

$$\chi^s_\nu(\xi) = \delta_{\xi,\, s-\nu+1} . \tag{29}$$

Для таких представлений

$$L^s_i = \pm i M^s_i . \tag{30}$$

Рассмотрим сначала

$$L^s_i = - i M^s_i , \tag{31}$$

т.е. представление $(s,0)$, соответствующее спиральности $\lambda = - s$.

Обозначим через Δ оператор:

$$\Delta f \equiv (\vec{M}^2 - \vec{L}^2) f = ((\frac{\mu}{2})^2 - \rho^2 - 1) f \tag{32}$$

и через Δ' оператор:

$$\Delta' f \equiv 2i(\vec{M}\vec{L}) f = i \mu\rho f . \tag{33}$$

Вычитая Δ' из Δ, получим

$$\Delta^{-} f \equiv (\Delta - \Delta')f = ((\frac{\mu}{2} - i\rho)^2 - 1)f \ . \qquad (34)$$

Оператор Δ^{-} не содержит спиновых матриц и равен:

$$\Delta^{-} f^{\ell_1}_{m\ell} = (\frac{\partial^2}{\partial a^2} + 2\frac{\partial}{\partial a}) f^{\ell_1}_{m\ell} = ((\frac{\mu}{2} - i\rho)^2 - 1) f^{\ell_1}_{m\ell} \ . \qquad (35)$$

Решая уравнение (35), получаем функцию

$$f^{\ell_1}_{m\ell(\lambda=-s)}(a,\theta,\phi) = \Phi_1(\theta,\phi,)\, e^{(i\rho_0 - 1)a} + \Phi_2(\theta,\phi)\, e^{(-i\rho_0 - 1)a} \ . \qquad (36)$$

$$-i\rho_0 = \frac{\mu}{2} - i\rho$$

Для случая $\lambda = +s$, рассматривая аналогично оператор

$$\Delta^{+} \equiv (\Delta + \Delta'), \qquad (37)$$

получим функцию

$$f^{\ell_1}_{m\ell(\lambda=+s)}(a,\theta,\phi) = \chi_1(\theta,\phi)\, e^{(\frac{\mu}{2} + i\rho - 1)a} + \chi_2(\theta,\phi)\, e^{(-\frac{\mu}{2} - i\rho - 1)a} \qquad (38)$$

Из решения уравнения на собственные значения оператора Δ'

$$\Delta' f^{\ell_1}_{m\ell} = 2\lambda(\frac{\partial}{\partial a} - s + 1) f^{\ell_1}_{m\ell} = i\mu\rho f^{\ell_1}_{m\ell} \qquad (39)$$

находим, что $f^{\ell_1}_{m\ell}$ должна иметь вид:

$$f^{\ell_1}_{m\ell}(a,\theta,\phi) = e^{((+\frac{\mu}{2} - i\rho) - 1)a}\, \Phi^{\ell_1}_{m\ell}(\theta,\phi), \qquad (40)$$

где $\frac{\mu}{2} = -\lambda = +s$ – для представлений $(s,0)$ и $\frac{\mu}{2} = -\lambda = -s$ – для представлений $(0,s)$.

Функция $\Phi^{\ell_1}_{m\ell}(\theta,\phi)$ определяется из решений уравнений

$$\vec{M}^2 f = j(j+1)f$$

$$M_3 f = M f$$

и правил векторного сложения моментов $M_1 = M_1^0 + M_1^*$.

Функции $\Phi^{\ell_1}_{m\ell}(\theta,\phi)$ выражаются через функции Лежандра:

$$\Phi^{\ell_1}_{m\ell}(\theta,\phi) = N(\ell_1)\, J_{\ell_1 m_\ell}(\theta,\phi). \tag{41}$$

Множитель $N(\ell_1)$ определяется из требования, чтобы матричные элементы iM_3^0 имели канонический вид для представления $(i\rho_0, i\rho_0)$ группы Лоренца.

$$(iM_3^0)f^{\ell_1}_{m_\ell} = -\sqrt{(\ell_1-m_\ell)(\ell_1+m_\ell)}\cdot\sqrt{\frac{\ell_1^2+\rho_0^2}{4\ell_1^2-1}}\, f^{\ell_1-1}_{m_\ell} +$$

$$+\sqrt{(\ell_1+m_\ell+1)(\ell_1-m_\ell+1)}\ \sqrt{\frac{[(\ell_1+1)^2+\rho_0^2]}{4(\ell_1+1)^2-1}}\, f^{\ell_1+1}_{m_\ell}. \tag{42}$$

Подставляя выражение (27) для оператора iM_3^0 и пользуясь рекуррентными соотношениями для функций Лежандра, получим:

$$(iM_3^0)f^{\ell_1}_{m\ell} = \frac{1}{(2\ell_1+1)}\left(-(\ell_1-i\rho_0)(\ell_1+m_\ell)P^{m_\ell}_{\ell_1-1}(\theta,\phi)+(-i\rho_0+\ell_1+1)(\ell_1+1-m_\ell)\times\right. \tag{43}$$
$$\left.\times\, P^{m_\ell}_{\ell_1+1}(\theta,\phi)\right)\bar{N}(\ell_1,m_\ell).$$

Сравнивая (43) и (42), имеем:

$$\bar{N}(\ell_1,m_\ell) = \sqrt{\frac{(\ell_1-m_\ell)(\ell_1+i\rho_0)(2\ell_1+1)}{(\ell_1+m_\ell)(\ell_1-i\rho_0)(2\ell_1-1)}}\ \bar{N}(\ell_1-1,m_\ell). \tag{44}$$

Представляя $\bar{N}(\ell_i, m_\ell)$ в виде:

$$\bar{N}(\ell_i, m_\ell) = N(\ell_i)\,\frac{(-1)^{m_\ell}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{(2\ell_i+1)(\ell_i - m_\ell)!}{2(\ell_i + m_\ell)!}}\,, \tag{45}$$

находим

$$N(\ell_i) = \sqrt{\frac{(\ell_i + i\rho_0)}{(\ell_i - i\rho_0)}}\,N(\ell_i - 1)\,. \tag{46}$$

Решение (46) есть:

$$N(\ell_i) = \sqrt{\frac{(\ell_i + i\rho_0)\ldots(\ell_{min} + i\rho_0)}{(\ell_i - i\rho_0)\ldots(\ell_{min} - i\rho_0)}} = \sqrt{\frac{\Gamma(1+\ell_i + i\rho_0)\,\Gamma(1+\ell_{min} - i\rho_0)}{\Gamma(1+\ell_{min} + i\rho_0)\,\Gamma(1+\ell_i - i\rho_0)}} \tag{47}$$

$$\ell_{min} = -i + 2\,.$$

Далее, действуя аналогично работе /10/, получаем следующие рекуррентные соотношения для коэффициентов $B_i^s(j)$:

$$B_i^s(j)\left(\frac{i\mu\rho}{2(j+1)} + s + 1 - i\right) + \frac{B_{j+1}^s(j+1)}{(j+1)}\sqrt{\left((j+1)^2 - \frac{\mu^2}{4}\right)\left((j+1)^2 + \rho^2\right)}\;\times$$

$$\times\sqrt{\frac{i(2s-i+1)}{(2j-i+2)(2j+2s-i+3)}} = B_{i-1}^s(j)\sqrt{(j+s-i+2)^2 - \left(\frac{\mu}{2} - i\rho\right)^2}\;\times \tag{48}$$

$$\times\sqrt{\frac{(i-1)(2s-i+2)(2j+2s-2i+3)}{(2j+2s-i+3)(2j+2-i)(2j+2s-2i+5)}}$$

Введем

$$A_i^s(j) = \frac{B_i^s(j)\,N(\ell_i)}{B_1^s(j)\,N(\ell_1)} . \qquad (49)$$

Функция $F^{j(\rho)}_{q;\lambda=-s,M(\frac{\mu}{2})}$ принимает вид:

$$F^{j(\rho)}_{q,\lambda=-s,M(\frac{\mu}{2})}(\beta,\alpha,\theta,\phi)=\phi_{q,s}(\beta)\,\ell^{(-i\rho_0-1)\alpha}\,G(j,s)\sum_{i=1}^{2s+1}\sum_{\nu=-s}^{s}A_i^s(j)\,C^{jM}_{\ell_i m_\ell s\nu}\,J_{\ell_i m_\ell}(\theta,\phi)\,\chi_\nu^s , \qquad (50)$$

где

$$G(j,s) = B_1^s(j)\,N(\ell_1). \qquad (51)$$

Коэффициенты $A_i^s(j)$ определяются рекуррентными соотношениями:

$$A_i^s(j)\times\left[\frac{i\mu\rho}{2(j+1)}+s+1-i\right]+A_{i+1}^s(j+1)\sqrt{\frac{(j+s+1)+i\rho_0}{(j+s+1-i\rho_0)}}\times\sqrt{(j+s+1)^2+\rho_0^2}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2j+2s+2)(2j+1)i(2s-i+1)}{(2j+2)(2j+2s+1)(2j+2-i)(2j+2s-i+3)}}=A_{i-1}^s(j)\sqrt{\frac{(j+s-i+2-i\rho_0)}{(j+s-i+2+i\rho_0)}}\times \qquad (52)$$

$$\times\sqrt{(j+s-i+2)^2+\rho_0^2}\cdot\sqrt{\frac{(i-1)(2s-i+2)(2j+2s-2i+3)}{(2j+2s-i+3)(2j+2-i)(2j+2s-2i+5)}} .$$

Полагая $A_1^s(j)\equiv 1$ и пользуясь (52), находим:

$$A_2^s(j)=\frac{\left[\frac{i\mu\rho}{2j}+s\right](-1)}{(j+s+i\rho_0)}\sqrt{\frac{j(2j+2s-1)}{s}} ;$$

$$A_s^s(j) = \frac{(2j+2s-1)}{(j+s+i\rho_0)} \cdot \sqrt{\frac{(2j+2s-3)(j-1)j}{(j+s)(2j-1)(2s-1)}} \left[\frac{\sqrt{\frac{(j-1)}{s}}\left(\frac{i\mu\rho}{2(j-1)}+s\right)\left(\frac{i\mu\rho}{2j}+s-1\right)}{(j+s-1+i\rho_0)} + \right. \tag{53}$$

$$\left. + (j+s-1-i\rho_0)\sqrt{\frac{2s}{(2j+2s-1)(2j+2s-1)(2j-2)}} \right].$$

Для коэффициентов $B_1^s(j)$ получаем соотношения:

$$B_1^s(j+1) = B_1^s(j)(j+1)\sqrt{\frac{[(j+s+1)^2+\rho_0^2](2j+2s+2)(2j+1)}{[(j+1)^2-\frac{\mu^2}{4}]\cdot[(j+1)^2+\rho^2](2j+2)(2j+2s+1)}} \tag{54}$$

$$B_1^s(j) = N_1(\mu,\rho,s)\frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\frac{\mu}{2}+1)}\left\{\frac{\Gamma[(j+s+1)-i\rho]\,\Gamma[(j+s+1)-i\rho]}{\Gamma[(|\frac{\mu}{2}|+s+1)-i\rho]\,\Gamma[(2s+1+i\rho)]}\right. \times$$

$$\times \frac{\Gamma[s+1+\frac{\mu}{2}]\,\Gamma[(s+1)-\frac{\mu}{2}]\,|\Gamma(s+1+i\rho)|^2}{\Gamma(j+\frac{\mu}{2}+1)\,\Gamma(j-\frac{\mu}{2}+1)\,|\Gamma(j+i\rho+1)|^2} \times$$

$$\times \frac{(2j+2s)!!(2j-1)!!\,|s|\,!!(3s-1)!!}{}$$

Выбирая нормировочный множитель

$$N_1\left(\left|\frac{\mu}{2}\right|,\rho,s\right) = \frac{\Gamma(s+1+i\rho)}{\Gamma(2s+1+i\rho)}, \tag{55}$$

получим окончательный вид функции $F^{j(\rho)}_{q,\lambda=-s,M(\frac{\mu}{2})}$:

$$F^{j(\rho)}_{q,\lambda=-s,M(\frac{\mu}{2})}(\beta,\alpha,\theta,\phi)=$$

$$=\phi_{q,s}(\beta)\ N_1(|\frac{\mu}{2}|,\rho,s)G(j,s)e^{(-i\rho_0-1)\alpha}\sum_{j=1}^{2s+1}\sum_{\nu=-s}^{s}A^{s}_{l}(j)C^{jM}_{l_l m_l s\nu}\ J_{l_l m_l}(\theta,\phi)\ \chi^{s}_{\nu}. \tag{56}$$

Итак, мы получили функцию $F^{j(\rho)}_{q,\lambda=-s,M(\frac{\mu}{2})}\equiv<\beta,\alpha,\theta,\phi|q,\rho,\frac{\mu}{2},jM>$; являющуюся представлением группы Пуанкаре для частицы с массой $m=0$ и спином s и являющуюся в то же время представлением $(s,0)$ однородной группы Лоренца. Так как полученная функция (56) должна быть также базисной функцией выбранного нами представления группы $O(4,2)$, приравниваем ее функции (25) и видим, что

$$\phi_{q,s}(\beta)=e^{(1-s+iq)\beta}\ . \tag{57}$$

Для определения скалярного произведения будем рассматривать биспинор

$$\Psi^{j(\rho)}_{q,M(\frac{\mu}{2})}(\alpha,\beta,\theta,\phi)=\begin{pmatrix}F\\ \chi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}<\beta,\alpha,\theta,\phi/q,\rho,\frac{\mu}{2},jM>\\ (-1)^{j+s+\mu}<\alpha,\beta,\pi-\theta,\pi+\phi|q,\rho,-\frac{\mu}{2},jM>\end{pmatrix}. \tag{58}$$

Функция χ преобразуется по представлению $(0,s)$.

$$\chi\equiv(-1)^{j+s+\mu}F^{j(\rho)}_{q,\lambda=+s,M(-\frac{\mu}{2})}(\alpha,\beta,\pi-\theta,\pi+\phi). \tag{59}$$

Условие ортогональности для функций $\Psi^{j(\rho)}_{q,M(\frac{\mu}{2})}$ суть:

$$(\Psi^{j(\rho)}_{q,M(\frac{\mu}{3})}(\alpha,\beta,\theta,\phi)\Psi^{j'(\rho')}_{q',M'(\frac{\mu'}{2})}(\alpha,\beta,\theta,\phi))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}d\beta\, d\alpha\, \ell^{(2s-2)\alpha-2\beta}\times$$

$$\times\sin\theta\, d\theta\, d\phi\ \times$$

$$\Psi^{+\,j(\rho)}_{qM(\frac{\mu}{2})}(\alpha,\beta,\theta,\phi)\,\Gamma^0\,\Psi^{j'(\rho')}_{q'M'(\frac{\mu'}{2})}(\alpha,\beta,\theta,\phi) =$$

$$= \delta_{\mu\mu'}\,\delta_{jj'}\,\delta_{\mu\mu'}\,\delta(\rho-\rho');\quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{60}$$

§4. Решения уравнений Вейнберга с массой $m=0$

В[9] доказано, что безмассовые уравнения Вейнберга при условии, что их решения преобразуются по представлениям $(s,0)$ или $(0,s)$ однородной группы Лоренца, можно получить из сответствующих уравнений с массой $m \neq 0$ взятием предела $m \to 0$ или, точнее $\frac{|P|}{m} \to \infty$; уравнения в этом случае упрощаются и принимают следующий вид:

$$\mathcal{P}^{(s)}(P)\,\Psi = 0, \tag{61}$$

где

$$\mathcal{P}^{(s)}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \Pi^{(s)}(P) \\ \bar{\Pi}^{(s)}(P) & 0 \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Операторы $\Pi^{(s)}(P)$ и $\bar{\Pi}^{(s)}(P)$ равны:

$$\Pi^{(s)}(P) = \frac{2^{2s}}{2s!}\prod_{\lambda=-s+1}^{s}(\lambda P_0 - \vec{P}\vec{L}^{(s)})$$

$$\bar{\Pi}^{(s)}(P) = \frac{2^{2s}}{(2s)!}\prod_{\lambda=-s+1}^{s}(\lambda P_0 + \vec{P}\vec{L}^{(s)}). \tag{63}$$

Так как уравнения (61) строятся таким образом[9], чтобы их решения являлись представлением группы Пуанкаре для частицы с массой

$m=0$ и спином s и преобразовывались по представлению $(s,0)$ или $(0,s)$ однородной группы Лоренца, то ясно, что полученные нами функции удовлетворяют этим уравнениям. Уравнения и их решения для случая фотона (спин $s=1$) выписаны в приложении. При этом функции, являющиеся решениями этих уравнений, при $\rho=0$ пропорциональны функциям Берестецкого для фотона /11/.

§5. Заключение

Итак, получены функции, являющиеся базисными функциями группы $O(4,2)$ и вложенных в нее подгрупп:

$$O(4,2) \subset P(3,1) \subset L(3,1) \subset O(3,1) \subset O(2) \tag{64}$$

и удовлетворяющие безмассовым уравнениям Вейнберга /9/.

Установлено, что хотя уравнения с массой $m=0$ и с любым спином s инвариантны относительно конформных преобразований, решения этих уравнений реализуют собой (аналогично случаю атома водорода) лишь часть всех представлений конформной группы, а именно вырожденные представления, реализуемые движением точки на шестимерной сфере (1). Числа m_1, m_2, m_3, характеризующие неприводимое представление группы, при массе частицы $m=0$ определяются величиной спина s и квантовым числом iq: $m_2=s$, $m_3=\pm s$, $m_1=iq-2$, $0\leq q<+\infty$.

Автор благодарит Я.А.Смородинского за постоянную помощь и внимание к работе, а также М.Гусара и М.Б.Шефтеля за полезные обсуждения.

Приложение

В случае спина $s=1$ безмассовые уравнения Вейнберга принимают вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \Pi^{(1)}(P) \\ \bar{\Pi}^{(1)}(P) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \chi \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$\bar{\Pi}^{(1)}(p) = 2(\vec{p}\,\vec{L}^{(s)})(p_0 + \vec{p}\,\vec{L}^{(s)})$$

$$\Pi^{(1)}(p) = 2(-\vec{p}\,\vec{L}^{(s)})(p_0 - \vec{p}\,\vec{L}^{(s)}), \qquad (\Pi.2)$$

F – функция, преобразующаяся по представлению (1,0) однородной группы Лоренца; χ – функция, преобразующаяся по представлению (0,1) однородной группы Лоренца.

В сферической системе уравнения (П.1) выглядят следующим образом:

$$2\begin{pmatrix} -\cos\theta & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (\Pi.3)$$

$$2\begin{pmatrix} -\cos\theta & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\theta-1 & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sin\theta\, e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sin\theta\, e^{i\phi}}{\sqrt{2}} & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (\Pi.4)$$

Решениями этих уравнений являются функции:

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \langle \alpha, \theta, \phi | \rho\, 1\, j M \rangle = \frac{G(1)}{}(j+1\, 1\, jM / j\, 1 M-1\, 1)\, \frac{(-1)^{M-1}}{\sqrt{2}\,\pi} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(2j+3)(j-M+2)}{2(j+M)!}} \cdot \frac{e^{-i\rho\alpha}}{\sqrt{2}\,\pi\, 2^{i\rho-1}} \cdot \frac{\Gamma(-i\rho+1)}{\Gamma(-i\rho+j+3)} \times \left\{ \begin{array}{c} P^{M-1}_{j+1}(\theta)\, e^{i(M-1)\phi} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{(j-M+2)}\, P^{M}_{j+1}(\theta)\, e^{iM\phi} \\ \dfrac{1}{(j-M+2)(j-M+1)}\, P^{M+1}_{j+1}(\theta)\, e^{i(M+1)\phi} \end{array} \right\}$$

(П.5)

$$- \frac{(2j+1)}{j(j-M+1)(j-M+2)} \times \left\{ \begin{array}{c} -(j+M)(+j-M+1)\, P^{M-1}_{j}(\theta)\, e^{i(M-1)\phi} \\ -\sqrt{2}\, M\, P^{M}_{j}(\theta)\, e^{iM\phi} \\ P^{M+1}_{j}(\theta)\, e^{i(M+1)\phi} \end{array} \right\} +$$

$$+ \frac{(j+1)}{j(j-M+1)(j-M+2)} \times \left\{ \begin{array}{c} (j+M)(j+M-1)\, P^{M-1}_{j-1}(\theta)\, e^{i(M-1)\phi} \\ -\sqrt{2}(j+M)\, P^{M}_{j-1}(\theta)\, e^{iM\phi} \\ P^{M+1}_{j-1}(\theta)\, e^{i(M+1)\phi} \end{array} \right\}.$$

Функции $\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix}$ получаются из функций $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ отражением:

(П.6)

$$\chi(\alpha, \theta, \phi) = (-1)^{j+1} \langle \alpha, \pi-\theta, \pi+\phi | \rho -1\, jM \rangle .$$

Условие нормировки функций $\Psi = \begin{pmatrix} F \\ \chi \end{pmatrix}$ имеет вид:

$$(\Psi^{j(\rho)}_{M(1)}, \Psi^{j'(\rho')}_{M'(1)}) = |G(1)|^2\, \frac{4(2j+1)(\rho^4+\rho^2)\,|\Gamma(-1+i\rho)|^2}{j\,|\Gamma(j+3+i\rho)|^2} \times \qquad (П.7)$$

$$\times\, \delta_{jj'}\, \delta_{\mu\mu'}\, \delta(\rho'-\rho)$$

При $\rho = 0$ функции (П.5) пропорциональны функциям Берестецкого /11/, что и следовало ожидать, так как в этом случае пространство, в котором строятся эти функции, сводится к прямому произведению трехмерного импульсного пространства на конечномерное спиновое пространство.

Литература

1. E.Cunningham. Proc. Lond.Math.Soc. 8, 77 (1910).
2. H.Bateman. Proc.Lond.Math.Soc. 8, 223, 469 (1910).
3. S.A.Bludman. Phys.Rev. 107, 1163 (1957).
4. L.Cross. J.Math.Phys. 5, 687 (1964).
5. Y.Murai. Proc. Theor. Phys. 9, 147 (1953).
6. A.Esteve, P.G.Sona. Nuovo Cimento 32, 472 (1964).
7. L.Castell. Nuovo Cimento 46, A1 (1966).
8. S.Weinberg. Phys. Rev. 133, B1 318 (1964).
9. S.Weinberg. Phys.Rev. 134, B882 (1964).
10. M.A.Liberman, Ya.A.Smorosinsky, M.B.Sheftel. Preprint JINR, E2-3294, Dubna, 1967.
11. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1968 года.