ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 4193

Д.Ц.Стоянов

НЕ ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ SU(2)

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1968

P2 - 4193

Д.Ц.Стоянов

НЕ ВПОЛНЕ ПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ SU(2)

Направлено в ЯФ

В в е д е н и е

Не вполне приводимые представления некомпактной группы, каковой является группа Лоренца, рассматривались в работах [1,2] (см. также[3]), где, в частности, были приведены все представления с конечным числом неприводимых компонент. Все представления такого вида бесконечномерные и неунитарные.

До недавнего времени считалось, что компактные группы могут иметь только конечномерные представления, эквивалентные унитарным. Однако, как выяснилось, это далеко не так. В работах [4,5,6,7] показано, что компактные группы типа $U(n)$ могут иметь бесконечномерные неунитарные представления. Эта возможность связана с тем, что комплексные расширения алгебр групп $U(n)$ и $U(p,q)$ при $p+q=n$ совпадают.

В настоящей работе мы покажем, что такая компактная группа как, например $SU(2)$, может иметь не вполне приводимые представления.

В первом параграфе рассматривается пример такого представления. Во втором параграфе дана классификация всех представлений алгебры групп $SU(2)$ при заданном $I^2=s(s+1)$, причем s - либо целое, либо полуцелое неотрицательное число. Наконец, в последнем, третьем параграфе приведены некоторые предложения насчет интегрируемости найденных представлений.

1. Момент количества движений

Как известно, операторы момента количества движения

$$M_\mu = -i\epsilon_{\mu\nu\rho} \quad z_\nu \frac{\partial}{\partial z_\rho} \tag{1.1}$$

образуют базис алгебры группы SU(2) . В физических рассмотрениях операторы (1.1) действуют в конечномерном пространстве, в котором реализуются унитарные представления группы SU(2) (или SO(3)). Легко, однако, заметить, что если рассматривать M_μ как дифференциальные операторы, не требующие эрмитовости, то область их определения оказывается намного шире. Именно это и есть пространство $M^{(3)}$ всех почти везде дифференцируемых функций от трех аргументов. Очевидно, что в этом пространстве реализуется некоторое бесконечномерное представление алгебры SU(2) (алгебру будем обозначать через $\underline{SU(2)}$). Легко показать, что это представление алгебры интегрируется до глобального представления группы во всем пространстве $M^{(3)}$. Чтобы доказать это утверждение сначала перейдем к полярным координатам в форме

$$\begin{aligned} z_1 &= r \sin x_1 \cos x_2 \\ z_2 &= r \sin x_1 \sin x_2 \\ z_3 &= r \cos x_1 \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Как известно, после этого генераторы M_μ оказываются функциями только от полярных углов x_1 и x_2 . И кроме того, если еще сделать преобразование

$$y_k = e^{-ix_2} \frac{\cos x_1 - (-1)^k}{\sin x_1} \qquad k = 1,2 \tag{1.3}$$

(это преобразование было получено в работе /8/), то генераторы примут следующий вид

$$J_{+} = -\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad J_{-} = \sum_{k=1}^{2} y_k^2 \frac{\partial}{\partial y_k}; \quad J_0 = -\sum_{k=1}^{2} y_k \frac{\partial}{\partial y_k}, \tag{1.4}$$

где

$$J_{+} = M_1 + iM_2; \; J_{-} = M_1 - iM_2; \; J_0 = M_3 .$$

Очевидно, что пространством определения операторов (1.4) является $M^{(2)}$ функций от двух аргументов.

Любую матрицу U, принадлежащую группе $SU(2)$, можно записать в виде

$$U = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}} + i\, a_\mu \frac{\sigma_\mu}{2} \qquad \mu = 1,2,3, \tag{1.5}$$

где a_μ - вещественные параметры, а

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

Обозначим через Uy_k следующее выражение:

$$Uy_k \equiv \frac{U_{11}\, y_k + U_{12}}{U_{21}\, y_k + U_{22}}, \tag{1.6}$$

где U_{ik} - матричные элементы матрицы (1.5). Теперь пусть $f(y)$ - произвольная функция из пространства $M^{(2)}$. Определим оператор

$$T_U f(y_k) = f(U^{-1} y_k). \tag{1.7}$$

Легко заметить, что оператор T_U задает представление группы $SU(2)$ в пространстве $M^{(2)}$. Вычисляя генераторы данного представления, убеждаемся, что они совпадают с (1.4). Таким образом, наше утверждение доказано.

Теперь в пространстве $M^{(2)}$ реализуем базис $u_{sm}(y)$, удовлетворяющий следующим уравнениям

$$J_0\, u_{sm}(y) = m\, u_{sm}(y)$$
$$J^2 u_{sm}(y) = s(s+1)\, u_{sm}(y)\,. \qquad (1.8)$$

Для определенности будем считать, что s – целое неотрицательное, $J^2 \equiv \frac{J_+ J_- + J_- J_+}{2} + J_0^2$ является оператором Казимира второго порядка группы $SU(2)$. Из первого уравнения получаем

$$u_{sm} = y_1^{-m}\, f_{sm}(u), \qquad (1.9)$$

где $u = \frac{y_2}{y_1}$ и тогда из второго уравнения для $f_{sm}(u)$ получаем

$$u(u-1)^2 f''_{sm} + (m+1)(u-1)^2 f'_{sm} - s(s+1) f_{sm} = 0\,. \qquad (1.10)$$

После подстановки

$$f_{sm}(u) = (u-1)^{s+1}\, v_{sm}(u)$$

получаем гипергеометрическое уравнение

$$u(u-1)\, v''_{sm} + \{[2(s+1)+m+1]\, u - m - 1\}\, v'_{sm} +$$
$$+(s+m+1)(s+1)\, v_{sm} = 0\,. \qquad (1.11)$$

Таким образом, базисные векторы u_{sm} имеют следующий вид (выбраны такие решения уравнения (1.11), которые не содержат точек ветвления выше второго порядка):

$$u_{sm} = C_{sm}\, y_1^{-m} (u-1)^{s+1}\, F(s+m+1,\, s+1,\, 1+m,\, u) \quad m \geq 0$$
$$u_{sm} = C_{sm}\, y_1^{-m} u^{|m|} (u-1)^{s+1} F(s+|m|+1,\, s+1,\, 1+|m|,\, u) \quad m \leq 0\,. \qquad (1.12)$$

Имея в виду, что

$$F(s+m+1, s+1, 1+m, u) = (-1)^{2s+1} (u-1)^{-2s-1} F(-s, m-s, 1+m, u), \qquad (1.13)$$

видно, что решение (1.12) не имеет точек ветвления, так как $F(-s, m-s, 1+m, u)$ является полиномом по u. Степень этого полинома равна $s-m$, когда $0 \le m \le s$ и $-s$, когда $m > s$.

Используя (1.12), можно вычислить действие операторов J_+ и J_-:

$$J_+ u_{sm} = -\frac{C_{sm}}{C_{sm+1}} \frac{(s+m+1)(s-m)}{1+m} u_{sm+1} \qquad m \ge 0$$

$$J_+ u_{sm} = m \frac{C_{sm}}{C_{sm+1}} u_{sm+1} \qquad m < 0$$

$$J_- u_{sm} = -m \frac{C_{sm}}{C_{sm-1}} u_{sm-1} \qquad m > 0 \qquad (1.14)$$

$$J_- u_{sm} = -\frac{C_{sm}}{C_{sm-1}} \frac{(s+m)(s-m+1)}{1-m} u_{sm-1} \qquad m \le 0.$$

Считая, что все $C_{sm} \neq 0$ видим, что матричные элементы J_+ обращаются в нуль только в точке $m = s$, а матричные элементы J_- – в точке $m = -s$. Поэтому легко видеть, что рассматриваемое представление не вполне приводимо. Действительно, подпространство M_k, натянутое на базисные векторы u_{sm}, для $-s \le m \le s$, очевидно, является инвариантным подпространством. Но подпространство M_+, натянутое на базисные векторы u_{sm} для $m \ge s+1$, очевидно, неинвариантно. В самом деле, $u_{ss+1} \in M_+$, а

$$J_- u_{ss+1} = -(s+1) \frac{C_{ss+1}}{C_{ss}} u_{ss} \in M_k. \qquad (1.5)$$

Если через M_- обозначать подпространство, натянутое на векторы u_{sm} для $m \leq -s-1$, то легко можно выявить структуру рассматриваемого представления. Подпространства $M_- \oplus M_k$ и $M_k \oplus M_+$ являются инвариантными подпространствами пространства $M^{(2)}$. В них M_k также является инвариантным подпространством, но M_+ и M_- не обладают этим свойством. Поэтому представления, действующие в $M^{(2)}$, $M_- \oplus M_k$ и $M_k \oplus M_+$, хотя и являются приводимыми, они не вполне приводимы.

Поскольку в (1.14) C_{sm} по предположению зависят от m, можно выбирать C_{sm} таким образом, чтобы получать разные неприводимые части пространства $M^{(2)}$. В частности, можно выбирать C_{sm} таким образом, чтобы выделить только конечномерное неприводимое представление. Более подробно это можно увидеть, с учетом дальнейшего изложения, в приложении А.

2. Представления алгебры $SU(2)$

Как известно, базисные элементы I_μ алгебры группы $SU(2)$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[I_\mu \; I_\nu] = i\,\epsilon_{\mu\nu\omega}\, I_\omega \qquad \mu,\nu,\omega = 1,2,3. \tag{2.1}$$

Вводя

$$J_+ = I_1 + i I_2 \;, J_- = I_1 - i I_2 \,, \; J_0 = I_3 \;, \tag{2.2}$$

имеем

$$\begin{aligned} [J_\pm \; J_0] &= \mp J_\pm \\ [J_+ \; J_-] &= 2 J_0 \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Мы найдем общее решение коммутационных соотношений (2.3) при условии, что оператор Казимира второго порядка данной алгебры

$$J^2 = \frac{J_+ J_- + J_- J_+}{2} + J_0^2 \tag{2.4}$$

имеет собственное значение $s(s+1)$, причем s – целое или полуцелое неотрицательное число.

Пространство представления M определим как линейную оболочку векторов u_{sm}, удовлетворяющих следующим уравнениям

$$\begin{aligned} J_0 u_{sm} &= m u_{sm} \\ J^2 u_{sm} &= s(s+1) u_{sm}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где m – целое или полуцелое вместе с s и пробегающее все возможные значения от $-\infty$ до $+\infty$; s – фиксированное.

Равенства (2.5) одновременно определяют и операторы J_0 и J^2. Теперь из первых двух коммутационных соотношений (2.3) можно получить действие операторов J_+ и J_- на базисные векторы M:

$$\begin{aligned} J_+ u_{sm} &= \lambda^+_{sm} u_{sm+1} \\ J_- u_{sm} &= \lambda^-_{sm} u_{sm-1}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где λ^+_{sm} и λ^-_{sm} можно доопределить из третьего коммутационного соотношения (2.3) с учетом второго равенства (2.5)

$$\lambda^-_{sm} \lambda^+_{sm-1} = (s+m)(s-m+1). \tag{2.7}$$

Общее решение последнего уравнения можно записать следующим образом:

$$\lambda^-_{sm} = (s+m)^{\alpha} (s-m+1)^{\beta} \mu_{sm}, \tag{2.8}$$

$$\lambda^{+}_{sm} = (s-m)^{1-\beta}(s+m+1)^{1-\alpha}\ \frac{1}{\mu_{sm+1}} .$$

Мы потребуем ограниченной вариации у коэффициентов λ^{+}_{sm} и λ^{-}_{sm}, рассматривая их как функции от m. Это означает, что величины $|\lambda^{\pm}_{sm} - \lambda^{\pm}_{sm'}|$ ограничены, если $|m-m'|$ ограничено. На практике это означает, что все μ_{sm} в (2.8) ограничены, а α и β должны удовлетворять следующим неравенствам

$$0 \leq \alpha \leq 1\ ; \quad 0 \leq \beta \leq 1 . \tag{2.9}$$

Если вместо u_{sm} ввести новые векторы

$$\ell_{sm} = C_{sm} u_{sm} \tag{2.10}$$

и определить C_{sm} таким образом, чтобы

$$\frac{C_{sm+1}}{C_{sm}} = \mu_{sm+1} \tag{2.11}$$

(это всегда возможно в силу ограниченности μ_{sm}), то получим следующее решение коммутационных соотношений (2.3):

$$J_0\, \ell_{sm} = m\, \ell_{sm}$$

$$J_+\ \ell_{sm} = (s-m)^{1-\beta}\ (s+m+1)^{1-\alpha}\ \ell_{sm+1} \tag{2.12}$$

$$J_-\ \ell_{sm} = (s+m)^{\alpha}\ (s-m+1)^{\beta}\ \ell_{sm-1} .$$

Видно, что общее решение (2.3) зависит, кроме s, еще от двух произвольных констант α и β. Поэтому произвольное представление $\underline{SU(2)}$ следует обозначить тремя числами $(s; \alpha, \beta)$. Однако заметим, что хотя для разных α и β мы получаем разные представления, все-таки не все из них являются неэквивалентными между собой.

Рассмотрим следующее преобразование

$$\rho'_{sm} = a_{sm}\,\rho_{sm} \tag{2.13}$$

(отметим, что это единственное преобразование, сохраняющее вид оператора J_0).

Если m не равно значениям, при которых правые части двух последних равенств (2.12) обращаются в нуль, то коэффициенты a_{sm} можно определить из равенства

$$\frac{a_{sm}}{a_{sm-1}} = (s+m)^{p-\alpha}(s-m+1)^{q-\beta}\,, \tag{2.14}$$

причем матрица

$$A_{smm'} = a_{sm}\,\delta_{mm'} \tag{2.15}$$

осуществляет переход от представления $(s;\alpha,\beta)$ к представлению $(s;p,q)$. Равенства (2.14) определяют коэффициенты a_{sm} для всех m , в которых J_+ и J_- не обращаются в нуль. Если J_+ и J_- для представлений $(s;\alpha,\beta)$ и $(s;p,q)$ обращаются в нуль для одинаковых значений m , то отношения $\dfrac{a_{sm}}{a_{sm-1}}$, для этих m остаются неопределенными, и, выбирая их произвольным образом, можно построить невырожденную матрицу $A_{smm'}$. Если же J_+ и J_- представления $(s;\alpha,\beta)$ обращаются в нуль в одних значениях m , а J_+ и J_- представления $(s;p,q)$ – в других m , то правая часть (2.14) в этих представлениях окажется либо нуль, либо бесконечность, и, следовательно, в этом случае не существует невырожденной матрицы $A_{smm'}$. Поэтому легко показать следующие соотношения эквивалентности (знак $\approx$) между разными полученными нами представлениями

$$(s;\alpha,\beta)\big|_{\alpha,\beta\neq 0,1}\approx\left(s;\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{2.16}$$

$$(s;\alpha,1)\big|_{\alpha\neq 0,1}\approx\left(s;\frac{1}{2},1\right) \tag{2.17}$$

$$(s;\alpha,0)\big|_{\alpha\neq 0,1}\approx\left(s;\frac{1}{2},0\right) \tag{2.18}$$

$$(s;0,\beta)\big|_{\beta\neq 0,1}\approx\left(s;0,\frac{1}{2}\right) \tag{2.19}$$

$$(s;1,\beta)\big|_{\beta\neq 0,1}\approx\left(s;1,\frac{1}{2}\right). \tag{2.20}$$

Прибавляя к предыдущим еще представления

$$(s;0,0);\ (s;0,1);\ (s;1,0);\ (s;1,1), \tag{2.21}$$

получаем полный список всех неэквивалентных между собой представлений, которые дают равенства (2.12). Как видно, их число девять. Они все, как правило, приводимы. Чтобы вскрыть их структуру, мы введем следующие обозначения. Как и раньше, M будем обозначать полное пространство представлений, т.е. линейную оболочку векторов ℓ_{sm} для всех возможных m ; M_+ будем обозначать линейную оболочку векторов ℓ_{sm} для $m\geq s+1$; M_k , то же самое, когда $-s\leq m\leq s$ и M_- то же самое, когда $m\leq -s-1$.

Очевидно, что $M=M_+\oplus M_k\oplus M_-$. В дальнейшем мы будем пользоваться знаком включения для обозначения инвариантных подпространств. Например, запись

$$M\supset M_+\oplus M_k\supset M_k$$

означает, что в M имеется инвариантное подпространство $M_+\oplus M_k$, в котором, в свою очередь, имеется также инвариантное подпространство M_k , причем все остальные подпространства не инвариантны. Знак

$\supset\{$ будет обозначать, что подпространство перед знаком распадается на те инвариантные подпространства, которые расположены в столбце после знака. И, наконец, знак $\{^{\supset}_{\supset}$ будет обозначать, что пространство перед знаком содержит два инвариантных подпространства, расположенных в столбце после знака – каждое против соответствующего включения ($\supset$). Например,

$$M \supset \begin{cases} M_+ \\ M_k \\ M_- \end{cases}$$

означает, что M распадается на три инвариантных подпространства, а

$$M \left\{ \begin{matrix} \supset M_+ \\ \supset M_- \end{matrix} \right. .$$

означает, что M содержит в себе только два инвариантных подпространства M_+ и M_- и что оно не распадается на них.

Используя введенные обозначения, легко выписать структуру пространств наших девяти представлений (2.16) (2.17) (2.18) (2.19) (2.20) и (2.21). Выписанная ниже структура пространств легко выводится из равенств (2.12) и в приложении Б нами дан пример выявления этой структуры

1) $(\dot{s};0,0)$; $\quad M \supset M_- \oplus M_k \supset M_-$

2) $(s;0,\frac{1}{2})$: $\quad M \supset \left\{ \begin{matrix} M_+ \\ M_- \oplus M_k \supset M_- \end{matrix} \right.$

3) $(s;0,1)$: $\quad M \left\{ \begin{matrix} \supset M_+ \\ \supset M_- \end{matrix} \right.$

4) $(s;\frac{1}{2},0)$: $\quad M \supset \left\{ \begin{matrix} M_k \oplus M_+ \supset M_k \\ M_- \end{matrix} \right.$

5) $(s; \frac{1}{2} \frac{1}{2})$: $M \supset \begin{cases} M_+ \\ M_k \\ M_- \end{cases}$

6) $(s; \frac{1}{2} 1)$: $M \supset \{ \begin{matrix} M_k \oplus M_+ \supset M_+ \\ M_- \end{matrix}$

7) $(s; 1, 0)$: $M \{ \begin{matrix} \supset M_k \oplus M_+ \supset M_k \\ \supset M_- \oplus M_k \supset M_k \end{matrix}$

8) $(s; 1, \frac{1}{2})$: $M \supset \{ \begin{matrix} M_+ \\ M_- \oplus M_k \supset M_k \end{matrix}$

0) $(s; 1, 1)$: $M \supset M_+ \oplus M_k \supset M_+$.

Следует отметить, что четыре представления (s;0,0),(s;0,1),(s;1,0),(s,1,1)– бесконечномерные и не вполне приводимые, действуют во всем пространстве М. Остальные являются вполне приводимыми, но все (за исключением одного) распадаются, вообше говоря, на не вполне приводимые, такие как $M_- \oplus M_k \supset M_-$; $M_- \oplus M_k \supset M_k$; $M_k \oplus M_+ \supset M_k$; $M_k \oplus M_+ \supset M_+$. Легко заметить, что первое из них выделяется только в $(s; 0, \frac{1}{2})$, второе – только в $(s; 1, \frac{1}{2})$, третье – в $(s; \frac{1}{2}, 0)$ и четвертое – в $(s; \frac{1}{2}, 1)$. Поэтому этими скобками можно обозначать соответствующие не вполне приводнмые представления. Наконец, одно представление распадается на три уже неприводимых M_-, M_k и M_+. Легко заметить, что M_- выделяется во всех представлениях, где $\alpha=\frac{1}{2}$ независимо от значения β ; M_+ – где $\beta=\frac{1}{2}$ независимо от значения α и M_k появляется только в одном месте, когда $\alpha=\frac{1}{2}$ и $\beta=\frac{1}{2}$. Таким образом, у нас имеется одиннадцать неразложимых представлений алгебры группы SU(2) . Из них только три неприводимые, а остальные приводимые, но не вполне. Все эти представления мы будем обозначать теми же тремя числами s , α и β , но в квадратных скобках. Ниже дана таблица упомянутых представлений:

1) $[s;0,0]$: $M \supset M_- \oplus M_k \supset M_-$

2) $[s;0,1]$: $M \begin{cases} \supset M_+ \\ \supset M_- \end{cases}$

3) $[s;1,0]$: $M \begin{cases} \supset M_+ \oplus M_k \supset M_k \\ \supset M_- \oplus M_k \supset M_k \end{cases}$

4) $[s;1,1]$: $M \supset M_+ \oplus M_k \supset M_+$

5) $[s;0,\frac{1}{2}]$: $M_- \oplus M_k \supset M_-$

6) $[s;\frac{1}{2}\ 0]$: $M_k \oplus M_+ \supset M_k$

7) $[s;\frac{1}{2},1]$: $M_k \oplus M_+ \supset M_+$

8) $[s;1,\frac{1}{2}]$: $M_- \oplus M_k \supset M_k$

$$9)\qquad [s;\ .\ ,\ \tfrac{1}{2}]:\qquad M_+$$

$$10)\qquad [s;\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}]:\qquad M_k \tag{2.23}$$

$$11)\qquad [s;\ \tfrac{1}{2},\ .\ ]:\qquad M_- .$$

Точка вместо α или β означает, что их значение может быть произвольным. Следует заметить, что выписанные выше неразложимые представления с фиксированными s, α и β эквивалентны между собой, где бы они не встречались. Так, например, представления в пространстве M_k из $[s;1,0]$, $[s;\frac{1}{2}, 0]$, $[s;1, \frac{1}{2}]$ и $[s;\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ эквивалентны между собой, представления в пространстве $M_k \oplus M_+ \supset M_k$ из $[s;1,0]$ и $[s;\frac{1}{2}, 0]$, в свою очередь, эквивалентны между собой и т.д.

3. Замечание об интегрируемости представлений алгебры группы $SU(2)$

Результат настоящего параграфа можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Все представления алгебры группы $SU(2)$ -типа (2.23), пространство которых содержит инвариантное неприводимое конечномерное подпространство и интегрируются до глобального представления всей группы $SU(2)$.

Легко заметить, что все представления указанного типа содержатся в представлении $[s;1,0]$ и, следовательно, достаточно доказать теорему для этого представления. Следует также отметить, что нами был рассмотрен пример именно такого представления для целочисленых s и для них теорема была на самом деле доказана. Тем не менее мы докажем ее для всех s (целых и полуцелых неотрицательных).

Прежде всего сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть в некотором пространстве M задано линейное представление алгебры группы G , базисные элементы которой можно представить в виде

$$J_{\mu} = -\sum M_k^{\mu}(x_{\ell}) \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \mu = 1 \dots f, \tag{3.1}$$

где $M_k^{\mu}(x_{\ell})$ – непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Тогда данную алгебру можно проинтегрировать до глобального представления группы $SU(2)$.

Доказательство основывается на основных теоремах С. Ли (см., например, /9/). Легко заметить, что если J_{μ} являются генераторами линейного представления, то M_k^{μ} являются генераторными функциями некоторой нелинейной реализации $F_x(g, x_{\ell})$ группы G . Тогда операторы

$$T_g f(x) = f(F(g^{-1}, x)) \tag{3.2}$$

задают линейное представление группы G в пространстве почти везде дифференцируемых функций. Легко убедиться, что генераторы представления (3.2) совпадают с (3.1)

$$J^{\mu} f(x) = \frac{1}{i} \frac{\partial T_g}{\partial a_{\mu}} \Big|_{a_{\mu}=0} f(x) = -\sum_{k=1}^{n} M_k^{\mu}(x_{\ell}) \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}, \tag{3.3}$$

так как

$$M_k^{\mu}(x) = \frac{1}{i} \frac{\partial F_k(g, x)}{\partial a_{\mu}} \Big|_{a_{\mu}=0} . \tag{3.4}$$

Таким образом, лемма доказана.

Для доказательства теоремы рассмотрим операторы

$$J^{\mu} = z_k \, \sigma^{\mu}_{k\ell} \frac{\partial}{\partial z_\ell}, \tag{3.5}$$

где σ^{μ} – матрицы Паули. Как известно, эти операторы являются генераторами представления группы SU(2) с произвольным целым или полуцелым неотрицательным s. В силу леммы данное представление интегрируемо.

Мы покажем, что это представление алгебры группы SU(2) принадлежит классу представлений $[s; 1, 0]$, чем мы и докажем нашу теорему.

Действительно, базисные векторы пространства представления имеют следующий вид:

$$\ell_{sm} = C_{sm} \, z_1^{s+m} \, z_2^{s-m}. \tag{3.6}$$

Теперь не составляет труда непосредственно проверить наше утверждение, пользуясь генераторами

$$J^{+} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_2}, \qquad J^{-} = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}. \tag{3.7}$$

Так, например,

$$J^{+} \ell_{ss} = J^{-} \ell_{s-s} = 0, \tag{3.8}$$

т.е. подпространство M_k инвариантно. Но

$$J^{+} \ell_{s-s-1} = \ell_{s-s} \qquad J^{-} \ell_{ss+1} = \ell_{ss} \tag{3.9}$$

и, следовательно, M_+ и M_- не являются инвариантными. Зато $M_+ \oplus M_k \supset M_k$ и $M_k \oplus M_- \supset M_k$ инвариантны. Таким образом, рассматриваемое представление является представлением $[s; 1, 0]$. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность В.И. Огиевецкому и И.Т.Тодорову за интерес к работе и ценные замечания, а также участникам семинара по теории поля Лаборатории теоретической физики за обсуждение работы.

Приложение А

В §1 мы определили базисные функции представления с точностью до произвольных констант C_{sm}. Как мы уже сказали, будем выделять разные инвариантные подпространства. Здесь мы выпишем все возможные выборы констант C_{sm}, указывая, какое при этом представление выделяется.

Для представления $[s; 1, 0]$ имеем

$$C_{sm} = (-1)^m \, C_s \frac{\prod\limits_{n=1}^{m} (s+m-n+1)}{m!} \qquad m \geq 0$$

$$C_{sm} = (-1)^{|m|} \, C_s \frac{\prod\limits_{n=1}^{|m|} (s-m-n+1)}{|m|!} \qquad m \leq 0 .$$

Все произведения вышеприведенных и последующих формул следует считать равными единице, когда $m=0$. Постоянные C_s – произвольные.

Представление $[s; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ получается, когда

$$C_{sm} = (-1)^m C_s \frac{\prod\limits_{n=1}^{m} (s-m+n)^{1/2} \, (s+m-n+1)^{1/2}}{m!} \qquad m \geq 0$$

$$C_{sm} = (-1)^{|m|} C_s \frac{\prod_{n=1}^{|m|} (s+m+n)^{1/2} (s-m-n+1)^{1/2}}{|m|!} \qquad m \le 0 .$$

Для этого представления возможен и другой выбор, который мы здесь не приводим.

Представление $[\, s ; \frac{1}{2} , 0 \,]$ получается, когда

$$C_{sm} = (-1)^m C_s \frac{\prod_{n=1}^{m} (s+m-n+1)^{1/2}}{m!} \qquad m \ge 0$$

$$C_{sm} = (-1)^{|m|} C_s \frac{\prod_{n=1}^{|m|} (s-m-n+1)(s+m+n)^{1/2}}{|m|!} \qquad m \le 0 .$$

И, наконец, для $[\, s ; 1 , \frac{1}{2} \,]$ имеем:

$$C_{sm} = (-1)^m C_s \frac{\prod_{n=1}^{m} (s-m+n)^{1/2} (s+m-n+1)^{1/2}}{m!} \qquad m \ge 0$$

$$C_{sm} = (-1)^{|m|} C_s \frac{\prod_{n=1}^{|m|} (s-m-n+1)^{1/2}}{|m|!} \qquad m \le 0 .$$

Здесь также возможен другой выбор постоянных C_{sm}.

Вообще, C_{sm} можно записать в виде:

$$C_{sm} = (-1)^m C_s \frac{\prod_{n=1}^{m} (s-m+n)^q (s+m-n+1)^p}{m!} \qquad m \ge 0$$

$$C_{sm} = (-1)^{|m|} C_s \frac{\prod_{n=1}^{|m|} (s-m-n+1)^{1-q} (s+m+n)^{1-p}}{|m|!} \qquad m \le 0 .$$

Все возможности (выписанные и не выписанные выше) получаются при подстановке $p, q = 0, \frac{1}{2}, 1$.

Приложение В

Рассмотрим пример выявления структур приводимых представлений. Возьмем случай, когда $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}$. Тогда вместо (2.12) имеем

$$J_0 \ell_{sm} = m \ell_{sm}$$

$$J_+ \ell_{sm} = (s-m)^{1/2} (s+m+1) \ell_{sm+1}$$

$$J_- \ell_{sm} = (s-m+1)^{1/2} \ell_{sm-1} .$$

Из этих равенств видно, что

$$J_- \ell_{ss+1} = 0 .$$

Следовательно, пространство M_+ (т.е. все линейные комбинации векторов ℓ_{sm} для $m \geq s+1$) инвариантно. Действительно, если $\ell_{sm} \in M_+$, то

$$J_+ \ell_{sm} \approx \ell_{sm+1} \neq 0,$$

но

$$\ell_{sm+1} \in M_+ ,$$

а

$$J_- \ell_{sm} \approx \ell_{sm-1} \neq 0 \qquad m > s+1 ,$$

и, следовательно, $J_+ \ell_{sm} \in M_+$, $J_- \ell_{sm} \in M_+$,

если

$$\ell_{sm} \in M_+ .$$

В силу того, что

$$J_+ \ell_{ss} = 0,$$

дополнение (т.е. подпространство $M_k \oplus M_-$) также инвариантно. Рассмотрим это подпространство более внимательно. Если $\ell_{sm} \in M_k \oplus M_-$, то $m \leq s$. Очевидно, что

$$J_- \ell_{sm} \neq 0 \qquad \text{для всех} \quad m \leq s.$$

Но

$$J_+ \ell_{s-s-1} = 0,$$

из которого следует, что M_- инвариантно. Действительно, если $\ell_{sm} \in M_-$, то

$$J_+ \ell_{sm} = \left\{ \begin{array}{ll} \ell_{sm+1} & m < -s-1 \\ 0 & m = -s-1 \end{array} \right\} \in M_-$$

$$, \quad J_- \ell_{sm} = \ell_{sm-1} \in M_- .$$

Подпространство M_k, однако, неинвариантно. Действительно, вектор $\ell_{s-s} \in M_k$, но

$$J_- \ell_{s-s} = (2s+1)^{1/2} \; a_{s-s-1} \in M_- .$$

Таким образом, когда $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{1}{2}$, пространство M распадается на два инвариантных подпространства M_+ и $M_- \oplus M_k$. Последнее подпространство является приводимым, так как в нем M_- инвариантно, но оно не вполне приводимо, так как M_k инвариантно. Мы везде это не вполне приводимое подпространство обозначали символом $M_k \oplus M_- \supset M_-$.

Литература

1. Д.П. Желобенко. Доклады АН СССР 121, №4 (1958).
2. Д.П. Желобенко. Доклады АН СССР, 126, №5 (1959).
3. И.М. Гельфанд, М.И. Гареев, Н.Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции вып. 5). Физматгиз, 1962.
4. С.С. Санников. Доклады АН СССР, 177, №6 (1967).
5. С.С. Санников. Доклады АН УССР, Киев (1968).
6. R.Rączka and J.Fischer, ICTP Trieste preprint IC/66/16 (1966).
7. J.Fischer, and R.Rączka. ICTP Trieste preprint IC/66/101 (1966).
8. Д. Стоянов, Х.Я. Христов. Препринт ОИЯИ Р2-3648, Дубна 1967.
9. Д. Стоянов, Х. Я. Христов. Препринт ОИЯИ Р2-3725, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 декабря 1968 года.